# 12.3 「ランダム」とは何を意味するか？

ワークシート

**問題**

**STEP III 2022、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

**考えてみよう**　角 $AOB$ が $\theta$ のとき、弦 $AB$ の長さはいくらか。（$O$ から垂線を下ろしてみよ。）

### 段階 1　円周上の 2 点

扱う内容：小問 (i)

**考えてみよう**　角 $AOB$ を $\theta$ とするとき、$O$ から垂線（perpendicular）を下ろして $AB$ を求めよ。角 $\theta$ は $[0, 2\pi]$ 上で一様（uniform）に分布する。あとは積分すればよい。

### 段階 2 内部の無作為な点

扱う内容：小問 (ii)、$R$ の確率密度関数

**考えてみよう** $\mathrm{P}(R \le r)$ は 2 つの面積の比である。これを微分して確率密度関数（probability density function）を求めよ。

**考えてみよう** $C$ を通る弦（chord）が $OC$ と角 $t$ をなすとする。この弦は $O$ からどれだけ離れているか。したがって、その長さはいくらか。

### 段階 3　$C$ について平均をとる

扱う内容：小問 (ii)、$\mathrm{L}(t)$ を求める

**手を止めて、やってみよう**　$s = \sin t$ を固定したまま、弦の長さに $R$ の確率密度関数をかけて積分せよ。次に $1-\cos^3 t$ と $1-\cos^2 t$ を因数分解し、$1+\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$ を用いよ。

### 段階 4 方向も無作為に

扱う内容：小問 (iii)

**考えてみよう** $T$ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で一様に分布する。$\mathrm{L}(t)$ の 2 つ目の表示を積分せよ。$\tan\frac{t}{2}$ の導関数は何か。

## 背後にある数学

### ベルトランの 3 つの答え

ベルトラン自身の問いは、無作為な弦が内接正三角形（inscribed equilateral triangle）の 1 辺 $\sqrt{3}a$ より長くなる確率はいくらか、というものであった。彼は 3 つの方法と 3 つの答えを示した。

- 無作為な端点：一方の端点を固定する。もう一方の端点が円周の中央の 3 分の 1 にあれば、弦は長い。確率は $\frac{1}{3}$。
- 無作為な半径とその上の無作為な点を中点とする：$O$ からの距離が $\frac{a}{2}$ より小さければ、弦は長い。確率は $\frac{1}{2}$。
- 円板内のどこかに無作為な中点をとる：中点が $O$ から $\frac{a}{2}$ 以内にあれば、弦は長い。確率は $\frac{1}{4}$。

それぞれの方法は弦の集合の上の異なる確率分布であり、矛盾はない。これらは異なる問いに答えているのである。教訓は、「一様に無作為に」という言葉は選んだパラメータ付け（parametrisation）に対してのみ意味をもち、連続的な集合に対しては、自然なパラメータ付けがただ 1 つに定まることはふつうない、ということである。

### 正しい答えはあるのか

1973 年、物理学者のエドウィン・ジェインズ（Edwin Jaynes）は、2 番目の方法こそが「正しい」と論じた。その根拠は、円を少し動かしたり拡大縮小したりしても答えは変わるべきではない、というものである。無作為な弦とは、床に描いた円の上にストローを投げたようなものであるべきだ、というわけである。この不変性（invariance）をもつのは、中心からの距離が一様な分布だけであり、実際にストローを投げる実験でも $\frac{1}{2}$ が確かめられている。正しい分布とはその状況の対称性を尊重するものである、という同じ考え方が、無作為な直線の数学である**積分幾何学**（integral geometry）の根底にあり、これは Section 12.20 のビュフォン（Buffon）の針も説明する。

#### 逆説から公理へ

ベルトランは弦の逆説を『*Calcul des probabilités*』（1889 年）で発表した。その目的の一部は、彼が「幾何学的確率」の軽率な使い方とみなしたものを皮肉ることであった。アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）もこれを論じている。1900 年、ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は新世紀に向けた有名な問題の中に確率の公理化（axiomatisation）を挙げ、1933 年にアンドレイ・コルモゴロフ（Andrey Kolmogorov）がこれを解決した。確率とは結果の空間の上の測度であり、「無作為な」対象についての問いはすべて、まずどの空間とどの測度を用いるかを述べなければならない。ベルトランの逆説は、なぜそれが必要なのかを示す標準的な例である。

## 次の一歩

1. **ベルトランの確率。** 上の 3 つの確率 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$ を確かめよ。

2. **もう 1 つの平均。** 弦の中点を円板内で一様に選ぶとき（右の図）、長さの期待値が $\frac{4a}{3}$ であることを示せ。（**ヒント：** これは $L(\frac{\pi}{2})$ である。なぜか。）

3. **無作為な距離。** $O$ から弦までの距離が $[0, a]$ 上で一様であるとき、長さの期待値が $\frac{\pi a}{2}$ であることを示せ。

4. **3 つの方法、3 つの分布。** 3 つの方法それぞれについて、$[0, 2a]$ 上での弦の長さ $\ell$ の確率密度を求めよ。

## さらに学ぶために

- **Edwin Jaynes, “The well-posed problem”**, *Foundations of Physics* 3 (1973). 不変性による議論。読みやすく、刺激的である。

- **Gábor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel). ベルトランの逆説をはじめ、多くの逆説を扱う。
- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press). 積分幾何学。いずれ読むときのために。

詳しい解説付きの解答は第 12.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/bertrand.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com