12.23 確率から導くスターリングの公式

ワークシート

問題

STEP II 2016、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s2-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　平均（mean）μ、分散（variance）σ^2 の離散確率変数 X が近似的に正規分布に従うとき、$\mathrm{P}(X = \mu)$ はおよそいくらか。（μ を中心とする幅 1 の区間の確率を考えよ。）

段階 1　16 枚の硬貨

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$\mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$ の平均（mean）と標準偏差（standard deviation）を求めよ。$\mathrm{P}(X = 8)$ を、正規分布の確率密度関数（normal density）の頂点における高さで近似せよ。

段階 2 中心二項係数

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ について、$\mathrm{P}(X = n)$ を正確な形で書き、さらに同じ方法で近似した形でも書け。その二つを等しいとおけ。

段階 3 スターリングの公式

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう パラメータ(parameter)n のポアソン分布(Poisson distribution)について同じことを行え。その平均と分散（variance）は何か。$\mathrm{P}(X = n)$ を正確な形と近似した形の両方で書け。

背後にある数学

近似の精度はどれくらいか

この議論はヒューリスティック（heuristic）である。正規近似を *1 点*で用いているが、通常の中心極限定理（central limit theorem）はそれを正当化しない。その厳密版である**局所中心極限定理**（local central limit theorem）がまさにそれを保証し、この議論を本物の証明にする。実際、スターリングの公式は驚くほど精度が高い。比 $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}$ はおよそ $1 + \frac{1}{12n}$ であり、$n = 1$ のときでさえ 1 の代わりに 0.92 を与え、$n = 10$ のときには 0.8% 小さいだけである。完全な級数 $1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \cdots$ は**漸近級数**（asymptotic series）の一例である。n が大きいほどよい近似を与えるが、n を固定すると最終的には発散する。

階乗と正規分布はなぜ結びつくのか

スターリングの公式に現れる $\sqrt{2\pi}$ と正規分布の密度に現れるものは同じ定数である。$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ だからである。アブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre）は 1733 年、まさにこの方法で二項分布の正規近似を発見した。そのためには n が大きいときの $\binom{n}{k}$ の近似が必要だったのである。彼は $n! \approx Cn^{n+1/2}e^{-n}$ という形を見いだしたが、定数までは求められなかった。ジェームズ・スターリング（James Stirling）が $C = \sqrt{2\pi}$ であることを示した。正規分布は階乗の漸近挙動から生まれたのである。

ド・モアブルとスターリング

アブラーム・ド・モアブルはフランスのプロテスタントで、ロンドンに亡命し、家庭教師や賭博師への助言で生計を立てていた。彼は 1718 年に『*The Doctrine of Chances*』（偶然の理論）を出版し、1733 年の小冊子で二項分布の正規近似を発見した。これが正規曲線の最初の登場である。スコットランドの数学者ジェームズ・スターリングは、著書『*Methodus Differentialis*』（1730 年）で定数の値を発表し、ド・モアブルは寛大にもその功績を彼に帰した。階乗の近似は今も活発な研究分野であり、巨大な n に対する $n!$ の計算は組合せ論や暗号理論で必要とされている。

次の一歩

1. **公式を確かめる。** スターリングの公式を用いて $10!$ と $20!$ を見積もり、真の値 $3\,628\,800$ および $2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ と比較せよ。

2. **(iii) から (ii) へ。** 小問 (iii) のスターリングの公式から小問 (ii) の近似が導かれることを示せ。

3. **100! の桁数。** $\log_{10} n! \approx n\log_{10}\frac{n}{e} + \frac{1}{2}\log_{10}(2\pi n)$ を用いて、$100!$ が 158 桁であることを示せ。

4. **硬貨投げの引き分け。** 小問 (ii) を用いて、公平な硬貨を 1000 回投げたとき表がちょうど 500 回出る確率がおよそ 0.025 であることを示せ。

さらに学ぶために

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 II 章。スターリングの公式を証明している。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）、第 9 章。漸近解析を扱う。
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics***（Harvard University Press）。ド・モアブルと正規曲線の誕生について。

詳しい解説付きの解答は第 12.23 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/stirling-probability.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com