12.22 平均をもたない分布

ワークシート

問題

STEP III 1995、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　(U, V) が、確率密度が原点からの距離だけに依存するような確率的な点であるとき、原点からその点へ引いた直線が軸となす角 Θ について何がいえるか。

段階 1　同時密度関数

扱う内容：同時密度関数（joint density）と動径方向の対称性（radial symmetry）

? **考えてみよう**　X と Y は独立（independent）であるから、それぞれの確率密度関数（density）を掛け合わせればよい。その結果は何に依存しているか。

段階 2 対称性を利用する

扱う内容：$\mathrm{P}(U/V < k)$ に関する等式

> **手を止めて、やってみよう** $\frac{U}{V} < k$ となるのは、$V > 0$ の場合と $V < 0$ の場合がある。それぞれを領域（region）として書き表せ。回転（rotation）$(u, v) \mapsto (-u, -v)$ によって、これらの領域はどうなるか。

段階 3　角度

扱う内容：U/V の確率密度関数

考えてみよう　領域 $\{V > 0, U < kV\}$ を図示せよ。これは原点を頂点とする扇形の領域（wedge）である。その角度はいくらか。動径方向に対称な確率密度関数のもとでは、扇形の領域の確率はその角度を 2π で割ったものに等しい。そのうえで微分せよ。

背後にある数学

平均が存在しない

コーシー分布の平均は $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi(1+k^2)}\,\mathrm{d}k$ となるはずであるが、$\int_0^K \frac{k}{1+k^2}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\ln(1+K^2) \to \infty$ である。この積分は収束（converge）せず、平均は存在しない。（対称性から答えは 0 だと思うかもしれないが、正の部分も負の部分もともに無限大であり、$\infty - \infty$ には値がない。）分散も無限大である。

さらに悪いことに、独立な n 個のコーシー確率変数の平均は再びコーシー分布に従い、しかもまったく同じ分布をもつ。（これを確かめる 1 つの方法は、特性関数（characteristic function）$\mathrm{E}(e^{itX}) = e^{-|t|}$ を用いるものである。）したがって平均をとってもまったく役に立たない。100 万個の測定値の平均は、1 個の測定値より少しも信頼できないのである。図 12.22.1 はその様子を示している。正規分布の標本の逐次平均は落ち着いていくが、コーシー分布の標本の逐次平均は、ときおり現れる巨大な値に揺さぶられて、いつまでもふらつき続ける。

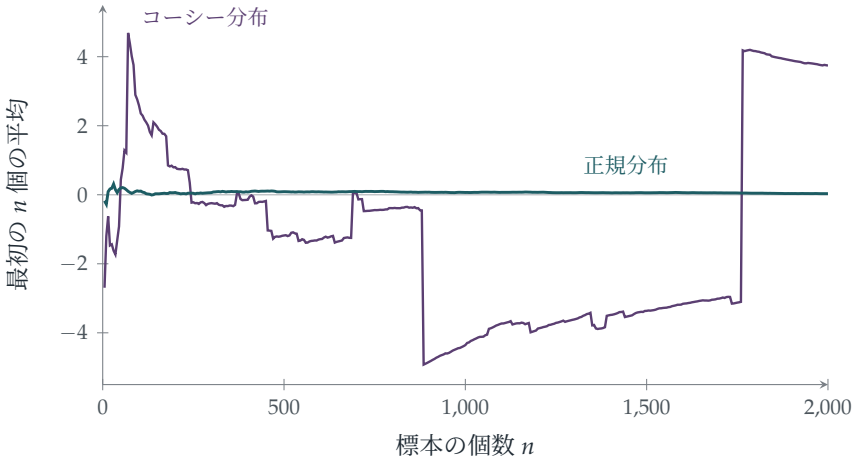

図 12.22.1　独立な 2000 個の標本の逐次平均。標準正規分布の標本（ティール）では、大数の法則が予言するとおり、平均は 0 に落ち着いていく。コーシー分布の標本（プラム）では決して落ち着かない。ときおり現れるたった 1 つの巨大な値が、平均をどこか新しい場所へ放り出してしまうのである。

コーシー確率変数はどこから現れるか

一様に無作為な方向に向けた懐中電灯で壁を照らすと、壁に映る光点の位置はコーシー分布に従う。物理学では、同じ確率密度関数が**ローレンツ関数**（Lorentzian）とよばれ、スペクトル線や共鳴ピークの形を記述する（Section 11.1 と比較せよ）。金融の分野では、正規分布によるモデルが大幅に過小評価してしまうときおりの暴落をモデル化するために、コーシー分布のような裾の重い分布が用いられる。統計学にとっての教訓は深刻である。平均や分散に基づく手法は裾の重いデータに対しては破綻し、中央値（コーシー分布に対してもまったく問題なく振る舞う）を用いるなどの頑健な手法が必要となるのである。

ポアソン、コーシー、そして論争

この分布は 1824 年にポアソン（Siméon Denis Poisson）によって研究され、彼はそれが大数の法則を満たさないことに気づいていた。コーシー（Augustin-Louis Cauchy）は 1853 年、最小二乗法をめぐるビエネメ（Irénée-Jules Bienaymé）との公開論争の中でこの分布に出会った。コーシーはこれを用いて、誤差の裾が重い場合には最小二乗法が劣った方法になりうることを示したのである。名前はコーシーに定着したが、これは Stephen Stigler が「スティグラーの名祖の法則」とよぶものの一例である。すなわち、科学上の発見は最初の発見者の名前ではよばれない、という法則である。

次の一歩

1 **懐中電灯。** 長くまっすぐな壁から距離 1 の位置にある懐中電灯が、壁への垂線と角 Θ をなす方向を向いている。ただし Θ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の一様分布に従う。光点の位置 $\tan\Theta$ がコーシー分布に従うことを示せ。

2 **逆数。** C がコーシー分布に従うならば、$\frac{1}{C}$ もコーシー分布に従うことを示せ。（ヒント：$\frac{U}{V}$ と $\frac{V}{U}$。）

3 **中央値はうまく働く。** コーシー分布の中央値は 0 であり、四分位数は ± 1 であることを示せ。

4 **半径と角度。** X, Y を独立な標準正規確率変数とするとき、極座標に変換することにより、$R^2 = X^2 + Y^2$ が平均 2 の指数分布に従い、かつ角度と独立であることを示せ。（これは正規乱数を生成するボックス＝ミュラー法の基礎である。）

さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press)。確率変数の変換について。
- **Nassim Nicholas Taleb, *The Black Swan*** (Penguin)。邦題『ブラック・スワン』。裾の重い分布とそれがなぜ重要なのかを、一般読者向けに解説している。
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics*** (Harvard University Press)。コーシーとビエネメの論争も扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 12.22 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/cauchy.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com