12.21 棒を折る

ワークシート

問題

STEP III 1990、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q16

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　3 つの長さで三角形が作れるのは、どの長さも他の 2 つの和より小さいとき、かつそのときに限る。長さの和が L であるとき、これは最も長いものについて何を意味するか。辺 c の対角が鈍角になるのはどのようなときか。

段階 1　一度切ってから半分にする

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　和が 1 である 3 つの長さが三角形をなすのは、どの長さも $\frac{1}{2}$ より小さいときであり、かつそのときに限る。このことから X について何がわかるか。

手を止めて、やってみよう　この三角形は二等辺三角形（isosceles triangle）である。X の対角が鈍角（obtuse angle）になるのはどのようなときか。余弦

定理（cosine rule）を用いよ。三角形ができるという条件のもとで、X は $[0, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。

段階 2　2 つ目の構成

扱う内容：小問 (ii)：構成と条件

考えてみよう　与えられた領域上で、辺の長さが $x, y, 2-x-y$ である場合の 3 つの三角不等式（triangle inequality）を確かめよ。

考えてみよう　B における角は長さ y の辺の対角である。この角が鈍角になる条件を、y についての不等式として書け。

段階 3 **面積**

扱う内容：小問 (ii)：確率

手を止めて、やってみよう $x^2 - 2x + 2$ を $2 - x$ で割れ。領域のうち曲線より上にある部分の面積を求め、それを領域全体の面積で割れ。

背後にある数学

古典的な折れた棒の問題

棒を、独立（independent）に一様分布する 2 点 U, V で折る。組 (U, V) は単位正方形上に一様に分布し、3 本の断片で三角形が作れるのは各断片が $\frac{1}{2}$ より短いときにちょうど一致する。この条件は合計面積 $\frac{3}{4}$ の 4 つの小さな三角形を切り取るので、確率は $\frac{1}{4}$ となる。三角形ができたという条件のもとで、それが鋭角三角形である確率は $\frac{1}{4}$ のうちの $3\ln 2 - 2 \approx 0.079$、すなわち約 32% である。これらの断片は**一様ランダム分割**（uniform random partition）の一例であり、その同時分布は**ディリクレ分布**（Dirichlet distribution）である。ディリクレ分布はベイズ統計学（Bayesian statistics）や、資源がランダムに分配される様子のモデルに現れる。

棒の折り方が結果を左右する

問題の 2 つの方法は、よく似て聞こえる問いに対して $3 - 2\sqrt{2}$ と $3 - 4\ln 2$ という異なる答えを与え、しかもどちらも古典的な方法とは異なることに注意しよう。ベルトラン（Bertrand）の弦の問題（Section 12.3）と同様に、手順を指定しない限り「ランダム」という言葉には何の意味もない。

ランダムな三角形

ランダムな三角形に関する問題は、ヴィクトリア朝時代に人気のあったパズルである。ルイス・キャロル（Lewis Carroll）の *Pillow Problems*（1893 年）は、「ランダムに」選んだ三角形が鈍角三角形である確率を問うている。その答えは、本節の答えと同じく、彼が選んだランダムさのモデルに完全に依存する。ランダムな三角形に関する問題はその後も驚きを生み続けてきた。たとえば、正方形内に一様ランダムにとった 3 点が鈍角三角形をなす確率は約 0.725 であり、これが厳密に計算されたのは 20 世紀になってからである。

次の一歩

1. **古典的な問題。** 棒を独立に一様分布する 2 点で折るとき、断片で三角形が作れる確率は $\frac{1}{4}$ であることを示せ。

2. **長いほうの断片を折る。** 棒を一様分布する 1 点で折り、次に長いほうの断片を一様分布する 1 点で折る。3 本の断片で三角形が作れる確率は $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$ であることを示せ。

3. **鋭角か鈍角か。** 小問 (ii) において、三角形 ABC が C において（$AB = 2 - x - y$ の対角として）鈍角をもつ確率を求めよ。これを用いて、どこかに鈍角をもつ確率を求めよ。

4. **最長の断片の期待値。** 古典的な折れた棒の問題において、最も長い断片の長さの期待値（expected value）は $\frac{11}{18}$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics***（Norton）。折れた棒の問題を収録している。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。
- **Lewis Carroll, *Pillow Problems***（Dover、*A Tangled Tale* と合本）。ランダムな三角形を含むヴィクトリア朝時代のパズル集。

詳しい解説付きの解答は第 12.21 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/broken-stick.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com