12.20 ビュフォンの針

ワークシート

問題

STEP I 1993、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s1-q16

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　針の中心が最も近い直線から距離 x のところにあり、針が直線の垂線と角 y をなしているとする。針は直線に向かってどこまで届くか。

段階 1　積分

扱う内容：積分

考えてみよう　$\int_0^1 \cos^{-1} t \, \mathrm{d}t$ において $t = \cos y$ と置換（substitution）し、そのあと部分積分（integration by parts）を行う。

段階 2 位置が与えられたとき

扱う内容：$X = x$ が与えられたときの確率

手を止めて、やってみよう 針の中心は最も近い線から距離 x の位置にあり、針は垂線（perpendicular）と角 y をなす。針は線に向かってどこまで届くか。x を固定したとき、どのような y の値で針は線と交わるか。

段階 3 位置について平均をとる

扱う内容：一般の投げ方に対する確率

> **考えてみよう** X は $[0, b]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。求めた条件付き確率（conditional probability）に X の確率密度関数（probability density function）を掛けて積分し、$x = at$ と置換して最初の積分を利用せよ。

背後にある数学

ビュフォンの麺

ほとんど計算なしで答えを見通す方法がある。針を任意の形に曲げて「麺」（noodle）にし、それが直線と交わる回数を C とする。期待値の線形性（linearity of expectation）により、曲線の交わる回数の期待値はその小さな各部分についての和であるから、長さに比例する。すなわち、ある定数 κ に対して $\mathrm{E}(C) = \kappa L$ である。κ を求めるために、麺として直径が直線の間隔 $2b$ に等しい円をとる。この円は常にちょうど 2 回交わり、その長さは $2\pi b$ である。よって $\kappa \cdot 2\pi b = 2$ となり、$\kappa = \frac{1}{\pi b}$ を得る。長さ $2a < 2b$ のまっすぐな針は高々 1 回しか交わらないので、$\mathrm{P}(\text{交わる}) = \mathrm{E}(C) = \frac{2a}{\pi b}$ である。この議論はバルビエ（Joseph-Émile Barbier）によるもので（1860 年）、確率論的推論の珠玉である。π は、定数を較正するために選んだ円から来ているのである。

π の推定と、してはいけないこと

n 本の針を投げて c 本が交わったとすると、$\frac{c}{n} \approx \frac{2a}{\pi b}$ より $\pi \approx \frac{2an}{bc}$ である。誤差は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 程度でしか小さくならないので、π を小数第 3 位まで求めるには約 100 万回投げる必要がある。1901 年、イタリアの数学者 Mario Lazzarini は、3408 回の試行から $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$（小数第 6 位まで正しい）を得たと主張した。統計学者たちは、この結果は出来すぎていて信じがたいと指摘している。3408 回の試行と注意深く選ん

だ針の長さのもとでは、$\frac{355}{113}$ はちょうど 1808 回の交差から生じるのであり、ちょうどよいところで実験を打ち切ればこの値が得られてしまう。これは都合のよい結果だけを報告することへの戒めとして、古典的な教訓話となっている。

ビュフォン

ビュフォンは博物学者であり、パリの王立植物園の園長を務め、全 36 巻の博物誌の著者でもあった。彼は 1733 年に針の問題（および正方形のタイルを用いた版である「フラン・カロー」（franc-carreau）遊び）を科学アカデミー（Académie des Sciences）に提出し、1777 年にその解を発表した。彼のねらいは、算術だけでなく幾何学も確率に用いることができると示すことであった。ここから積分幾何学（integral geometry）、すなわちランダムな直線と、それらが曲線や曲面と交わる様子を扱う理論が生まれた。これは現在、ステレオロジー（stereology）、すなわち 2 次元の断面から 3 次元の構造（組織中の細胞など）の大きさや形を推定する科学において用いられている。

次の一歩

1. **長い針。** $a > b$ ならば、針は 2 本以上の直線と交わることがある。それでも交わる回数の期待値は $\frac{2a}{\pi b}$ であることを示せ。
2. **麺。** 長さ $2a$ の針を直角に曲げる（長さ a の 2 本の腕をもつ）。交わる回数の期待値はいくらか。
3. **正方形のタイル。** 半径 r の硬貨を、1 辺 $s > 2r$ の正方形のタイルを敷いた床の上に投げる。硬貨が完全に 1 枚のタイルの内部に収まる確率を求めよ。
4. **Lazzarini の針。** $a = \frac{5}{6}b$（したがって $\frac{2a}{\pi b} = \frac{5}{3\pi}$）のとき、3408 回の試行で 1808 回交わると、推定値 $\pi \approx \frac{355}{113}$ が得られることを示せ。

さらに学ぶために

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability***（Cambridge University Press）。ビュフォンの針から話が始まる。
- **Lee Badger,「Lazzarini's lucky approximation of π」**, *Mathematics Magazine* 67 (1994)。疑わしい実験の統計学。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。確率の問題に対するモンテカルロ法。

詳しい解説付きの解答は第 12.20 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/buffon.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com