12.2 基準率の誤謬

ワークシート

問題

STEP II 1998、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s2-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　1000 人を想像してみよう。そのうち何人が病気にかかっているか。そのうち何人が陽性と判定されるか。健康な人のうち何人が陽性と判定されるか。

段階 1 ベイズの定理（Bayes' theorem）

扱う内容：フランキーの確率

考えてみよう 1000 人の集団を想像してみよ。病気にかかっている人は何人いて、そのうち何人が検査で陽性（positive）となるか。また、健康な人のうち陽性となるのは何人か。

手を止めて、やってみよう $\mathrm{P}(D \mid +) = \frac{\mathrm{P}(D \cap +)}{\mathrm{P}(+)}$ と書き、$\mathrm{P}(+)$ をフランキーが病気にかかっているかどうかで場合分けせよ。

段階 2　2 回目の検査

扱う内容：p を求める

考えてみよう　2 回目の検査は、AL で陽性だった人だけが受ける。その集団のうち、患者の割合はどれだけか。それをベイズの定理における新たな出発点の確率として用い、得られた答えを $\frac{1}{2}$ に等しいとおけ。

背後にある数学

オッズと証拠

ベイズの定理は**オッズ**（odds）を用いると最もわかりやすい。D のオッズとは $\mathrm{P}(D) : \mathrm{P}(\bar{D})$ のことである。一つの証拠 E は、オッズに**尤度比**（likelihood ratio）$\frac{\mathrm{P}(E|D)}{\mathrm{P}(E|\bar{D})}$ を掛ける：

$$\text{事後オッズ} = \text{事前オッズ} \times \text{尤度比}.$$

ここで事前オッズは $1 : 99$ であり、AL の尤度比は $0.9 \div \frac{1}{11} = 9.9$ であるから、事後オッズは $9.9 : 99 = 1 : 10$、すなわち確率 $\frac{1}{11}$ となる。尤度比 10 をもつ独立な二つ目の検査（$p = 0.09$ のときの STEP がそうである）によって、オッズは $1 : 1$ になる。対数をとると、証拠は**足し算**になる。すなわち、独立な検査はそれぞれ自分の尤度比の対数を寄与する。チューリング（Turing）はまさにこれを用い、証拠を「バン」と「デシバン」で測って、ブレッチリー・パーク（Bletchley Park）でエニグマの暗号文を解読した。

検察官の誤謬

1999 年、事務弁護士の Sally Clark は二人の幼い息子を殺害したとして有罪判決を受けた。その根拠の一部は、一つの家族で乳幼児突然死が二度起こる確率は「7300 万分の 1」であるという証拠であった。その数値自体の誤り（二つの死が独立であると仮定し、遺伝的・環境的要因を無視していた）は別としても、この推論は $\mathrm{P}(\text{証拠} \mid \text{無実})$ と $\mathrm{P}(\text{無実} \mid \text{証拠})$ を混同していた。母親による二重殺人もまたきわめてまれであり、比較

すべきは二つの説明どうしなのである。英国王立統計学会（Royal Statistical Society）はこの誤りを指摘する公開書簡を出し、2003年に彼女の有罪判決は覆された。その数学は、まさにこの問題のものと同じである。

Gigerenzer と自然頻度

1990年代、心理学者の Gerd Gigerenzer は、検査の統計を条件付き確率として与えられた医師たちは、この問題のような問いにほとんどの場合ひどく間違えるが、同じ情報を自然頻度（natural frequencies）として提示されると（「1000人の女性のうち10人が乳がんにかかっている。そのうち8人が陽性と判定される…」）大半が正しく答えることを示した。彼の研究は、多くの国で医療リスクを患者に伝える方法を変えた。

次の一歩

1. **冷蔵庫の中の死体。** STEP II 1987、問16（step.maths.org/questions/87-s2-q16）に挑戦してみよう。信頼性の異なる二人の証人についてのベイズの定理の問題であり、STEP の中でも特に印象的な設定の一つである。

2. **どれほどまれか。** 感度（sensitivity）0.9、偽陽性率 $\frac{1}{11}$ の検査について、陽性結果が「病気である確率が五分五分を上回る」ことを意味するためには、病気はどれほどありふれていなければならないか。

3. **検査を繰り返す。** AL そのものを繰り返し、その人の真の状態を与えたときに結果が独立であるとする。AL で二回陽性となった後に病気である確率はいくらか。三回の場合はどうか。

4. **スクリーニング。** あるスクリーニング計画で、有病率（prevalence）が10 000人に1人の病態について100万人を検査する。用いる検査は感度99%、偽陽性率1%である。その病態の可能性があると告げられるのは何人で、そのうち実際にその病態をもつのは何人か。

さらに学ぶために

- **Gerd Gigerenzer, *Reckoning with Risk*** (Penguin)。自然頻度、医療検査、そして法廷。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican)。医療スクリーニングと Sally Clark 事件を含む。
- **Sharon Bertsch McGrayne, *The Theory That Would Not Die*** (Yale University Press)。チ

ューリングによる利用を含む、ベイズの定理の歴史。

詳しい解説付きの解答は第 12.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/base-rate.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com