12.19 平面上のランダムな点

ワークシート

問題

STEP II 2012、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　平均（mean）μ のポアソン確率変数（Poisson random variable）が値 0 をとる確率はいくらか。

段階 1　近くにスーパーマーケットがない

扱う内容：円内にスーパーマーケットがない

? **考えてみよう**　半径 y の円の中にあるスーパーマーケットの数はポアソン分布（Poisson distribution）に従う。その平均（mean）はいくらか。また、その数が 0 である確率はいくらか。

段階 2 最も近い距離の分布

扱う内容：Y の分布

> **手を止めて、やってみよう** $Y \geq y$ とは、距離 y 以内にスーパーマーケットが一つもないということである。では、$\mathrm{P}(Y < y)$ はいくらか。これを微分すれば確率密度関数（density）が得られる。

段階 3 平均

扱う内容：平均

> **考えてみよう** $\mathrm{E}(Y)$ を積分で表せ。指数が $-\frac{1}{2}x^2$ となるように置換（substitution）し、問題文で与えられた積分を用いよ。

段階 4　分散

扱う内容：分散

考えてみよう　$\mathrm{E}(Y^2)$ では被積分関数に含まれる y の指数が奇数なので、$u = \pi k y^2$ と置換する。そのうえで $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2$ を用いて分散（variance）を求めよ。

背後にある数学

平面上のポアソン過程

強度（intensity）k の空間ポアソン過程とは、点のランダムな散らばりであって、互いに交わらない領域に含まれる点の個数が独立であり、面積 A の領域に含まれる点の個数が平均 kA のポアソン分布に従うものである。これは、膨大な個数の点を膨大な面積の上に独立かつ一様に、適切な平均密度で落としたときに得られるものであり、攪乱順列（derangements、Section 9.8）を説明するのと同じ「稀な事象の法則」（law of rare events）による。これは完全空間ランダム性（complete spatial randomness）の自然なモデルであり、現実のパターンはこれと比べて評価される。2 人の生態学者が 1954 年に考案した**クラーク–エヴァンス検定**（Clark–Evans test）は、観測された最近接距離の平均を $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ と比較する。それよりずっと小さければ集中（親木の近くに落ちる種子）を示唆し、ずっと大きければ規則的な間隔（縄張りをもつ鳥や、水をめぐる植物どうしの競争）を示唆する。

3 次元の場合

同じ計算を 3 次元で行うと、最も近い星、分子、銀河までの距離について $\mathrm{P}(Y > y) = e^{-\frac{4}{3}\pi k y^3}$ が得られる。チャンドラセカール（Subrahmanyan Chandrasekhar）は 1943 年にこれを用いて、ランダムに分布する近隣の星から 1 つの星が受ける重力を研究した。また物理学者は、気体分子の平均自由行程（mean free path）にこれを用いている。

レイリー

密度 $\frac{y}{\sigma^2}e^{-y^2/(2\sigma^2)}$ の名は、1880 年に音響理論の中でこれに出会ったレイリー卿（Lord Rayleigh）にちなむ。これは、位相（phase）がランダムな多数の波を重ね合わせたときの振幅を表す。また、2 つの座標が独立な正規確率変数であるような点の原点からの距離もこの分布に従い、これがここに現れる理由を別の角度から見る方法になっている（演習 3）。今日では、多数の経路をランダムな位相で通って受信機に届く携帯電話の電波のフェージング（fading）のモデルとして使われている。

次の一歩

1. **中央値。**最も近いスーパーマーケットまでの距離の中央値（median）を求め、平均と比較せよ。

2. **2 番目に近いもの。**2 番目に近いスーパーマーケットまでの距離の分布を求めよ。（ヒント：$\mathrm{P}(Y_2 > y)$ は、y 以内にスーパーマーケットが高々 1 軒しかない確率である。）

3. **正規分布に従う座標。**U と V が独立に $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ に従うとき、$\sqrt{U^2+V^2}$ の密度が $\frac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}$ であることを示せ。σ をどの値にすればスーパーマーケットの分布が得られるか。

4. **クラーク–エヴァンス。**400 本の木がある 1 km^2 の森を調査したところ、木から最も近い隣の木までの距離の平均は 35 m であった。これは完全空間ランダム性と整合するか。それとも集中、あるいは規則的な間隔を示唆するか。

さらに学ぶために

- **Peter Diggle, *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns***（Arnold）。空間点パターンの統計解析に関する標準的な文献で、クラーク–エヴァンス検定とその発展形を扱っている。
- **John Kingman, *Poisson Processes***（Oxford University Press）。任意の次元のポアソン過程を扱った、短く美しい本である。
- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press）。ポアソン過程の章。

詳しい解説付きの解答は第 12.19 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/spatial-poisson.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com