12.18 無記憶性

ワークシート

問題

STEP III 2021、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$x \geq 0$ に対して $\mathrm{P}(X > x)$ はいくらか。$\mathrm{P}(X > s+t \mid X > s)$ はいくらか。

段階 1　整数部分

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$Y = n$ となるのは、ちょうど $n \leq X < n+1$ のときである。$\mathrm{P}(X > x)$ はどうなるか。

段階 2 小数部分

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう $Z < z$ は、X が区間（interval）$[n, n+z)$ のいずれかに含まれることを意味する。それらの確率（probability）を足し合わせると、等比級数（geometric series）が得られる。

段階 3 Z の平均

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 小問 (ii) の結果を微分して Z の確率密度関数（probability density function）を求め、それに z を掛けて積分するか、あるいは $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \mathrm{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z$ を用いよ。

段階 4　独立性

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう　$\mathrm{P}(Y = n \text{ かつ} z_1 < Z < z_2)$ を X に関する確率として書き表せ。それを小問 (i) と小問 (ii) の答えの積と比較せよ。

背後にある数学

指数分布はなぜ特別なのか

Y と Z の独立性は $e^{-\lambda(n+z)} = e^{-\lambda n}e^{-\lambda z}$ から直接導かれるが、これは無記憶性が姿を変えたものにほかならない。実は、記憶をもたない連続分布は指数分布**だけ**である。すべての $s, t \geq 0$ に対して $\mathrm{P}(X > s+t) = \mathrm{P}(X > s)\mathrm{P}(X > t)$ が成り立つならば、$g(t) = \ln \mathrm{P}(X > t)$ は $g(s+t) = g(s) + g(t)$ を満たし、（g が単調ならば）これにより $g(t) = -\lambda t$ となる。だからこそ指数分布は、蓄積なしに「ランダムに」起こる事象の待ち時間のモデルとなるのである。放射性崩壊、客の到着、摩耗しない電子部品の故障などがその例である。

最小値と待ち時間のパラドックス

X_1 と X_2 がそれぞれ率 λ_1, λ_2 の独立な指数分布に従うならば $\mathrm{P}(\min > x) = e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}$ であるから、最小値は率 $\lambda_1 + \lambda_2$ の指数分布に従う。二つの独立なランダムな事象のうち最初のものを待つことは、合わせた率で起こる一つの事象を待つことと同じである（演習問題の STEP III 2002 Q13）。無記憶性は**待ち時間のパラドックス**（waiting-time paradox）も説明する。バスがランダムに到着し、平均の間隔が 10 分であるとき、ランダムな時刻に到着した乗客の平均待ち時間は 5 分ではなく 10 分である。残りの待ち時間は記憶をもたないからである。さらに、乗客が到着した時点を含む間隔の長さは平均 20 分である。長い間隔ほど、その中に到着しやすいからである。

ラザフォードとポアソン過程

1910 年、アーネスト・ラザフォード（Ernest Rutherford）とハンス・ガイガー（Hans Geiger）は、放射線源から放出されるアルファ粒子を 7.5 秒ごとの区間で数え、その個数がポアソン分布（Poisson distribution）に従うことを見いだした。放出が一定の率で独立に起こるならばそうなるはずであることを、数学者 Harry Bateman が示していた。このとき放出と放出の間の時間は指数分布に従う。**ポアソン過程**（Poisson process）、すなわち間隔が指数分布に従う事象の列は、今日では時間におけるランダムさの基本モデルであり、電話の呼び出し、保険金の請求、ニューロンの発火などに用いられている。次の節 Section 12.19 では、これを空間へと拡張する。

次の一歩

1 **二つのバス路線。** STEP III 2002、問 13（step.maths.org/questions/02-s3-q13）に挑戦せよ。二つの指数分布に従う確率変数の最小値を用いて、次のバスまでの待ち時間を求める問題である。

2 **離散分布の無記憶性。** 幾何分布が記憶をもたないこと、すなわち $\mathrm{P}(Y \geq m+n \mid Y \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq n)$ を示せ。

3 **待ち時間のパラドックス。** バスが率 λ のポアソン過程に従って到着する。固定された時刻 t を含む間隔の長さの期待値は（t が大きいとき）$\frac{2}{\lambda}$ であり、平均間隔の 2 倍であることを示せ。

4 **Z の密度関数。** Z の確率密度関数を求め、$\lambda = 1$ と $\lambda = 5$ の場合についてその概形をかけ。

さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。指数分布とポアソン過程について。
- **Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models***（Academic Press）。指数分布、ポアソン過程、待ち行列。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty***（Pelican）。日常生活におけるランダムさと待ち時間。

詳しい解説付きの解答は第 12.18 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/memoryless.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com