12.17 バナッハのマッチ箱

ワークシート

問題

STEP II 1992、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q16

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　運転手が N 回目に手を伸ばしたときにトフィーがなくなっていることに気づくためには、N 回目はどちらの袋に手を伸ばしたのでなければならないか。それより前の $N-1$ 回には何が含まれていなければならないか。

段階 1　トフィーがなくなっていることに気づく

扱う内容：T の確率

考えてみよう　N 回目に手を伸ばしたときにトフィーがなくなっていることに気づくためには、その回は何を取ろうとしたのでなければならないか。それより前の $N-1$ 回には何が含まれていなければならないか。

手を止めて、やってみよう　それより前の各回は、何通りの順序で起こりうるか。先にミントが空であることに気づくことが決してないようにするには、

取り出したミントの個数にどのような条件が必要か。

段階 2 ミントがなくなっていることに気づく

扱う内容：M の確率

考えてみよう トフィーとミントの役割を入れ替えて、同じ議論を繰り返せ。

段階 3　条件付き確率（conditional probability）

扱う内容：答え

> **考えてみよう**　二つの「気づく」出来事が同じ回に両方起こることはない。N 回目に気づいたという条件のもとで、それがトフィーである確率はいくらか。

背後にある数学

バナッハのマッチ箱

バナッハの設定では、どちらの箱にも最初 n 本のマッチが入っており、どちらのポケットも等確率で選ばれる。初めて箱が空であることに気づいたとき、もう一方の箱に入っているマッチの本数を K とする。$K = k$ となるためには、空の箱からは n 本、もう一方の箱からは $n-k$ 本を任意の順序で取り、その後もう一度空の箱に手を伸ばさなければならない。また、空になるのはどちらの箱でもよい。よって

$$\mathrm{P}(K=k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

これらの確率は k について減少するが、例外として $\mathrm{P}(K=0) = \mathrm{P}(K=1)$ である（図 12.17.1）。残っている本数の期待値（expected value）はおよそ $2\sqrt{n/\pi} - 1$ であり、各箱に 50 本ずつ入っている場合はおよそ 7 本となる。$\sqrt{n}$ は、$2n$ 回の無作為な選択の後に二つの箱の間に生じる偏りの典型的な大きさであり、誕生日問題（Section 9.9）やランダムウォーク（random walk）に現れるのと同じ平方根の法則である。

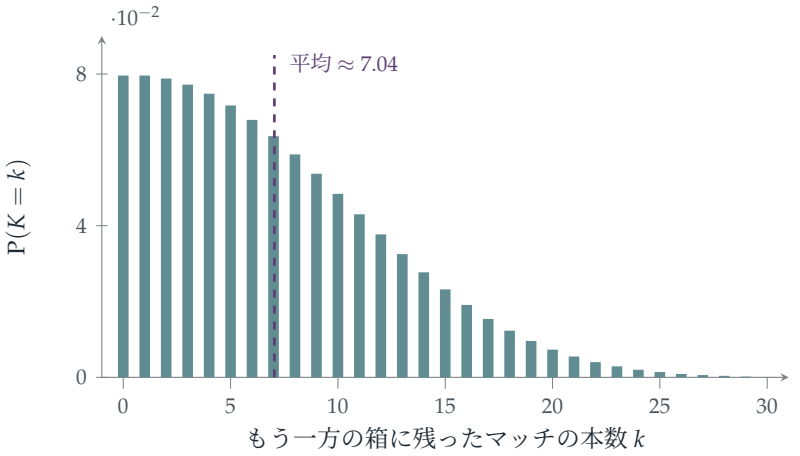

図 12.17.1　各箱に 50 本ずつマッチが入っている場合のバナッハのマッチ箱問題：一方の箱が空であることに初めて気づいたとき、もう一方の箱に残っている本数の分布。最も起こりやすい値は 0 と 1 で同率であるが、平均はおよそ 7 である。

負の二項分布

各回が確率 p で成功する独立な試行において、r 回目の成功を得るまでに必要な試行回数は**負の二項分布**（negative binomial distribution）$\mathrm{P}(N = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ に従う。タクシー運転手の問題は、二つの負の二項過程（トフィーとミント）の競争であり、どちらも袋のお菓子の個数より一つ多い「成功」を必要とする。負の二項分布は保険（請求件数）、生態学（群れをなす動物の個体数）、遺伝学などに現れ、ポアソン分布（Poisson distribution）より柔軟な代替としてしばしば用いられる。

バナッハとスコティッシュ・カフェ

関数解析（functional analysis）の創始者の一人であるステファン・バナッハは、ルヴフ（現在のリヴィウ）のスコティッシュ・カフェで数学の多くを行った。彼と同僚たちはウェイターが預かるノート、すなわち**スコティッシュ・ブック**（Scottish Book）に問題を書き込み、その懸賞はビール一杯から生きたガチョウまでさまざまであった。バナッハの師であるヒューゴ・シュタインハウスは、バナッハの喫煙癖を称えるスピーチのためにマッチ箱問題を考案した。この問題を初めて活字で解析したのは、ウィリアム・フェラー（William Feller）による 1950 年の名高い確率論の教科書である。

次の一歩

1 **小さな場合。** $n = m = 1$ かつ $p = \frac{1}{2}$ のとき、起こりうる列をすべて書き出し、N の分布を求めよ。

2 **バナッハの公式。** $n = 1$ と $n = 2$ に対して $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)} = 1$ が成り立つことを確かめよ。

3 **同率の最大値。**バナッハの問題において、すべての n に対して $\mathrm{P}(K = 0) = \mathrm{P}(K = 1)$ であることを示せ。

4 **先になくなるのはどちらか。** タクシー運転手の問題で、$n = m = 2$ かつ $p = \frac{2}{3}$ のとき、（時刻を問わず）最初に空であると気づかれる袋がトフィーである確率を求めよ。

さらに学ぶために

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）の第 VI 章。バナッハの問題を世に紹介した文献である。
- **R. Daniel Mauldin (ed.), *The Scottish Book***（Birkhäuser）。スコティッシュ・カフェの問題集で、解説付き。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。負の二項分布について。

詳しい解説付きの解答は第 12.17 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/matchboxes.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com