12.15 絶滅か爆発か

ワークシート

問題

STEP II 2003、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　ある段階で粒子が 2 個あるとき、次の段階の粒子の個数はどのような分布に従うか。

段階 1　2 個、そして 2 個

扱う内容：同時確率

? **考えてみよう**　$\mathrm{P}(X_1 = 2)$ はいくらか。粒子が 2 個あるとき、次の世代の個数の分布（distribution）はどうなるか。

段階 2 逆向きに推論する

扱う内容：条件付き確率

手を止めて、やってみよう X_1 の値で場合分けして $\mathrm{P}(X_2 = 2)$ を求めよ。次に条件付き確率（conditional probability）の定義を用い、得られた答えを $\frac{9}{25}$ に等しいとおけ。

段階 3 個体数の期待値

扱う内容：期待値と極限

考えてみよう ある世代に k 個の粒子があるとき、次の世代の個数の期待値（expectation）はいくらか。k について平均をとり、$\mathrm{E}(X_n)$ に関する漸化式（recurrence）を解け。

背後にある数学

絶滅確率

$p = \frac{3}{4}$ のとき、集団の大きさの期待値は限りなく増大する。では、集団は必ず存続するのだろうか。そうとは限らない。最初の粒子が子をもたなければ（確率 $q^2 = \frac{1}{16}$）、系統はただちに途絶える。最終的に絶滅する確率を e とする。最初の粒子は k 個の子をもち、それぞれの子の系統は独立に確率 e で途絶えるので、

$$e = q^2 + 2pq\,e + p^2 e^2 = (q + pe)^2 = \mathrm{G}(e),$$

となる。ここで $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$ は子の数の**確率母関数**（probability generating function）である。絶滅確率（extinction probability）は G の不動点であり、実際にはそのうち**最小の**非負のものである。$p = \frac{3}{4}$ のとき、$(1 + 3e)^2 = 16e$ から $9e^2 - 10e + 1 = 0$ となるので $e = \frac{1}{9}$ または 1 であり、絶滅確率は $\frac{1}{9}$ である。$p = \frac{1}{4}$ のとき、$[0, 1]$ にある不動点は $e = 1$ のみであり、絶滅は確実である（図 12.15.1）。

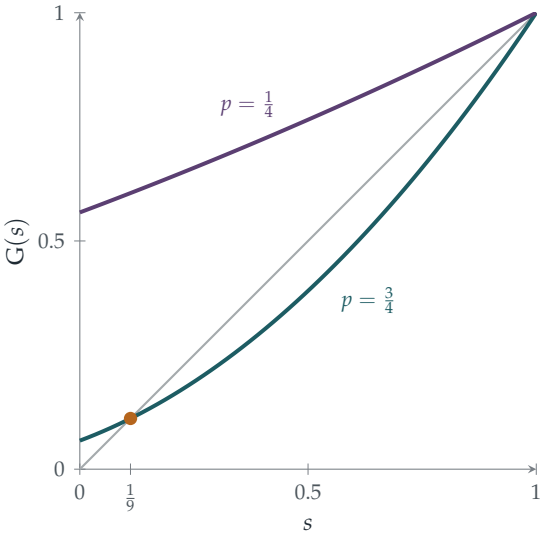

図 12.15.1　子の数の母関数 $G(s) = (q + ps)^2$ と直線 $y = s$。絶滅確率は両者が交わる最小の点である。$p = \frac{1}{4}$（紫、平均 $\frac{1}{2}$）のとき、それは $s = 1$ であり、絶滅は確実である。$p = \frac{3}{4}$（青緑、平均 $\frac{3}{2}$）のとき、それは $s = \frac{1}{9}$（琥珀色）であり、集団は確率 $\frac{8}{9}$ で永遠に存続する。

臨界値

一般に、分枝過程は子の数の平均が 1 より小さければ確実に絶滅する。平均がちょうど 1 の場合も、すべての個体がちょうど 1 個の子をもつという自明な場合（このときは系統が 1 個ずつ永遠に続くだけである）を除けば、確実に絶滅する。平均が 1 より大きければ、正の確率で存続する。子の数の平均は、疫学における**基本再生産数**（reproduction number）R にあたる。$R > 1$ の感染症は爆発的に広がりうるが、その場合でも初期の流行が偶然に収まることがあり、その確率はまさに上の不動点方程式で与えられる。原子核物理学では、各核分裂が平均してちょうど 1 回の核分裂を引き起こすとき、連鎖反応は**臨界**（critical）にあるという。原子炉の運転とは、この状態を保つ技術にほかならない。

ゴルトン、ワトソン、ビエネメ

ゴルトンの問いには、1874 年に Henry William Watson 牧師が答えたが、その答えは部分的に誤っていた。Watson は不動点方程式を見いだしたものの、2 つ目の解を見落とし、あらゆる家名はいずれ途絶えると結論したのである。実は正しい解析は、1845 年にフランスの統計学者ビエネメ（Irénée-Jules Bienaymé）によってすでに与えられていたが、その業績は 1970 年代まで忘れられていた。このモデルは現在**ゴルト**

ン–ワトソン過程（Galton–Watson process）（ビエネメ–ゴルトン–ワトソン過程とよばれることもある）とよばれ、確率過程のあらゆる講義で中心的な例となっている。

次の一歩

1 **一般の場合の絶滅確率。** 子の数の分布が $\mathrm{B}(2, p)$ のとき、絶滅確率は $p \le \frac{1}{2}$ ならば 1、$p > \frac{1}{2}$ ならば $\left(\frac{q}{p}\right)^2$ であることを示せ。

2 **分散。** 分散（variance）$\mathrm{Var}(X_n)$ が $\mathrm{Var}(X_n) = (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) + 2pq\,\mathrm{E}(X_{n-1})$ を満たすことを示し、$p = \frac{1}{2}$ のときの値を求めよ。

3 **第 n 世代までの絶滅。** $e_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$ とする。$e_n = \mathrm{G}(e_{n-1})$ を示し、$p = \frac{3}{4}$ のときの e_1、e_2、e_3 を計算せよ。これらは $\frac{1}{9}$ に近づくか。

4 **姓。** 男性がそれぞれ 0、1、2、3 人の息子をもつ確率がいずれも $\frac{1}{4}$ であるとき、その姓が最終的に途絶える確率はいくらか。

さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press）。分枝過程の節。
- **Adam Kucharski, *The Rules of Contagion***（Profile）。一般読者向けに、再生産数と感染の流行を解説している。
- **David Kendall,「Branching processes since 1873」**, *Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966)。ビエネメを含む歴史。

詳しい解説付きの解答は第 12.15 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/branching.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com