12.14 混合戦略

ワークシート

問題

STEP I 1989、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s1-q16

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　二人の言う数の各組について、B の獲得額の表を書いてみよ（B の数を縦に、A の数を横に並べる）。

段階 1　固定された予想に対して

扱う内容：小問 (i)

? **考えてみよう**　予想の各組に対する B の獲得額を表にまとめよ。A が常に同じ数を言うとき、B はどの成分を選ぶべきか。

段階 2 でたらめな予想に対して

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう A がそれぞれの数を確率（probability）$\frac{1}{3}$ で予想するとき、B が j と言った場合の B の期待利得（expected gain）はいくらか。表の行に沿って平均をとればよい。

段階 3　一般の場合

扱う内容：小問 (iii)

> **手を止めて、やってみよう**　B の獲得額の期待値（expected value）を A の予想ごとにまとめ、a_1, a_2, a_3 の係数（coefficient）を求めよ。三つの係数がすべて 0 となるように b_j を選べるか。三つの方程式が一次独立（linearly independent）であるかどうかを確かめよ。

背後にある数学

ミニマックス定理

利得行列（payoff matrix）M で与えられる二人**ゼロ和**（zero-sum）ゲームにおいて、B が確率 $\mathbf{b}$ を、A が確率 $\mathbf{a}$ を選ぶとき、B の期待利得は $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}$ である。フォン・ノイマンのミニマックス定理は

$$\max_{\mathbf{b}} \min_{\mathbf{a}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a} = \min_{\mathbf{a}} \max_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}.$$

が成り立つことを主張する。言葉で言えば、B がランダム化された戦略を前もって宣言することで保証できる額は、A が自分の戦略を宣言することで B を抑え込める額に等しい。この共通の値をゲームの**値**（value）という。ここでは交代性から値は 0 であり、戦略 $\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)$ は両プレイヤーにとって最適である。この定理は線形代数と凸性（convexity）を用いて証明される（線形計画法（linear programming）の双対定理（duality theorem）と同値である）。また、その多人数への一般化である**ナッシュ均衡**（Nash equilibrium）により、ジョン・ナッシュ（John Nash）はノーベル経済学賞を受賞した。

なぜランダムにするのか

ここでのランダム性は運の問題ではなく、情報の問題である。B の選択が予測できれば、A はそれにつけ込める。適切な確率でランダムに選ぶことで、B は自分の選択を予測不能にするとともに、どんな予測も役に立たないようにするのである。実例としては、サッカーのペナルティーキックがある。プロ選手の研究では、キッカーもゴールキーパーも左右をランダムに選んでおり、その比率はゲーム理論上の最適値に近いことがわかっている。テニスのサーブも同様の例である。

フォン・ノイマンの 1928 年の論文

ジョン・フォン・ノイマンは 1928 年、論文「On the theory of games of strategy」（戦略ゲームの理論について）においてミニマックス定理を証明した。動機となったのはポーカーであり、そこではブラフがランダム化の一形態となっている。1944 年、彼は経済学者オスカー・モルゲンシュテルン（Oskar Morgenstern）とともに *Theory of Games and Economic Behavior*（『ゲームの理論と経済行動』）を出版し、ゲーム理論を一つの学問分野として確立した。フォン・ノイマンは後年、ミニマックス定理こそが鍵となる結果であり、それなしには出版に値するゲーム理論は存在しえなかったと考えていた、と回想している。

次の一歩

1. **A の最適な応じ方。** B が $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ を用いるとき、A のどの戦略も期待利得 0 を与えることを示せ。また、B が代わりに $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ を用いるとき、A の最適な応じ方を求めよ。

2. **じゃんけん。** じゃんけんの利得行列を書き、最適戦略を求めよ。ここでは一様になるのに、問題ではそうならないのはなぜか。

3. **一意性。** 負けないことを保証する B の戦略は $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ただ一つであることを示せ。（ヒント：その戦略は X, Y, Z をすべて非負にしなければならない。$X + 2Y + Z = 0$ を用いよ。）

4. **修正されたゲーム。** 差が 2 のときの支払いが £2 ではなく £3 であるとき、最適戦略を求めよ。

さらに学ぶために

- **Ken Binmore, *Playing for Real*** (Oxford University Press)。ゲーム理論への、本格的で

ありながら親しみやすい入門書。

- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *The Art of Strategy*** (Norton)。スポーツやビジネスの例を用いたゲーム理論の本。
- **William Poundstone, *Prisoner's Dilemma*** (Anchor)。フォン・ノイマン、ゲーム理論、そして冷戦。

詳しい解説付きの解答は第 12.14 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/mixed-strategies.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com