12.13 三つ巴の決闘

ワークシート

問題

STEP II 1995、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　2 人の決闘で、パーシーが先に投げる。彼がすぐに命中させるか、あるいは 2 人とも外して状況がまったく同じに戻るかのどちらかである。パーシーが勝つ確率（probability）についての方程式を立てよ。

段階 1　一対一の決闘

扱う内容：二人による決闘（duel）

> **考えてみよう**　先に投げるのは Percy である。彼がすぐに命中させるか、両者とも外して最初の状態に戻るかのどちらかである。彼が勝つ確率（probability）についての方程式を立てて、それを解け。

段階 2 Algernon の三つの選択肢

扱う内容：小問 (i)、(ii)、(iii)

手を止めて、やってみよう それぞれの場合について、誰が残り、次に誰が投げるか。正しい人物を先攻として、決闘の公式を用いよ。場合 (iii) では、Bertie が Cuthbert に命中させるかどうかで場合分けせよ。

段階 3　助言

扱う内容：Algernon の最善の作戦

> ? **考えてみよう**　Algernon が選べるのは誰を狙うかであって、誰に当てるかではない。Cuthbert を狙った場合、外れる可能性も考慮すると、彼が勝つ確率は全体でいくらになるか。わざと外す場合と比べよ。

背後にある数学

戦略とゲーム理論

三者決闘は**ゲーム理論**の中心的な考え方を示している。すなわち、最善の行動は他のプレイヤーがどう応じるかに依存する。最も危険な相手であるカスバートに命中させるのは自然な手に見えるが、それはアルジャーノンに不利な形でゲームを変えてしまう。この問題ではバーティーとカスバートの戦略は固定されている（2 人は互いを狙う）。完全なゲーム理論的分析では、各プレイヤーは他のプレイヤーも同じように考えていることを承知のうえで、自分の戦略を選ぶことになる。このような分析は、1944 年のフォン・ノイマン（John von Neumann）とモルゲンシュテルン（Oskar Morgenstern）の研究、そして 1950 年のナッシュ（John Nash）の研究に始まり、今では経済学、進化生物学、政治学の基礎となっている。

弱点としての強さ

三者決闘に勝つのは誰か。アルジャーノンが最善の作戦をとるとき、勝つ確率はアルジャーノンが $\frac{226}{475}$、バーティーが $\frac{135}{475}$、カスバートが $\frac{114}{475}$ である。最も腕のよい投げ手は、選択権をもつ者全員から狙われるため、生き残る可能性が最も低い。同じパターンは、複数の候補者がいる選挙、企業間の競争、そして最強の競争者が最初の標的になりうる自然界にも現れる。1950 年代に三者決闘をゲーム理論に導入した Martin Shubik は、これを用いて「最も適した者が必ず生き残るのか」という問いを立てた。

次の一歩

1 **バーティーとカスバート。**アルジャーノンがわざと外すとき、バーティーが勝つ確率は $\frac{135}{475}$、カスバートが勝つ確率は $\frac{114}{475}$ であることを確かめよ。

2 **より腕のよい投げ手。**アルジャーノンが命中させる確率が $\frac{2}{5}$ ではなく a であるとき、わざと外すことが依然として最善の初手となるのは a がどのような値のときか。

3 **バーティーはカスバートを狙うべきか。**アルジャーノンがわざと外すとき、バーティーにとってアルジャーノンではなくカスバートを狙うほうが得策か。（カスバートの行動は変わらないものとする。）

4 **投げる回数が決まっている決闘。**各プレイヤーが 2 回しか投げられない決闘において、パーシーが勝つ確率を求め、回数に制限のない決闘と比較せよ。

さらに学ぶために

- **D. Marc Kilgour & Steven Brams, "The truel"**, *Mathematics Magazine* 70 (1997). 三者決闘についての読みやすい概説。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *Thinking Strategically*** (Norton). 一般読者向けのゲーム理論の本で、三者決闘も扱っている。
- **Ken Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). ゲーム理論の簡潔な入門書。

詳しい解説付きの解答は第 12.13 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/truel.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com