12.12 いつ探すのをやめるか

ワークシート

問題

STEP I 2001、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s1-q14

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　無作為な順序で面接するとき、全体で最良の候補者が最初の n 人の中にいる確率はいくらか。

段階 1　最初の n 人の中の最良者が全体の最良者である

扱う内容：小問 (i)

? **考えてみよう**　最初の n 人の中で最も優れた候補者（candidate）が全体で最も優れているのは、どのようなときか。全体の最良者は、どの位置にいることも同様に確からしい（equally likely）のではないか。

段階 2 最良または二番目

扱う内容：小問 (ii)、および $N = 4, n = 2$ の場合

> **手を止めて、やってみよう** 最初の n 人の中の最良者が全体で二番目に優れた候補者となるのは、二番目の候補者が最初の n 人の中にいて、かつ最良者がその中にいないときであり、またそのときに限る。その確率（probability）を求め、小問 (i) の結果に加えよ。$N = 4$ の場合は、上位二人の候補者がいる位置をすべて書き出してみよ。

段階 3　最適戦略

扱う内容：問題の先へ

考えてみよう　最初の r 人の候補者を見送り、その後、それまでの全員より優れた最初の候補者を選ぶ。最良者が位置 $k > r$ にいるとき、その候補者が選ばれるのはどのようなときか。小問 (i) で N の代わりに $k-1$ を用いよ。

背後にある数学

最適停止

秘書問題（secretary problem）は**最適停止**（optimal stopping）の原点となる例である。最適停止とは、時間とともに届く情報にもとづいて、期待される報酬を最大にするためにいつ行動を起こすかを決める問題である。最後の候補者から逆向きにたどる議論によって、（「r 人を見送り、その後それまでで最良の人を採る」という戦略に限らず）**あらゆる**戦略の中で、この種の閾値規則（threshold rule）が最適であることが証明できる。同じ数学が、株をいつ売るか、金融オプションをいつ行使するか、駐車スペースをどれだけ長く探すかといった問題を支配している。注目すべき特徴は、極限では答えが N によらないことである。候補者が百人でも百万人でも、成功確率は $\frac{1}{e}$ である。

変種

上位 2 人のどちらでも満足するなら、最良の戦略は約 57% の確率で成功する。最良の人を選ぶ確率ではなく、選んだ候補者の**順位**の期待値（expected rank）を最適にしたいなら、最適戦略はより複雑になり、順位の期待値は約 3.87 に近づく（Chow, Moriguti, Robbins and Samuels, 1964）。見送った候補者をある確率で呼び戻せる場合や、候補者の得点の分布がわかっている場合（「完全情報」問題）には、答えはまた変わる。演習にあるアイスクリームの問題は最も単純な場合であり、1 つだけ見送り、その後で最初に上回ったものを採る。

誰が解いたのか？

この問題は1950年代に数学者の間で広まり、1960年にマーティン・ガードナー（Martin Gardner）が「グーゴル・ゲーム」として広く紹介した（紙片に数を書く。相手はそれを1枚ずつ裏返し、最大の数で止まらなければならない）。Thomas Fergusonの論文 "Who solved the secretary problem?"（秘書問題を解いたのは誰か、1989年）は、その入り組んだ歴史をたどっている。一説によれば、天文学者ケプラー（Johannes Kepler）は1611年に再婚相手を選ぶにあたって11人の候補と面会し、結局5人目に求婚したという。

次の一歩

1. **アイスクリーム。** STEP II 2006、問13（step.maths.org/questions/06-s2-q13）に挑戦せよ。単純な規則による秘書問題の小型版である。最初の1つを見送り、その後それを上回る最初のものを採る。

2. **小さい N。** $N = 4$ のとき、最良の r の値と成功確率を求めよ。列挙して確かめよ。

3. **最良または2番目。** 小問 (ii) を用いて、「最初の n 人の中の最良が上位2人のいずれかである」ことは「最初の n 人の中の最良が全体の最良である」ことよりはるかに起こりやすいことを論ぜよ。このことは、上位2人のいずれかを得るための戦略について何を示唆するか。

4. **正確な最大値。** $N = 10$ のとき、図から $r = 3$ が最適であることを確かめよ。$N = 100$ のとき、$r = 37$ が最適であることを示せ（小数第4位までで、$r = 36, 37, 38$ に対する成功確率は 0.3710, 0.3710, 0.3708 である）。

さらに学ぶために

- **Thomas Ferguson, "Who solved the secretary problem?"**, *Statistical Science* 4 (1989). 歴史と変種。オンラインで無料で読める。
- **Brian Christian & Tom Griffiths, *Algorithms to Live By*** (William Collins). 最適停止をはじめとするアルゴリズムを日常の意思決定に応用する。
- **Martin Gardner, *New Mathematical Diversions*** (Mathematical Association of America). グーゴル・ゲームを収録。

詳しい解説付きの解答は第 12.12 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/secretary.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com