12.11 切手、カップ、そして e

ワークシート

問題

STEP I 1996、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s1-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$N = 4$ となるには何が起こらなければならないか。その確率はいくらか。

段階 1　分布

扱う内容：N の分布（distribution）

? **考えてみよう**　$N = k$ となるのは、Jim がカップ $2, 3, \ldots, k-1$ 個のときにはすべて正しく当て、カップ k 個のときに外す場合である。それぞれの確率（probability）を掛け合わせよ。

段階 2 期待値

扱う内容：期待値（expectation）

> **手を止めて、やってみよう** $k \cdot \frac{k-1}{k!}$ を簡単にせよ。どの有名な級数（series）が現れるか？

段階 3　分散

扱う内容：分散（variance）

> **考えてみよう**　$k^2 = k(k-1) + k$ と書き直して $\mathrm{E}(N^2)$ を求めよ。あるいは、先に $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$ を求めてもよい。

背後にある数学

姿を変えた同じ分布

乱数 $U_1, U_2, \ldots$ を $[0,1]$ から一様に（uniformly）選び、それらの和が 1 を超えるのに必要な個数を M とする。最初の k 個の数の和が 1 未満となる確率は、領域 $\{u_1 + \cdots + u_k < 1, u_i \geq 0\}$ の体積に等しく、それは $\frac{1}{k!}$ である（面積 $\frac{1}{2}$ の三角形、体積 $\frac{1}{6}$ の四面体、以下同様）。したがって

$$\mathrm{P}(M > k) = \frac{1}{k!}, \qquad \mathrm{P}(M = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!},$$

となり、これは N の分布とまったく同じである。どちらの問題でも $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$ が成り立つ。カップの問題では、これは $k-1$ 回続けて正しく当てる確率である。$\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$（Section 9.9 の公式）を用いれば、1 行で $\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = e$ が得られる。

なぜ e は繰り返し現れるのか

確率に $\frac{1}{k!}$ が含まれるときはいつでも、それが k 個のものが特定の順序に並ぶことから来るのであれ、確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ の k 個の事象が続けて起こることから来るのであれ、単体（simplex）の体積から来るのであれ、k についての和は指数級数を生み出す。完全順列（derangements、Section 9.8）では $\sum \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$ が得られた。ここでは $\sum \frac{1}{k!} = e$ である。そして、起こりにくい独立な事象が多数あることから生じる $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ という形の極限が、秘書問題やポアソン分布に e が現れる理由を説明している。

モンテカルロ法による e

「和が 1 を超える」問題を使えば、実験によって e を推定することができる。乱数を生成し、1 を超えるのに何個必要かを数え、これを何度も繰り返して平均をとればよい。これは π を推定するビュフォンの針（Buffon's needle、Section 12.20）の親戚である。このような**モンテカルロ法**（Monte Carlo methods）は、カジノの名にちなんで名付けられたもので、直接計算するのが難しい量を無作為抽出によって推定する。現在では素粒子物理学から金融に至るまで科学のあらゆる分野で使われており、その多くは多次元の積分の計算に用いられている。

次の一歩

1 **母関数。** $\mathrm{E}(t^N) = 1 + (t-1)e^t$ を示し、それを用いて $\mathrm{E}(N)$ と $\mathrm{E}(N(N-1))$ を求めよ。

2 **裾の公式。** 非負整数値をとる確率変数（random variable）について $\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$ が成り立つことを証明し、それを用いて 1 行で $\mathrm{E}(N)$ を求めよ。

3 **カップ 1 個から始める。** ゲームがカップ 1 個（ジムが外すことはありえない）から始まるとすると、分布はどう変わるか。価格の期待値はいくらか。

4 **単体。** $\{u_1 + u_2 + u_3 < 1, u_i \geq 0\}$ の体積が $\frac{1}{6}$ であることを示し、数学的帰納法（induction）を用いて k 次元の場合の体積が $\frac{1}{k!}$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。e の歴史を、確率における登場例も含めて解説している。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。母関数について。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。モンテカルロ・シミュレーションによって解かれる確率パズル集。

詳しい解説付きの解答は第 12.11 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/stamps-and-e.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com