12.10 ひもの端を結ぶ

ワークシート

問題

STEP III 2008、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　2 つの端を結んだあと、紐は何本残っているか（輪になったものはもう「紐」としては数えない）。それは輪ができたかどうかに依存するだろうか。

段階 1　最初の結び目

扱う内容：最初の段階

> **考えてみよう**　端は $2n$ 個ある。そのうち 1 つを選ぶ。残りの端のうち、それと結んだときに輪ができるものはいくつあるか？

段階 2 すべての結び目

扱う内容：輪の個数の期待値（expectation）

手を止めて、やってみよう 結び目を 1 つ作ると、輪ができてもできなくても、両端をもつひもは何本残るか？　それでは、ひもが k 本残っているときに作る結び目で輪ができる確率（probability）はいくらか？　期待値を足し合わせよ。

段階 3 分散

扱う内容：分散（variance）

考えてみよう ある結び目で輪ができる確率は、それより前の結び目で起きたことに依存するか？　依存しないならば、分散について何がいえるか？

段階 4　4 万本のひも

扱う内容：$n = 40\,000$ の場合

> **考えてみよう**　$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ を、$2n$ までのすべての逆数（reciprocal）の和から偶数の逆数の和を引いたものとして表せ。$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \approx \ln m$ を用いよ。

背後にある数学

対数的な増加

輪の個数の期待値は $\frac{1}{2}\ln n$ のように増加し、分散は平均に近い（どちらも小さな確率の和である）。中心極限定理（central limit theorem）（Section 12.24）により、n が大きいとき輪の個数は近似的に正規分布（normal distribution）に従い、平均と分散はいずれも約 $\frac{1}{2}\ln(4n)$ である。紐が 40 000 本あるとき、輪はたいてい 2 個から 11 個の間になる。

ランダムな置換の巡回

同じ対数は、n 個のものの無作為な置換（permutation）の巡回（cycle）の個数にも現れる。その平均は $H_n \approx \ln n$ である（紐の問題はこれの近い親戚であり、そちらは $\frac{1}{2}\ln n$ となる）。ランダムな置換の巡回は少ない。たいてい 1 つの巨大な巡回が要素の大部分を含み、最大の巡回に含まれる要素の割合の平均は約 0.62 である。これがゴロム–ディックマン定数（Golomb–Dickman constant）である。紐を無作為に結んでいく場合も同様にふるまい、紐の大部分は 1 つか 2 つの長い輪に入る。これらの事実は**ランダムな組合せ構造**（random combinatorial structures）の研究の一部であり、整数論とも関係がある（無作為に選んだ整数の素因数は、ランダムな置換の巡回のようにふるまう）。

ランダムな結び目と高分子

紐を結ぶこの問題は、物理系の簡単なモデルになっている。溶液中の長い高分子（polymer）は端どうしでつながって輪や鎖を作り、輪の形成の統計は似た規則に従う。結び目理論（knot theory）では、数学者はもっと難しい問い、すなわち無作為な閉じた輪が結ばれている（自明でない結び目になっている）確率はどれくらいか、という問いを考える。長いランダムな輪については、その答えは 1 に近づく。これは 1988 年に De Witt Sumners と Stuart Whittington によって証明された結果である。

次の一歩

1. **小さな場合。** $n = 2$ のとき、起こりうる場合をすべて書き出し、輪の個数の期待値が $\frac{4}{3}$ であることを確かめよ。

2. **1 つの大きな輪。**過程が、すべての紐を含む 1 つの輪で終わる確率は $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$ であり、n が大きいときこれは近似的に $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ であることを示せ。（**ヒント：**この積を $\binom{2n}{n}$ と関連づけよ。）

3. **置換の巡回。** 置換を 1 要素ずつ組み立てていくこと（「中華料理店」構成（Chinese restaurant construction））により、n 個のものの無作為な置換の巡回の個数の期待値が H_n であることを示せ。

4. **分散。** $\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$ であること、および引かれている和が $\frac{\pi^2}{8}$ に収束することを示せ。

さらに学ぶために

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters）。紐を結ぶパズルが収録されている。
- **Richard Arratia, Andrew Barbour & Simon Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures***（European Mathematical Society）。巡回、素数、ランダムな構造について。もう少し先で読むとよい。
- **Colin Adams, *The Knot Book***（American Mathematical Society）。結び目理論の入門書で、ランダムな結び目も扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 12.10 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/loose-ends.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com