12.1 正確な条件付け

ワークシート

問題

STEP I 2007、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s1-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　11 枚の円盤から 4 枚を取り出す。事象「4 枚すべてに番号がある」にとって、取り出す順序は関係するだろうか。同様に確からしい 4 枚の組は何通りあるだろうか。

段階 1　条件なし

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　同様に確からしい (equally likely) $\binom{11}{4}$ 通りの 4 枚の円盤 (disc) の組のうち、すべてに番号が書かれているものはいくつあるか。

段階 2　3 が最初に出る

扱う内容：小問 (ii) と (iii)

手を止めて、やってみよう　3 と書かれた円盤が最初に取り出されたとすると、残りの 3 枚は、残った 10 枚から無作為に選ばれた 3 枚の組である。その 10 枚のうち、番号が書かれているものは何枚あるか。求めたい組の個数を数えよ。

段階 3　3 が（どこかの時点で）取り出される

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう　3 がいつ取り出されたかは関係があるだろうか。3 が 4 枚の中に含まれているとき、残りの 3 枚について何が言えるか。

段階 4　番号付きの円盤が最初に出る

扱う内容：小問 (v)

考えてみよう　最初の円盤に番号が書かれているとき、それがどの番号であっても、残りの 3 枚はどのようなものか。

段階 5 番号付きの円盤が取り出される

扱う内容：小問 (vi)

> **手を止めて、やってみよう** この条件は性質が異なる。どの円盤に番号が書かれているかは教えてくれないのである。番号付きの円盤を少なくとも 1 枚含む 4 枚の組と、ちょうど 2 枚含む組をそれぞれ数えよ。

背後にある数学

男の子か女の子かのパズル

マーティン・ガードナー（Martin Gardner）は 1959 年に次の問題を出した。スミス氏には子どもが二人いて、少なくとも一人は男の子である。二人とも男の子である確率はいくらか。同様に確からしい家族構成 BB、BG、GB、GG を列挙し、GG を除くと三つが残り、そのうち一つが BB であるから、答えは $\frac{1}{3}$ である。しかし、上の子が男の子であるとわかっている場合には、答えは $\frac{1}{2}$ になる。これはまさに、この問題の小問 (vi) と (v) の縮小版である。ガードナーは後に、最初に出した形の問題はあいまいであったと認めた。答えは、男の子がいることをどのようにして知ったかによるのである。子どもの一人に無作為に出会い、その子が男の子だった場合、答えは $\frac{1}{2}$ である。「息子さんが少なくとも一人いますか」と尋ねて「はい」と答えられた場合、答えは $\frac{1}{3}$ である。確率は情報だけでなく、その情報を生み出した過程にも依存するのである。

モンティ・ホール問題

同じ教訓が、確率論で最も激しく論争されてきたパズル、モンティ・ホール問題（Monty Hall problem）の根底にもある。あるゲーム番組で、三つの扉のうち一つの後ろに車がある。あなたは扉 1 を選ぶ。車の位置を知っている司会者は、必ず残り二つの扉のうち一つを開けてヤギを見せ、必ず選択を変える機会を与える。車があなたの

扉の後ろにあって司会者に選択の余地がある場合には、司会者は残り二つの扉から無作為に選ぶ。司会者は扉 3 を開け、扉 2 に変えてもよいと言う。変えるべきだろうか。答えは「変えるべき」である。変えれば確率 $\frac{2}{3}$ で勝つ。司会者の扉の選び方は無作為ではない。車の位置に依存しており、それが情報をもたらすのである。正確なルールが重要である。司会者が可能な限りいつも扉 3 を開けるのであれば、扉 3 が開いたのを見たとき扉 1 と扉 2 は同様に確からしくなり、変えて勝つ確率は $\frac{1}{2}$ にすぎない。それでも、あらかじめ必ず変えると決めている参加者は、やはり $\frac{2}{3}$ の割合で勝つ。変えて勝つのは、最初の選択が外れていたときにちょうど一致するからである。マリリン・ボス・サバント（Marilyn vos Savant）が 1990 年に雑誌のコラムでこの答えを示したとき、彼女のもとには、間違っていると指摘する手紙が何千通も届き、その中には数学者からのものもあった。コンピュータによるシミュレーションか、同様に確からしい場合を注意深く列挙すれば、決着がつく。

ベイズとラプラス

条件付き確率（conditional probability）は、トマス・ベイズ（Thomas Bayes）と、ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）によって体系的な基礎の上に置かれた。ベイズの論文は彼の死後の 1763 年に出版され、ラプラスは 1774 年に、今日ベイズの定理（Bayes' theorem）と呼ばれる法則を一般的な形で述べた。今日あらゆる大学の講義の出発点となっている、アンドレイ・コルモゴロフ（Andrey Kolmogorov）の 1933 年の公理（axioms）は $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$ と定義し、確率論の残りの部分はこの定義の上に築かれている。次の節 Section 12.2 では、ベイズの定理が実際に何をするかを示す。

次の一歩

1. **一般化する。** 無地の円盤が b 枚、番号つきの円盤が n 枚あり、k 枚を取り出すとき、(iv) と (v) の答えが常に等しいことを示せ。また、(vi) がそれらと等しくなるのはどのようなときかを求めよ。

2. **火曜日生まれの男の子。** ある家庭に子どもが二人いて、少なくとも一人は火曜日生まれの男の子である。二人とも男の子である確率が $\frac{13}{27}$ であることを示せ。（14×14 通りの同様に確からしい場合を列挙するか、うまく数えよ。）

3. **モンティ・ホール問題。** 結果を列挙して $\frac{2}{3}$ を確かめよ。司会者が車の位置を知らず、残りの扉のうち一つを無作為に開け、たまたまヤギが現れた場合はどうなるか。

4 **2 枚のエース。** 13 枚からなるブリッジの手札に、少なくとも 1 枚のエースが含まれている。少なくとも 2 枚含まれている確率はいくらか。スペードのエースが含まれているという条件のもとでの確率と比較せよ。

さらに学ぶために

- **Jason Rosenhouse, *The Monty Hall Problem*** (Oxford University Press)。このパズル、その歴史、そして数多くの変種を扱う。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press)。条件付き確率の章。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press；オンラインで無料公開)。条件付けについての解説が優れており、多くのパラドックスを扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 12.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/conditioning.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com