11.9 安全放物線

ワークシート

問題

STEP II 2014、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　x と y を t で表し、t を消去せよ。$\sec^2\theta$ を $\lambda = \tan\theta$ を用いてどう表せるか。

段階 1　x を固定し、角度を動かす

扱う内容：与えられた x の真上での最大の高さ Y

手を止めて、やってみよう　$x > 0$ を固定し、y を λ のみの関数とみなす。これはどのような種類の関数か。その最大値（greatest value）を求めよ。（あるいは、λ についての二次方程式（quadratic）が実数解（real root）をもつのはどのようなときか。）

段階 2 領域

扱う内容：グラフと到達可能な領域（reachable region）

考えてみよう 曲線 Y の概形を描け。頂点（vertex）はどこにあり、地面とはどこで交わるか。どの点に到達できるか。曲線より下にある点を通る軌道（trajectory）は何本あるか。また、曲線上の点を通る軌道は何本あるか。

段階 3　最も遠い点

扱う内容：O からの最大の距離

> **考えてみよう**　最も遠い点は境界（boundary）上にある。$x^2 + Y^2$ を $X = x^2$ の関数として表せ。それは増加関数（increasing）か、減少関数（decreasing）か。境界上のどこで最大となるか。

背後にある数学

包絡線

1 パラメータの曲線族 $\mathrm{F}(x, y, \lambda) = 0$ は、しばしば**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線をもつ。包絡線は $\mathrm{F} = 0$ と $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda} = 0$ を連立させて解くことで求められ、これはまさに y を λ について最大化することで行ったことである。包絡線は科学のいたるところに現れる。コーヒーカップの表面に見える明るい光の曲線は反射光線の包絡線であり、**火線**（caustic）とよばれる。超音速機のソニックブームは、機体が発する音波の包絡線である**マッハ円錐**（Mach cone）によって運ばれる。そして Section 8.1 では、微分方程式の解の族の包絡線がそれ自体解、すなわち「特異」な解であった。

焦点

安全放物線には注目すべき性質がある。その焦点（focus）は発射点 O なのである。（放物線 $y = c - \frac{x^2}{4c}$ の焦点は原点であり、ここでは $c = \frac{u^2}{2g}$ である。）各軌道もまた放物線であり、すべての軌道の焦点は O を中心とする半径 $\frac{u^2}{2g}$ の円周上にある。これにはエネルギーによる説明がある。高さ y における物体の速さは $\sqrt{u^2 - 2gy}$ であり、これは準線（directrix）の高さ $\frac{u^2}{2g}$ でゼロになる。そして、準線が同じ直線であり、かつ O を通る放物線の焦点は、その円周上にあるのである。

トリチェリの放物線

ガリレオ（Galileo）は 1609 年ごろ、投げられた物体が放物線を描いて運動すること、そして水平な地面での最大到達距離は 45° で得られることを示した。彼の弟子で、気圧計の発明者としてよく知られるエヴァンジェリスタ・トリチェリ（Evangelista Torricelli）は、1644 年に著書 *De motu gravium* において安全放物線を発見した。砲手にとって、これは「そもそもどの標的が射程内にあるのか」という実際的な問いに答えるものであった。トリチェリはまた、与えられた点を通る軌道は対になって現れ、その角度はその点の方向と鉛直方向に関して対称であること、すなわちこの問題における高い弾道と低い弾道であることも示した。

次の一歩

1 **爆発する花火。** STEP II 2023、問 10（OCR が配布している 2023 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip）に挑戦せよ。この問題では、爆発で飛び散る粒子を、中心が自由落下する球面とみなし、安全放物面（paraboloid of safety）に沿って動く粒子を求める。

2 **斜面に向かって撃つ。** 角度 β で傾いた斜面に沿って上向きに、速さ u で物体を投げるときの最大到達距離を求めよ。（**ヒント：**直線 $y = x\tan\beta$ は安全放物線とどこで交わるか。）最適な角度は、斜面と鉛直方向のなす角を二等分することを示せ。

3 **二つの角度。** 点 P に到達する二つの角度は、OP と鉛直方向のなす角の二等分線に関して対称であることを示せ。

4 **焦点。** 角度 θ の軌道の焦点が $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$ であることを示し、これより焦点が O を中心とする円周上にあることを示せ。

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press、古典力学入門）の第 3 章。軌道の包絡線について論じている。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, “On caustics of plane curves”,** *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。幾何学における包絡線と火線について。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press、曲線の本）。包絡線、火線、そして多くの古典的な曲線を、その作図法とともに扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 11.9 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/safety-parabola.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com