# 11.8 傾いたつり合い

## ワークシート

### 問題

**STEP III 2025、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

**考えてみよう**　立体がテーブルの上に静止しており、曲面上のただ一点 $X$ でテーブルに接している。立体にはたらく力は、重力（重心 $G$ に作用する）と $X$ における抗力（reaction）である。これらが釣り合うのはどのようなときか。

### 段階 1 重心

扱う内容：小問 (i)

**考えてみよう** 立体を、半径 $x$、厚さ $\delta x$、高さ $y$ の薄い円筒殻（cylindrical shell）に分割せよ。1 つの円筒殻の体積はいくらか。また、その重心（centre of mass）の高さはいくらか。

**考えてみよう** 積分して体積と底面に関するモーメント（moment）を求め、割り算せよ。

### 段階 2　法線が軸と交わる点

扱う内容：小問 (ii)

**考えてみよう**　$x = rp$ における曲線の傾きを求め、そこから法線（normal）の傾きを求めよ。法線を $y$ 軸までたどると、$y$ はどれだけ変化するか。

**手を止めて、やってみよう**　$n = 4$ のとき、求めた $Y$ を $p$ で微分して最大値を求めよ。$p \to 0$ のときと $p = 1$ のときにはどうなるか。

### 段階 3 こま

扱う内容：小問 (iii)、重心

**考えてみよう** この立体は小問 (i) の立体 2 つからなり、そのうち一方は上下逆さまになっている。求めた体積と重心を用いて $G$ を求めよ。

### 段階 4　つり合いの位置を数える

扱う内容：小問 (iii)、傾いたつり合い

> **手を止めて、やってみよう**　立体がある 1 点で接して静止できるのは、ちょうどその点における法線が $G$ を通るときである。表面の各部分において、法線が $G$ の高さで軸と交わる点はいくつあるか。小問 (ii) の答えを用いよ。

## 背後にある数学

### 臨界点としての平衡

立体が点 $X$ で静止しているとき、テーブルから測った $G$ の高さは、$G$ から $X$ における接平面までの距離である。凸な物体では、$GX$ が法線に沿っているとき、これは $|GX|$ に等しい。一般に、平衡とは $G$ から表面までの距離の**臨界点**（critical point）である。$|GX|$ が停留する（stationary）点 $X$ とは、ちょうど法線が $G$ を通る点のことである。安定な平衡はこの距離の極小（local minimum）（$G$ ができるだけ低い）であり、不安定な平衡は極大（local maximum）または鞍点（saddle point）である。

断面に沿って $A$ から $B$ まで回っていくと、$G$ からの距離は次のように変わる。$A$ では大きく（極大：尖った先端で釣り合っており、不安定）、底部の傾いた点では小さく（極小、安定）、縁では大きく、ドームの下側の傾いた点では小さく（安定）、上側の傾いた点では大きく（不安定）、$B$ では小さい（安定：ドームの頂上で静止する）。図が示すように、極小と極大は交互に現れなければならない。（実は、この問題では数えていない平衡がもう 1 つある。立体は、表面がただ 1 つの法線をもたない鋭い縁の上で、不安定ながら釣り合うことができる。）

### ゴムボツ

凸な物体の平衡はどこまで少なくできるだろうか。どんな物体にも、少なくとも 1 つの安定な位置と 1 つの不安定な位置がある。すなわち、表面上で $G$ に最も近い点と最も遠い点である。一様な密度をもつ 2 次元の凸図形は、常に少なくとも 4 つの平衡をもつ（距離の極小 2 つと極大 2 つが交互に並ぶ）。1995 年、ウラジーミル・アーノルド（Vladimir Arnold）は、一様な密度をもつ 3 次元の凸な物体で、平衡がちょうど 2 つ、つまり安定なもの 1 つと不安定なもの 1 つだけであるものが存在するかを問うた。2006 年、Gábor Domokos と Péter Várkonyi がそのような物体を構成した。それが**ゴムボツ**である。どんな向きで置いても、転がったり揺れたりして、ただ 1 つの安定な位置に落ち着く。Domokos はのちに、ある種のカメの甲羅がこの形に近く、ひっくり返されたときに起き上がるのに役立っていることに気づいた。

#### アルキメデスと浮体

物体の安定性の研究はアルキメデス（Archimedes）にさかのぼる。彼は *On Floating Bodies*（『浮体について』）において、浮かんでいる放物面（船体のモデル）が正立して安定なのはどのようなときで、転覆するのはどのようなときかを、その形と密度によって解析した。幾何学だけで導かれた彼の答えには、ここで用いたのとまさに同じ種類の重心と法線の計算が含まれている。造船技師は今も、**メタセンター**（metacentre）という形で彼の考えを用いている。浮心（centre of buoyancy）を通る鉛直線が船の軸と交わる点が重心より上にあれば、船は安定である。

## 次の一歩

1. **起き上がりこぼし。** STEP II 1996、問 9（step.maths.org/questions/96-s2-q9）に挑戦しよう。半球の上に円錐をのせたものが自ら起き上がるのはどのようなときか。（**ヒント：** $G$ は半球の中心に対してどこになければならないか。）

2. **球。** 一様な中実球では、すべての法線が中心を通る。このことは、その平衡について何を意味するか。球の重心が中心からわずかにずれている場合はどうか。

3. **楕円。** 自身を含む平面内で直線上を転がる楕円板は、ちょうど 4 つの平衡をもつことを示し、そのうちどれが安定かを特定せよ。

4. **2 つの放物面。** 小問 (iii) のドームを放物面 $ry = r^2 - x^2$ に置き換え、立体が $x$ 軸に関して対称になるようにする。$G$ が原点にあることを示し、傾いた平衡を求め、それらが等しい傾きの対になって現れる理由を説明せよ。

## さらに学ぶために

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, “Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem”**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。ゴムボツの論文である。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。平衡と安定性について。
- **Chris Rorres, “Completing Book II of Archimedes’s *On Floating Bodies*”**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。アルキメデスの安定性解析を、現代的な図とともに解説している。

詳しい解説付きの解答は第 11.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/tilted-equilibria.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com