11.7 棒の中のシンプソンの公式

ワークシート

問題

STEP II 1989、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s2-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　2 つの系が、同じ質量、同じ重心をもち、重心を通るすべての軸のまわりで同じ慣性モーメントをもつとする。このとき、平行軸の定理によって、それ以外のすべての軸のまわりでも慣性モーメントが等しくなるのはなぜか。

段階 1　棒

扱う内容：一様な棒

考えてみよう　両端に質量 p を、中点に質量 q を置く。全質量と、中心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）が一致するようにせよ。

手を止めて、やってみよう　次に、中心を通るほかのすべての軸について確かめよ。棒に沿って中心から距離 r の位置にある点は、棒と角 ψ をなす軸か

ら距離 $r\sin\psi$ のところにある。このことは、両者の慣性モーメントにどのような影響を与えるか。

段階 2 長方形

扱う内容：長方形の薄板（lamina）

手を止めて、やってみよう 薄板を、一辺に平行な細い帯に切り分けよ。各帯を、それに対応する 3 個の質点（particle）で置き換える。各直線上に並ぶ質点を合わせると何になるか。次に、それらの一つ一つを同じ方法で 3 個の質点に置き換えよ。

段階 3　対角線のまわりの正方形

扱う内容：対角線を軸とする正方形

考えてみよう　9 個の質点のうち、対角線上にあるのはどれか。それ以外の質点は、対角線からどれだけ離れているか。

段階 4 一様でない棒

扱う内容：一様でない棒

考えてみよう 両端と中点に質量を置く。棒の全質量と、一端に関する 1 次モーメント（first moment）および 2 次モーメント（second moment）を求めよ。これら 3 つをすべて一致させ、方程式を解け。

背後にある数学

シンプソンの公式

質量分布のモーメントを一致させることは、数値積分の公式を設計することと同じ問題である。$f = 1, x, x^2$ に対して厳密に成り立つ公式 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ は

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -a w_0 + a w_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3} a^3,$$

を満たさなければならない。これはまさに棒についての条件である（$f = 1, x, x^2$ がそれぞれ質量、1 次モーメント、慣性モーメントの役割を果たす）。解は $w = 2a(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6})$、すなわちシンプソンの公式である。対称性からおまけが得られる。$f = x^3$ に対しても両辺が 0 になるので公式は厳密に成り立ち、したがってシンプソンの公式は 3 次関数を厳密に積分し、滑らかな関数に対する誤差は 4 階導関数に比例する。こうして棒は、3 つの質点と質量、重心、慣性モーメントだけでなく、3 次モーメントでも一致するのである。

ガウス求積と慣性テンソル

質量だけでなく位置も自由に選べるならば、質点は 2 つで足りる。$\pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ の各点に質量の半分ずつを置けばよい。確かめると $2 \cdot \frac{1}{2} m \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3} m a^2$ である。これは 2 点の**ガウス・ルジャンドル公式**（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\bigl(f(-\frac{a}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a}{\sqrt{3}})\bigr)$ であり、

これも 3 次関数に対して厳密である。カール・フリードリヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss）は 1814 年に、巧みに配置した n 個の点によって $2n-1$ 次の多項式を厳密に積分できることを示した。ガウス求積（Gaussian quadrature）は現在、数値解析の標準的な手法である。

力学では、物体の重心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントは、対称な 3×3 行列である**慣性テンソル**（inertia tensor）に集約される。質量、重心、慣性テンソルが等しい 2 つの物体は、あらゆる力に対してまったく同じように応答する。このため技術者は、シミュレーションにおいて複雑な部品をいくつかの質点で置き換えることができる。慣性テンソルの固有ベクトル（eigenvectors）は**主軸**（principal axes）であり、物体が定常的に回転できる軸である。

次の一歩

1. **シンプソンの公式。** 区間を 1 つだけとったシンプソンの公式を用いて $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ を見積もり、$\frac{\pi}{4}$ と比較せよ。この公式が $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ と $\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$ に対しては厳密であるが、$\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x$ に対してはそうでないことを確かめよ。

2. **すべての軸が同じ。** 正方形の薄板の、中心を通りその平面内にある任意の軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{1}{3}Ma^2$ であることを示せ。（**ヒント：** 9 つの等価な質点は 90° の回転に関して対称である。このことから、$\cos\psi$ と $\sin\psi$ の 2 次式について何がいえるか。）

3. **三角形。** 質量 M の一様な三角形の薄板が、各辺の中点に置いた質量 $\frac{1}{3}M$ の 3 つの質点と力学的に等価であることを示せ。

4. **立方体。** 一様な中身の詰まった立方体について、27 個の質点からなる力学的に等価な系を求め、それを用いて一辺 $2a$ の立方体の、1 つの辺のまわりの慣性モーメントを求めよ。

さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。剛体と慣性モーメントの章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。シンプソンの公式とガウス求積を含む、数値積分の章。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。古典的な参考書。

詳しい解説付きの解答は第 11.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/simpsons-rod.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com