11.6 バックスピン

ワークシート

問題

STEP III 1997、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　ビー玉は速さ v で前進し、角速度 ω で後ろ向きに回転している。ビー玉の最下点は台の上をどれだけの速さで動いているか。摩擦はどちら向きにはたらくか。

段階 1 摩擦のはたらき

扱う内容：両方の小問に共通する設定

考えてみよう ビー玉の最下点は、テーブルに対してどれだけの速さで、どちら向きに滑っているか。それならば、摩擦（friction）はどちら向きにはたらくか。

手を止めて、やってみよう 摩擦力を F とおく。$I = \frac{2}{5}ma^2$ として、$m\dot{v}$ と $I\dot{\omega}$ をそれぞれ F を用いて表せ。摩擦によってバックスピン（backspin）は増えるか、それとも減るか。

段階 2　その場で止まる

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　完全に静止するためには、v と ω が同時に 0 にならなければならない。それぞれが 0 になるのはいつか。

段階 3 戻ってくる

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう バックスピンがより大きい場合、v が 0 になった時点でビー玉はまだ回転しているので、摩擦ははたらき続ける。滑りが止まるのは $v + a\omega = 0$ となるときである。それはいつで、そのときの v はいくらか。その後、ビー玉は一定の速さで転がる（rolling）。

背後にある数学

保存量

最終的な速さを求めるもっと手早い方法がある。台との接触点のまわりのビー玉の角運動量（angular momentum）を考えよう。摩擦はまさにその点ではたらくので、その点のまわりのモーメントをもたない。また、垂直抗力と重力はどちらもその点を通る鉛直線に沿ってはたらく。したがって、ビー玉がすべっている間、この角運動量は保存される。その値は mva（中心の運動による分）から $I\omega$（逆回転は負に数える）を引いたものである：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

速さ V で転がっているときは $a\omega = -V$ であるから、角運動量は $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$ となる。これを初期値と等しいとおくと

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

となり、摩擦力の大きさにも、さらには摩擦力が一定かどうかにも触れることなく、同じ答えが得られる。最終的な速さは保存則だけで決まり、摩擦が決めるのはそこに到達するまでにかかる時間だけである。

スヌーカー、ボウリング、テニス

同じ分析で多くのスポーツが説明できる。中心を突かれたスヌーカーの球は、最初はすべり、やがて転がり始め、最終的に初速の $\frac{5}{7}$ の速さになる（公式で $\omega_0 = 0$ とおけばよい）。横回転（sidespin）をかけて投げたテンピンボウリングの球は、レーン上をすべりながら進み、転がり始めたところで「フック」する。順回転（topspin）をかけて打ったテニスボールは急激に沈むが、この場合の主な効果は空気力学的なものである。回転する球は周囲の空気の流れを曲げる。これが**マグヌス効果**（Magnus effect）である。

コリオリとビリヤード

回転座標系における見かけの力（fictitious force）で今日知られるガスパール＝ギュスターヴ・コリオリ（Gaspard-Gustave Coriolis）（Section 11.5）は、1835 年にビリヤードの数学についての一冊の本、*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*（『ビリヤードの効果の数学的理論』）を著した。彼はとりわけ、回転をかけて突いた球はまっすぐ転がり始める前、すべっている間は放物線を描くことを示し、まさにこの問題のスクリューショットを分析した。この本は、このゲームを研究する物理学者たちに今なお引用されている。

次の一歩

1. **順回転。**ビー玉が逆回転ではなく前向きの回転 ω_0 をもって動き始めるとき、最終的に転がる速さを求めよ。$v_0/(a\omega_0)$ がどのような値のとき、ビー玉は加速するか。

2. **スヌーカーの球。**中心を突かれた球が、回転なしで速さ v_0 ですべり始める。最終的に $\frac{5}{7}v_0$ で転がることを示し、失われる運動エネルギー（kinetic energy）の割合を求めよ。（転がる球の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ である。）

3. **輪。**自身の平面内を転がる薄い輪（$I = ma^2$）について、この問題を考え直せ。このとき、$\frac{v_0}{7}$ で戻ってくるのはどのような比 $v_0/(a\omega_0)$ のときか。

4. **ドローショット。**スヌーカーのキューで球のどこを突けば（中心からどれだけの高さか、a を用いて表せ）、球は最初からすべらずに転がるか。（**ヒント：**力積（impulse）がはたらく間の、接触点のまわりの角運動量を考えよ。）

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 8

章。角運動量と、すべりを伴う転がりについて。

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、剛体（rigid body）の運動に関する章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。多くの図を用いたビリヤードの物理学。

詳しい解説付きの解答は第 11.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/backspin.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com