# 11.5 加速する列車の中の重力

## ワークシート

### 問題

**STEP II 2021、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　列車は西向き（$x$ の負の向き）に加速度 $a$ で加速している。列車内の観測者にとって、質量 $m$ の物体にはどのような「見かけの力」がはたらいているように見えるか。

### 段階 1　原点では静止できない

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　もしビーズが列車に対して原点に静止し続けるならば、ビーズは列車と同じ加速度をもつことになる。そのためにはどのような力が必要か。原点では針金は水平である。その垂直抗力（normal reaction）はどの向きにはたらくことができるか。

### 段階 2 エネルギーの式

扱う内容：小問 (ii)

**手を止めて、やってみよう** 列車の座標系でニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を書け。その際、座標系の加速度に由来する力 $ma$ を加え、垂直抗力 $\mathbf{N}$ も含めること。速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ との内積（dot product）をとれ。なぜ $\mathbf{N}$ は消えるのか。

### 段階 3 どこまで高く上がるか

扱う内容：小問 (iii)

**考えてみよう** ビーズは原点から静止した状態で動き始めるので、定数は 0 である。最高点ではビーズは瞬間的に静止する。$ky = x^2$ を用いよ。

### 段階 4  最も速くなる点

扱う内容：小問 (iv)

**考えてみよう**  速さの 2 乗を $x$ だけの関数として表せ。この 2 次式が最大となるのはどこか。次に、その点における針金の傾き（gradient）を求めよ。

## 背後にある数学

### 見かけの力

ニュートンの法則は**慣性系**（inertial frame）、すなわち加速していない座標系で成り立つ。加速する座標系でも、見かけの力を加えれば法則を救うことができる。加速度 $\mathbf{A}$ をもつ座標系では $-m\mathbf{A}$ を、回転座標系ではさらに遠心力（centrifugal force）とコリオリ力（Coriolis force）を加えればよい。これらが「見かけの」力と呼ばれるのは、それを及ぼす物体が存在しないからであり、座標系がもたらす産物にすぎない。しかし、その座標系の中にいる者にとってはまったく現実のものである。遠心力は地球を極方向に押しつぶし、コリオリ力はハリケーンの回転の向き（北半球では反時計回り）を決め、長距離砲の砲弾をそらせる。

### 等価原理

一定の見かけの力 $-m\mathbf{A}$ は、重力とまったく同様に質量に比例する。閉じた箱の中でのどんな実験によっても、箱が惑星の上に静止しているのか、何もない空間で加速しているのかを区別することはできない。これが**等価原理**（equivalence principle）である。アインシュタインはこれを一般相対性理論（general relativity）の出発点とした。加速する箱を横切る光は曲がって見えるので、重力場の中でも光は曲がるはずである。また、加速するロケットの前部と後部の時計は異なる速さで進むので、重力場の中で高さの異なる時計も異なる速さで進むはずである。どちらの予言も確かめられており、後者はすべての GPS 衛星で補正しなければならない。衛星の時計は、この効果だけで

地上の時計より 1 日あたり約 45 マイクロ秒速く進むのである。

### アインシュタインの最も幸福な考え

1907 年、ベルンの特許局に勤めていたアインシュタインは、特殊相対性理論（special relativity）についての総説を書いていた。そのとき、後に本人が回想したところによれば、「生涯で最も幸福な考え」が浮かんだ。屋根から自由落下する人は自分の重さを感じないだろう、というものである。落下する座標系を選べば、重力は「変換によって消し去る」ことができる。この考えを 1915 年の一般相対性理論にまで仕上げるには、さらに 8 年の歳月と、大量の新しい数学（ガウス（Gauss）とリーマン（Riemann）が発展させた、曲がった空間の微分幾何学（differential geometry））を要した。

## 次の一歩

1. **列車の上の大砲。** STEP I 2000、問 9（step.maths.org/questions/00-s1-q9）に挑戦せよ。加速する車両の中で発射された物体を扱う問題で、加速度は重力の傾きのようにはたらく。

2. **向かい風。** STEP II 2006、問 11（step.maths.org/questions/06-s2-q11）に挑戦せよ。一定の風に逆らって投げた物体を扱う問題で、物体は着地する前に風で手元へ押し戻されることもある。

3. **列車の中のコーヒー。** 加速する列車の中のコーヒーカップの液面は、水平面に対して角 $\arctan(a/g)$ だけ傾いた平面であることを示せ。

4. **微小振動。** $x = \frac{ak}{2g}$ のまわりでのビーズの微小振動の周期を求めよ。（**ヒント：**新しい底の近くでは、針金はその曲率半径（radius of curvature）に等しい半径の円で近似できる。）

## さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。非慣性系と見かけの力についての章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（さまざまな版がある）。アインシュタイン自身による一般向けの解説で、加速する箱の話も含まれている。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一般相対性理論の「伝記」である。

詳しい解説付きの解答は第 11.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/accelerating-frame.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com