11.4 等時曲線

ワークシート

問題

STEP III 1994、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q9

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　お椀はなめらかである。粒子にはどのような力がはたらき、そのうちどれが仕事をするか。

段階 1　曲線に沿ったエネルギー

扱う内容：定数

? **考えてみよう**　お椀はなめらか（smooth）である。どのような力がはたらき、そのうちどれが仕事をするか。曲面に沿った速さは $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$ である。エネルギー保存則（conservation of energy）を書き下せ。

段階 2 s についての単振動

扱う内容：V に達するまでの時間

手を止めて、やってみよう $s = 2\sqrt{ky}$ を用いて、y を s の関数で置き換えよ。エネルギーの式を t で微分せよ。どのような運動が得られるか。

段階 3 最下点までの時間

扱う内容：V に達するまでの時間

考えてみよう 粒子が $s = 0$ に達するまでにかかる時間は、周期（period）の何分のいくつか。その答えは h に依存するか。

段階 4　2 つの粒子

扱う内容：2 つの粒子

考えてみよう　それぞれの粒子はいつ V に達するか。V での速さは出発点の高さにどう依存するか。運動量（momentum）を比べよ。

手を止めて、やってみよう　衝突の時点で運動量の総和は 0 であるから、その後も 0 のままである。反発係数（coefficient of restitution）α を用いて、衝突直後の 2 つの速さを求めよ。

段階 5 運動の全体像

扱う内容：2 つの粒子

> **考えてみよう** それぞれの粒子は今度はどの高さまで上がるか。次に V に達するのはいつか。その衝突では何が起こり、さらにその後のすべての衝突ではどうなるか。

背後にある数学

なぜサイクロイドなのか

直線の下側を転がる半径 R の車輪は、サイクロイド $x = R(t + \sin t),\, y = R(1 - \cos t)$ を描く。このとき $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R(1 + \cos t)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\sin t$ なので、曲線に沿った速さは $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$ である。積分すると底からの弧長は $s = 4R\sin\frac{t}{2}$ であり、一方 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$ である。よって $s^2 = 8Ry$ となり、サイクロイドはまさに $k = 2R$ として $s = 2\sqrt{ky}$ を満たす曲線である。逆に、復元力が s に比例するという条件から、曲線はサイクロイドでなければならないことが導かれる。

最速降下曲線

1696 年、ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）はヨーロッパの数学者たちに次の問題を挑戦状として出した。ある点から、それより低い（真下ではない）点へ、ビーズが**最短**時間で滑り降りるのはどのような曲線に沿うときか。その答えである**最速降下曲線**（brachistochrone）もまたサイクロイドである。ニュートン（Newton）は問題を受け取ったその晩のうちに解いたと言われている。彼は解答を匿名で発表したが、ベルヌーイは「爪を見れば獅子とわかるように」その作者を見抜いた。この問題は、Section 4.7 で出会った**変分法**（calculus of variations）、すなわち積分で定義される量を最小にする曲線を求める理論の、出発点となった例である。

ホイヘンスのサイクロイド時計

ホイヘンスは、単振り子の周期が振幅に依存するため、単振り子が正確な時を刻まないことを知っていた。著書 *Horologium Oscillatorium*（『振り子時計』、1673 年）で、彼はおもりをサイクロイドに沿って動かす方法を示した。サイクロイドの形をした 2 枚の曲がった「頬板」の間に糸を吊るすと、糸は頬板に巻きつきながら、おもり自身がサイクロイドを描くように動くのである（サイクロイドの**伸開線**（involute）もまたサイクロイドである）。実際には、頬板は摩擦によって、取り除く誤差よりも大きな誤差を生んでしまったため、時計職人たちは代わりに振れ幅を小さく保つことにした。しかしホイヘンスの解析は縮閉線（evolute）と伸開線の理論を生み出し、彼の著書は 17 世紀の力学における偉大な業績の 1 つとなった。

次の一歩

1. **異なる高さ。**等時曲線のお椀の中で、粒子を高さ h から放す。V での速さが、エネルギー保存則から当然そうなるべきとおり $\sqrt{2gh}$ であることを示し、それが ωs_0 と一致することを確かめよ。

2. **普通のお椀。**半径 R の半球形のお椀で、低い位置から底に着くまでの時間と、縁から底に着くまでの時間を比較せよ。どちらが長いか。（Section 11.3 の結果を用いよ。）

3. **等しい質量。**問題の後半を、等しい質量 m をもち高さ h_1 と h_2 から放す 2 つの粒子、反発係数 e の場合についてやり直せ。2 つの粒子は依然として常に V で衝突するか。

4. **サイクロイドの弧長。**サイクロイドの 1 つのアーチの長さが $8R$ であり、その下の面積が $3\pi R^2$、つまり転がる円の面積の 3 倍であることを示せ。

さらに学ぶために

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。等時曲線と最速降下曲線を、その歴史とともに扱っている。
- **E. A. Whitman,「Some historical notes on the cycloid」**, *American Mathematical Monthly* 50 (1943)。サイクロイドがなぜ「幾何学者のヘレネ」と呼ばれたのかを述べている。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。最速降下曲線をはじめとする最適化問題を、歴史とともに語っている。

詳しい解説付きの解答は第 11.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/tautochrone.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com