11.3 本当の振り子

ワークシート

問題

STEP III 1998、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s3-q11

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　おもりは半径 l の円周上を動く。その速さと（最下点を基準とした）高さを θ と $\dot{\theta}$ を用いて表すとどうなるか？

段階 1　エネルギー

扱う内容：エネルギーの式（energy equation）

? **考えてみよう**　おもり（bob）の速さと高さを θ と $\dot{\theta}$ で表せ。おもりは $\theta = \gamma$ のとき静止している。エネルギー保存則（conservation of energy）を用いよ。

段階 2 積分で表した周期

扱う内容：周期（period）

考えてみよう 2 つの余弦の両方に $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ を用いよ。$\theta = 0$ から $\theta = \gamma$ まで進むのに要する時間は、周期の何分のいくつか。その時間を $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}$ の形に書け。

段階 3 特異点（singularity）の除去

扱う内容：小振幅近似（small-amplitude approximation）

手を止めて、やってみよう $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ とおき、$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$ と置換せよ。ϕ はどの範囲を動けばよいか。$\mathrm{d}\theta$ を $\mathrm{d}\phi$ で表せ。どの因子が打ち消し合うか。

段階 4　最初の補正項

扱う内容：小振幅近似

> **考えてみよう**　k が小さいとき、$(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$ を二項定理（binomial theorem）で展開し、最初の 2 項を残せ。そのうえで $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi$ と $k\approx\frac{\gamma}{2}$ を用いよ。

背後にある数学

楕円積分

積分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

は**第一種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the first kind）とよばれる。この名は、これと近い関係にある積分が楕円の周の長さを与えることに由来する。厳密な周期は $P=4\sqrt{l/g}\,K(\sin\frac{\gamma}{2})$ である。被積分関数を完全に展開し、Section 4.4 のウォリス（Wallis）積分 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$ を用いて項別に積分すると、

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big(1+\big(\tfrac{1}{2}\big)^2k^2+\big(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\big)^2k^4+\big(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\big)^2k^6+\cdots\Big).$$

を得る。なじみのある関数を有限回組み合わせても $K(k)$ は得られない。これは真に新しい関数なのである。

ガウスの驚くべき公式

K を計算するには、はるかによい方法がある。Section 2.6 では**算術幾何平均**を学んだ。a と b から始めて、それらを相加平均と相乗平均で置き換えることを繰り返すのであ

った。ガウスは1799年に

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}(1, \sqrt{1-k^2})},$$

であることを発見した。したがって、振幅 γ の振り子の周期は厳密に

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}(1, \cos\frac{\gamma}{2})}.$$

となる。AGMは非常に速く収束するので、約160°までの振れであれば、3〜4ステップで周期が有効数字10桁まで得られる。図11.3.1（オンライン版の節全体を参照）の値もこの方法で計算したものである。180°に近づくと2つの初期値1と $\cos\frac{\gamma}{2}$ は大きく離れるため、もう1〜2ステップ余分にかかるが、179°でも5ステップで十分である。ガウスは日記に、この発見は「解析学のまったく新しい分野を開く」と記しており、それは正しかった。楕円積分の逆関数を考えることで、アーベル（Abel）とヤコビ（Jacobi）は**楕円関数**（elliptic function）に到達し、楕円関数はさらに**楕円曲線**へとつながった。楕円曲線は今日、数論（number theory）の中心にあり（フェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の証明の鍵であった）、またインターネットの安全を守る暗号（cryptography）の中心にもある。

ガリレオのランプとホイヘンスの時計

振り子の周期は振幅によらないというガリレオの主張は1602年ごろになされたもので、彼が調べた小さな振れについてはよい近似であった。ホイヘンス（Huygens）はそれが厳密ではないことに気づき、1659年に、周期が本当に振幅によらなくなる曲線を発見した。それがサイクロイド（cycloid）であり、Section 11.4の主題である。1656年以降に彼が製作した振り子時計によって、時計の誤差は1日あたり約15分から約15秒にまで改善された。海上で経度を求める問題を解決したマリンクロノメーター（marine chronometer）は、のちに振り子をまったく用いなくなったが、振り子時計は1920年代まで世界で最も正確な時計であり続けた。

次の一歩

1. **つながれた粒子。** STEP III 2015、問9（step.maths.org/questions/15-s3-q9）に挑戦せよ。これは、微小振動であっても周期が振幅に依存する振動子である。振り子の周期は依存しないのに、なぜこの振動子では依存するのか？

2. **次の項。** 二項展開をもう1項先まで進め、$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\gamma^2}{16} + \frac{11\gamma^4}{3072})$ であることを示せ。

3 **手計算による AGM。** AGM を 3 ステップ用いて振幅 90° の振り子の周期を見積もり、図中の値 1.1803 と比較せよ。

4 **時計。** ある振り子時計は、振幅 4° で正確に時を刻むよう調整されている。振幅が 5° に増えると、1 日に何秒遅れるか？

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press)（古典力学入門）。第 4 章で大振幅の振り子を扱っている。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)（円周率と算術幾何平均）。ガウスの発見とその応用を扱い、π を計算する最速の方法も紹介している。
- **Dava Sobel, *Longitude*** (Fourth Estate)（経度）。振り子のその先にある、海上での時間計測の物語である。

詳しい解説付きの解答は第 11.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/real-pendulum.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com