11.2 基準振動

ワークシート

問題

STEP III 2014、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　X が P から距離 $a+x$ の位置にあり、Y が Q から距離 $a+y$ の位置にあるとき、中央のばね XY の長さはいくらか。x と y が正のとき、どのばねが伸びていて、どのばねが縮んでいるか。

段階 1　運動方程式（equations of motion）

扱う内容：運動方程式

考えてみよう　$XP = a+x$、$YQ = a+y$ とするとき、XY の長さはいくらか。どのばねが伸び、どのばねが縮んでいるか。向きに注意して、各ばねが X に及ぼす力を求めよ。そのうえで、対称性（symmetry）を用いて Y についての式を得よ。

段階 2 連成の分離（decoupling）

扱う内容：組合せ $x-y$ と $x+y$

手を止めて、やってみよう どちらの方程式も x と y の両方を含んでいる。2 式の差をとり、次に和をとれ。$x-y$ と $x+y$ はそれぞれどのような方程式を満たすか。

段階 3 初期条件（initial conditions）

扱う内容：組合せ $x-y$ と $x+y$

考えてみよう 最初の時点での x と y の値はいくらか。また、粒子は動いているか。これらを用いて、2 つの解に含まれる定数を決定せよ。

段階 4　二度と戻らないこと

扱う内容：Y が二度と元の位置に戻らないこと

> **手を止めて、やってみよう**　y を t の式で表せ。Y が出発点に戻るためには、2 つの余弦（cosine）がともにいくつに等しくなければならないか。そのことは $\sqrt{3}$ について何を意味するか。

背後にある数学

基準振動は固有ベクトルである

方程式を行列の方程式として書くと、

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

分離する組合せは、この行列の固有ベクトル（eigenvector）である。すなわち、固有値（eigenvalue）1 に対する $(1,-1)$ と、固有値 3 に対する $(1,1)$ である（Section 7.2）。第一の基準振動では $x=-y$ であり、二つの質点は直線上を同じ向きに動き（x と y は反対側の端から測っていることに注意）、中央のばねの長さは変わらない。第二の基準振動では $x=y$ であり、二つの質点は逆向きに動いて中央のばねを縮めたり伸ばしたりするので、振動数が高くなる。振動数の 2 乗は、固有値に $\frac{\lambda}{ma}$ を掛けたものである。

これは質点とばねが何個あっても成り立つ。N 個の連成振動子からなる系には N 個の基準振動があり、それらは対称行列の固有ベクトルで与えられる。そしてスペクトル定理（spectral theorem）により、それらは必ず存在し、互いに直交することが保証される。分子は基準振動で振動しており、化学者はそれを利用して、分子が吸収する赤外線から分子を同定する。建物や橋にも基準振動があり、技術者はそれを風や地震の振動数から遠ざけておかなければならない。さらに質点の個数を無限大にすると、基準振動は振動する弦の倍音となり、これがフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。

到達はしないが近づく

Y は厳密にもとの位置に戻ることはないが、いくらでも近くまで来る。その理由はクロネッカー（Kronecker）の定理にある。α が無理数ならば、倍数 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ を 1 を法として考えると、それらは $[0,1]$ のあらゆる数にいくらでも近づく。よって、ωt が 2π の倍数であり、かつ $\sqrt{3}\,\omega t$ が 2π の倍数と任意の許容誤差以内にあるような時刻を見つけることができる。この運動は**準周期的**（quasi-periodic）であり、トーラス（torus）（各基準振動に一つずつ角度をとったもの）の上を、決して閉じることなく巻きついていく。振動数の比が有理数か無理数かという同じ区別が、太陽系の安定性に関する KAM 定理の核心にある。

次の一歩

1 **エネルギー。** 全エネルギー $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$ が一定であること、さらにそれが各基準振動に一つずつ対応する二つの項の和に分かれ、それぞれの項が個別に一定であることを示せ。

2 **純粋な基準振動。** 運動が周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の周期運動になるようにするには、質点をどのように動かし始めればよいか。周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ の場合はどうか。

3 **硬い中央のばね。** 中央のばねの弾性率（modulus）が λ ではなく μ であるとき、二つの基準振動の振動数を求めよ。μ/λ がどのような値のとき、あらゆる運動が周期的になるか。

4 **3 個の質点。** 等しい質量をもつ 3 個の質点が、二つの固定点の間で 4 本の同一のばねによって一直線につながれている。行列とその固有値（$2-\sqrt{2}$、2、$2+\sqrt{2}$）を求め、三つの基準振動を説明せよ。

さらに学ぶために

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）、第 5 章。連成振動子と基準振動について。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）、固有値の章。ばねと質点を主要な例として扱っている。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）、第 8 章。トーラス上の準周期運動について。

詳しい解説付きの解答は第 11.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/normal-modes.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com