11.14 懸垂線ではなく放物線

ワークシート

問題

STEP I 1991、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s1-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　各節点 A_i には三つの力がはたらく。隣り合う二つの部分の張力と、支柱から吊り下がる重さ w である。重さが影響を与えられないのは、張力のどの成分か。

段階 1 各節点（joint）での式

扱う内容：釣り合いの式（equilibrium equations）

考えてみよう 各節点において、重さは鉛直方向にはたらく。では、隣り合う 2 つの部分の張力（tension）の水平成分（horizontal component）について何がいえるか。水平方向と鉛直方向に分解（resolve）せよ。

手を止めて、やってみよう 中央の節点では、橋の対称性（symmetry）を用いよ。そこで接する 2 つの部分は、それぞれその節点の支柱（strut）の重さをどれだけ支えているか。

段階 2　重さから傾きを求める

扱う内容：比

考えてみよう　中央から外側へ向かって順に考えよ。各部分の張力の鉛直成分はいくらか。それを共通の水平成分で割って傾き（slope）を求め、各傾きを高さ y_i と h を用いて表せ。

段階 3 放物線（parabola）

扱う内容：放物線

> **考えてみよう** 節点を中央から外側へ向かって数えよ。中央の節点からの落差を足し合わせよ。$1+3+5+\cdots+(2j-1)$ はいくらか。

背後にある数学

放物線か懸垂線か

この議論を連続的にしたものは、両方の曲線を説明してくれる。一定の水平張力 H のもとにある鎖 $y(x)$ について、張力の鉛直成分は Hy' であり、短い区間ではそこで担う荷重の分だけ変化する。すなわち $H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$ である。

- 荷重が**水平方向に**均等に分布している場合（重い路面で、道路の単位長さあたりの重さが ρ）、$Hy'' = \rho$ となるので、y は二次式、つまり放物線である。
- 荷重が鎖の自重で、**鎖に沿って**均等に分布している場合（鎖の単位長さあたり ρ）、$Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$ となり、その解は懸垂線 $y = c\cosh\frac{x}{c}$（ただし $c = H/\rho$）である。

鎖がほぼ水平な底の付近では、二つの曲線はほとんど同じである。違いが出るのは支点の近くで、そこでは鎖が急になり、同じ水平距離により多くの鎖が含まれる。実際の吊り橋では路面がケーブルよりはるかに重いので、ケーブルの形は放物線にきわめて近い。

逆さにした鎖とアーチ

鎖には純粋な引張りだけがはたらいている。その形を上下逆さにすると、純粋な圧縮だけがはたらき、曲がろうとする傾向のないアーチが得られる。ロバート・フック（Robert Hooke）は 1675 年にこれをアナグラムの形で発表した。解読すると「しなやかな線が垂れ下がるように、ただし上下を逆にすれば、剛なアーチが立つ。」となる。

クリストファー・レン（Christopher Wren）とフックはこの考えをセント・ポール大聖堂のドームに用いた。また、アントニ・ガウディ（Antoni Gaudí）は、重りを付けた紐を天井から吊るし、それを上下逆さに撮影することで、バルセロナのサグラダ・ファミリア（Sagrada Família）を設計した。セントルイスのゲートウェイ・アーチは（重み付きの）逆さ懸垂線である。

懸垂線の挑戦状

1690 年、ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）は数学者たちに、垂れ下がる鎖の形を求めよという挑戦状を出した。一年のうちに、弟のヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）、ライプニッツ（Leibniz）、そしてホイヘンスが解を発表した。ヨハン・ベルヌーイは後に、問題を出した兄自身は解けなかったと、得意げに回想している。懸垂線は新しい微積分学の最初の勝利の一つであり、双曲線関数（hyperbolic functions）cosh と sinh へとつながった。これらは 18 世紀に Vincenzo Riccati とランベルト（Johann Heinrich Lambert）によって体系的に研究された。

次の一歩

1. **支柱の数が偶数の場合。**支柱を $2n$ 本にして問題を解き直せ。このとき鎖の最下点は中央の水平な部分になる。節点はやはり放物線上にあるか。

2. **張力。**鎖の張力の最大値を H、w、n を用いて求めよ。それはどこで生じるか。

3. **懸垂線。**$y = c\cosh\frac{x}{c}$ が $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$ を満たすことを確かめよ。また、$x = 0$ から $x = X$ までの懸垂線の長さが $c\sinh\frac{X}{c}$ であることを示せ。

4. **ガリレオの誤り。**長さ $2L$ の鎖が、距離 $2d$ だけ離れた二つの支点の間に垂れ下がっている。L が d よりわずかに大きいだけのとき、懸垂線のたるみは放物線のたるみとほぼ同じであることを示せ。ガリレオの実験で違いが明らかにならなかったのはなぜか。

さらに学ぶために

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。懸垂線、放物線とその仲間の曲線。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。石造のアーチやドームがなぜ立っていられるのかを、フックの鎖から説き起こす。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。橋の芸術と

工学。

詳しい解説付きの解答は第 11.14 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/bridge-parabola.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com