11.13 除雪車問題

ワークシート

問題

STEP III Specimen paper、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　1 台目の除雪車は時刻 t に深さ $h + kt$ の雪に出会う。その速さはいくらか。x を t の関数として求めるのと、t を x の関数として求めるのとでは、どちらが易しいか。

段階 1　1 台目の除雪車

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　時刻 t において、1 台目の除雪車は深さ $h + kt$ の雪に出会う。その速さを式で表せ。t を x の関数として求めるほうが易しい。方程式の逆数をとって解け。

段階 2　2 台目の除雪車の方程式

扱う内容：小問 (ii)、方程式を立てる

手を止めて、やってみよう　2 台目の除雪車は時刻 t に位置 y にある。1 台目の除雪車はその地点を時刻 $t_1(y)$ に除雪した。いまその地点の雪の深さはいくらか。2 台目の除雪車の速さを式で表し、その逆数をとれ。

段階 3　解く

扱う内容：小問 (ii)、方程式を解く

考えてみよう　この方程式は、t を y の関数とみると線形である。積分因子（integrating factor）$e^{-\alpha y}$ と、2 台目の除雪車が時刻 T に $y = 0$ から出発するという条件を用いよ。

段階 4　衝突

扱う内容：小問 (ii)、除雪車どうしが出会う地点

考えてみよう　2 台の除雪車は、同じ時刻に同じ地点に達したときに出会う。$t_2(y) - t_1(y)$ を求めよ。これが 0 になるのはどのようなときか。

背後にある数学

Agnew の除雪車

Ralph Palmer Agnew が 1942 年の教科書 *Differential Equations* で示した版では、ある朝、雪が激しく一定の割合で降り始める。正午に除雪車が出発し、最初の 1 時間で 2 マイル、次の 1 時間で 1 マイル進む。雪が降り始めたのはいつか。除雪車の速さは雪の深さに反比例し、深さは降り始めからの経過時間に比例する。答え（下の演習問題を参照）には黄金比（golden ratio）が関わり、雪が降り始めたのは正午の約 37 分前である。その後、この問題のように除雪車が 2 台登場する版が生まれた。

伝わっていく情報

2 台目の除雪車の運動は、道路に記録された履歴、すなわち各地点が最後に除雪された時刻に依存する。これは**記憶**（memory）をもつ系の簡単な例であり、ある場所での状態が、以前そこで起こったことに依存する。交通流、氷河の運動、森林火災の広がりはいずれもこの性質をもち、その数学である一階偏微分方程式（first-order partial differential equation）とその**特性曲線**（characteristics）の理論は、大学 2 年次の標準的な話題である。時刻を位置の関数として書く（「波面はいつここに到達するか」）という発想は、まさにこうした問題に用いられる**到達時刻**（arrival times）の方法そのものである。

次の一歩

1 **Agnew の問題。** 正午より前の未知の時刻に、雪が一定の割合で降り始める。速さが雪の深さに反比例する除雪車が正午に出発し、最初の 1 時間で 2 マイル、次の 1 時間で 1 マイル進む。雪が正午の t_0 時間前に降り始めたとすると $(1+\frac{2}{t_0})^2 = (1+\frac{1}{t_0})^3$ が成り立つことを示し、$\frac{1}{t_0}$ が黄金比であることを導き、雪が降り始めた時刻を求めよ。

2 **確認。** $t_2(y)$ が小問 (ii) の微分方程式を満たすことを、微分によって確かめよ。

3 **時間差。** $kT > h$ ならば、時間差 $t_2(y) - t_1(y)$ は初めに増加し、その後減少して 0 になることを示し、それが最大になる位置を求めよ。$kT \le h$ のときはどうなるか。その意味を解釈せよ。

4 **3 台の除雪車。** 3 台目の除雪車が時刻 $2T$ に出発する。その運動の方程式を書け。3 台目が 2 台目に追いつくのは、2 台目が 1 台目に追いつくより前か後か。

さらに学ぶために

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。除雪車問題の原典。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。数多くの問題とともに除雪車問題を論じている。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流と特性曲線を、取り組みやすい水準で扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 11.13 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/snowplough.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com