11.12 ゴムひもの上のアリ

ワークシート

問題

STEP II 2018、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s2-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　紐は一様に引き伸ばされる。つまり、紐のどの部分も同じ倍率で伸びる。時刻 t における紐の長さは $a + ut$ である。杭から距離 x の位置にある点が、全長の $\frac{x}{a+ut}$ の割合のところにあるとすると、その点はどれだけの速さで動くか。

段階 1　アリの方程式

扱う内容：アリの方程式

考えてみよう　アリはひもに対して速さ v で進み、さらにその下にあるひもの速さが加わる。$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を書き下せ。

手を止めて、やってみよう　$\frac{x}{a+ut}$ を商の微分法（quotient rule）で微分し、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ について立てた式を用いよ。何が残るか。

段階 2　端に到達する

扱う内容：端に到達するまでの時間

? **考えてみよう**　0 から t まで積分せよ。アリが端に到達するのは、比 $\frac{x}{a+ut}$ が 1 に等しくなるときである。

段階 3 帰り道

扱う内容：帰りの道のり

> **考えてみよう** 引き返すとき、ひもに沿ったアリの速度は $-v$ である。このとき比の変化率はどうなるか。比は時刻 T において 1 から出発する。いつ 0 に達するか。

背後にある数学

調和級数による設定

このパズルは、ふつう離散的な引き伸ばしの形で語られる。ロープの長さは 1 km で、蟻は最初の 1 秒で 1 cm 歩く。次にロープが 1 km 引き伸ばされ、蟻はまた 1 cm 歩く。以下同様である。n 秒目に蟻は長さ n km のロープのうち 1 cm、すなわち割合 $\frac{1}{100\,000\,n}$ だけ進む。引き伸ばしは割合を変えないので、N 秒後に蟻が進んだのはロープ全体の

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

である。蟻が到着するのは $H_N\approx 100\,000$ となるとき、すなわち約 $e^{100\,000}$ 秒後であり、これは 43 000 桁を超える数である。（比較のために言えば、宇宙の年齢は約 4×10^{17} 秒である。）連続版の答えもこれと合致する。$k=\frac{u}{v}=100\,000$ であり、$T\approx\frac{a}{u}e^{k}$ となる。

膨張する宇宙の中の光

ロープの上の蟻は、膨張する宇宙を横切る光のモデルである。遠方の銀河は空間そのものの膨張に運ばれて我々から遠ざかり、それらの銀河からの光は、蟻が伸びていくロープの上を歩くように、膨張する空間の**中を**速さ c で我々に向かって進む。遠方の銀河からの光がいつか我々に届くかどうかは、膨張率が時間とともにどう変化するかによる。ロープのように一定の割合で膨張する宇宙では、光はいつか必ず届く。我々の宇宙がそう見えるように膨張が加速する宇宙では、その光が決して我々に届かない銀河が存在する。すなわち**宇宙の事象の地平面**（cosmic event horizon）が存在するの

である。蟻の場合にこれに相当するのは、先端の速さが長さに比例して増えるように指数関数的に引き伸ばされるロープである（演習問題で試してみよ）。

ガードナーの蟻

このパズルは、1972 年にフランスの数学者 Denys Wilquin がゴムバンドの上の芋虫という形で考案したものらしい。そしてマーティン・ガードナー（Martin Gardner）が *Scientific American* 誌のコラムや著書 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*（『タイムトラベルとその他の数学的困惑』）で紹介し、広く知られるようになった。直観に反するにもかかわらず証明は容易な結果の例として最もよく知られたものの一つであり、調和級数の発散を示す例として好んで用いられている。

次の一歩

1. **中間地点。**蟻がロープの中間地点にいるのはいつか。それは時刻 $\frac{T}{2}$ より前か後か。

2. **指数関数的な引き伸ばし。**代わりに、ロープの長さが $ae^{\lambda t}$ であるとする。蟻が先端に到達するのは $v > \lambda a$ のときに限ることを示せ。（これが宇宙の事象の地平面である。）

3. **加速するロープ。**長さが $a + \frac{1}{2}bt^2$ のとき、蟻は必ず到着するか。

4. **離散版のパズル。**離散版において、蟻がロープの 1% を進むのに何秒かかるか。$H_N \approx \ln N + 0.577$ を用いよ。

さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。ゴムのロープの上の蟻の話を収録している。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。オイラー定数を探る本。調和級数と蟻の話を扱っている。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨張する空間、地平面、共動座標を学部レベルで解説している。

詳しい解説付きの解答は第 11.12 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/rubber-rope.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com