11.11 野手はどのように捕球するか

ワークシート

問題

STEP II 1998、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s2-q11

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　打者を原点に、野手を距離 D の位置に置く。ボールが (x, y) にあるとき、$\tan\theta$ はいくらか。

段階 1 完璧な位置にいる野手

扱う内容：静止している野手

考えてみよう 打者（batsman）を原点に置き、野手（fielder）を距離 D の位置に置く。ボールが (x, y) にあるとき、$\tan\theta$ はどうなるか。

手を止めて、やってみよう ボールが時刻 T に、野手のいる位置で目の高さに落ちてくるとする。y と $D - x$ を t と T を用いて表せ。y を因数分解（factorise）して、何かが約分されるようにできるだろうか。

段階 2　走る野手

扱う内容：走る野手

> **考えてみよう**　今度は、野手は距離 D の位置から出発し、速さ v で打者に向かって走る。時刻 T にボールを捕るとすると、D はいくらか。同じ計算を繰り返せ。

> **手を止めて、やってみよう**　逆（converse）を示すには、$\tan\theta$ が一定の割合 c で増加する、すなわち $\tan\theta = ct$ であると仮定する。分母を払い、t の係数（coefficient）と定数項を比較せよ。そこから D について何がわかるか。

背後にある数学

光学的加速度の打ち消し

Chapman の規則は現在、**光学的加速度の打ち消し**（optical acceleration cancellation）と呼ばれている。野手は「光学的加速度」$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ を 0 に保つように動くのである。ボールの像が加速しながら上がっていけば、ボールは頭上を越えるので後ろに下がる。減速していけば、ボールは手前に落ちるので前に走る（図 11.11.1（オンライン版の節全体を参照））。この戦略はボールがどこに落ちるかを教えてはくれないが、野手をそ

こへ導いてくれる。これはフィードバック制御則（feedback control law）であり、誘導ミサイルを操縦する制御則と同類のものである。ミサイルは**比例航法**（proportional navigation）を用いて、目標への視線角を一定に保つ。これは同じ考え方を横方向に適用したものである。

野手が実際にしていること

実際の野手は Chapman の規則を使っているのだろうか。1990 年代に、野球の外野手の頭にカメラを取り付けて行われた実験では、結果はまちまちであった。Michael McBeath らは 1995 年に *Science* 誌上で、横方向に打たれたボールに対しては、野手は視野の中でボールの像が直線上を動き続けるような曲線経路を走っており（「線形光学的軌道」）、これによってもやはり捕球に至ると論じた。その後の研究では、両方の戦略、さらにそれらを組み合わせたものが使われていること、また野手は一定の速さで走るとは限らないことが示唆されている。2004 年の研究では、フリスビーをキャッチする犬が同じ光学的規則と整合する経路をたどることがわかった。細部はどうであれ、驚くべき結論は揺るがない。捕球に予測は必要なく、必要なのは適切なフィードバックだけなのである。

Chapman の論文

Seville Chapman の「Catching a baseball」（野球のボールを捕る）は 1968 年に *American Journal of Physics* 誌に掲載された 3 ページの論文であり、本質的にこの問題の計算そのものが書かれている。Chapman は、この戦略が空気抵抗のない場合にしか成り立たないこと、そして実際の野球のボールの軌道は抗力と回転によってゆがめられ、事情が複雑になることを指摘している。それでも、脳が視野の単純な不変量を利用して複雑な制御問題を解いているという考え方は、心理学やロボット工学において重要なものとなった。

次の一歩

1. **後ろ向きに走る。** ボールが野手の出発位置より後ろに落ちる場合、野手は打者から遠ざかる向きに走るべきであり、同じ規則が成り立つことを示せ。

2. **θ そのものではない。** 完璧な位置にいる野手について、$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ は一定でないことを示せ。なぜ見るべき量は $\tan\theta$ なのか。

3. **目の高さ。** ボールが野手の目の高さより h だけ低い位置から打たれた場合、うまく位置取りした野手にとって、$\tan\theta$ は依然として t の一次式か。（野手は目の高さで捕球するものとする。）

4 **空気抵抗。**速度に比例する空気抵抗があると、水平方向の速度は指数関数的に減衰する。うまく位置取りした野手にとって、$\tan\theta$ は依然として t の一次式か。

さらに学ぶために

- **Seville Chapman, "Catching a baseball"**, *American Journal of Physics* 36 (1968).（野球のボールを捕る）
- **Michael McBeath, Dennis Shaffer & Mary Kaiser, "How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls"**, *Science* 268 (1995).（野球の外野手はフライを捕るためにどこへ走るかをどう決めるか）
- **Dennis Shaffer et al., "How dogs navigate to catch Frisbees"**, *Psychological Science* 15 (2004).（犬はフリスビーを捕るためにどう進路をとるか）

詳しい解説付きの解答は第 11.11 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/fielders.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com