11.10 こちらへ戻ってくるボール

ワークシート

問題

STEP II 2019、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　OP よりも OP^2 を扱う方が簡単なのはなぜか。「OP が増加する」ことと「OP^2 が増加する」ことは同じだろうか。

段階 1 距離の 2 乗

扱う内容：小問 (i)：OP が増加すること

考えてみよう OP ではなく $OP^2 = x^2 + y^2$ を扱うとよい。これを t で表し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ を用いて整理せよ。

手を止めて、やってみよう t について微分（differentiate）し、因数 t をくくり出せ。すると t の 2 次式（quadratic）が残る。これがすべての t に対して正となるのはどのようなときか。

段階 2　より急な角度での投射

扱う内容：小問 (i)：より急な角度での投射

考えてみよう　$\sin\alpha > \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ならば、この 2 次式は異なる 2 つの実数解（real roots）をもつ。解と係数の関係（2 解の和と積）を用いて、両方の解が正であることを示せ。小さいほうの解は、粒子が着地する前の時刻であるか。

段階 3 動く観測者

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう Q は $(-vt, 0)$ にあるので、水平方向の隔たりは $x + vt$ である。QP^2 を書き下せ。OP^2 とどこが異なるか。判別式（discriminant）を用いた議論をもう一度繰り返せ。

背後にある数学

幾何学的な見方

OP が減少するのは、P の速度が「内向き」、すなわちベクトル $\overrightarrow{OP}$ と鈍角（obtuse angle）をなすとき、つまり $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$ のときであり、かつそのときに限る。急な角度で投げた場合、飛行の最高点付近では、質点は投げた人のはるか上方かつわずかに前方にあり、ほぼ水平に遠ざかる向きに動いているが、落下し始めている。$\overrightarrow{OP}$ の方向を基準にして、速度の下向きの成分が外向きの成分を上回ると、質点は近づいてくる。浅い角度で投げた場合、質点は常に十分前方にあるので、その速度が O の方へ向くことはない。臨界的な場合とは、ちょうど 1 つの瞬間に速度が $\overrightarrow{OP}$ と垂直（perpendicular）になる場合であり、これが図 11.10.1（オンライン版の節全体を参照）において距離が一瞬止まる瞬間である。

単調性は自明ではない

「明らかに」増加すると思える量の多くは、実は増加しない。地球から月までの距離は振動する。曲がりくねった道路を走る 2 台の車の間の距離は、一方が常に前にいても減少することがある。捕食者の個体数は、獲物が増えている間に減少することがある。ある量が単調であることを証明するには、通常、導関数の符号が一定であることを示す。ここでの手法（多項式に帰着させ、その解または判別式を調べる）は、それを行う標準的な方法である。解析学では、単調性はしばしば収束（convergence）を証明す

る鍵となる。第 2 章で見たように、有界な単調数列は収束する。

次の一歩

1. **どこまで近づくか。** $\alpha = 80^\circ$ のとき、OP が極大（local maximum）・極小（local minimum）となる時刻と、そのときの距離を u^2/g を単位として求めよ。

2. **斜面上で。** 水平面と角 β をなす斜面を上る向きにボールを投げ、斜面上に着地する場合について、小問 (i) を繰り返せ。（斜面から測った）臨界角は変わるか。

3. **空気抵抗がある場合。** ボールが速度に比例する抵抗も受けるとする。計算せずに、臨界角は 70.5° より大きくなると予想されるか、小さくなると予想されるか。それはなぜか。

4. **高い所から投げる。** ボールを崖の上から投げ、はるか下に着地する場合、どのような角度に対しても OP は最終的には増加することを示し、ある段階で OP が減少するような角度が存在するかどうかを調べよ。

さらに学ぶために

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。日常の物理に関する意外なパズルが何百も収められている。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）。第 3 章は放物運動を扱い、直観に反する問題がいくつか含まれている。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。あるものが常に別のものより大きいことを証明する技法を扱う。

詳しい解説付きの解答は第 11.10 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/coming-back.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com