11.1 共鳴

ワークシート

問題

STEP II 1991、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s2-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　質点は伸び（extension）c で平衡（equilibrium）の状態にぶら下がっている。ひもの弾性率（modulus）を λ とするとき、λ、a、c、m、g の間にはどのような関係があるか。上端が $b\sin pt$ だけ下がり、質点が x だけ下がったとき、伸びはいくらか。

段階 1　運動方程式（equation of motion）

扱う内容：運動方程式

考えてみよう　下向きを正にとる。上端が $b\sin pt$ だけ下がり、質点が x だけ下がったとき、伸び（extension）はいくらか。ニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）を書き、釣り合い（equilibrium）の条件を用いて mg を消去せよ。

段階 2 解く

扱う内容：$x(t)$ を求める

考えてみよう 方程式を $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin pt$ の形に書く。特殊解（particular integral）として $x = C \sin pt$ を試し、それに余関数（complementary function）を加えよ。

手を止めて、やってみよう 質点は釣り合いの位置で静止した状態から動き始めるので、$x(0) = 0$ かつ $\dot{x}(0) = 0$ である。これらを用いて二つの定数を求めよ。

段階 3　張ったままでいる条件

扱う内容：糸が張ったままでいる条件

考えてみよう　伸び $c + x - b\sin pt$ が正であるとき、糸は張っている（taut）。これを t で表し、整理せよ。

手を止めて、やってみよう　$p\sin pt - n\sin nt$ はどこまで負になりうるか。それを用いて、伸びが正であり続けるための条件を求めよ。

背後にある数学

共振の極限

解において $p \to n$ とする。分子も分母も 0 に近づくが、極限の計算（あるいは p について微分するロピタルの定理（l'Hôpital's rule））により

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt).$$

が得られる。項 $nt\cos nt$ は限りなく大きくなる。ちょうど固有振動数で駆動すると、振幅は時間に比例して増加する。一押しごとに、運動と歩調を合わせて揺れが加算されていくからである。共振より少し下では、二つの振動数の位相が合ったりずれたり

を繰り返し、**うなり**（beats）が生じる。振幅は遅い振動数 $n-p$ で膨らんではしぼむ（図 11.1.1）。ほとんど調弦の合った二本のギターの弦を鳴らしたときにも、同じうなりが聞こえる。

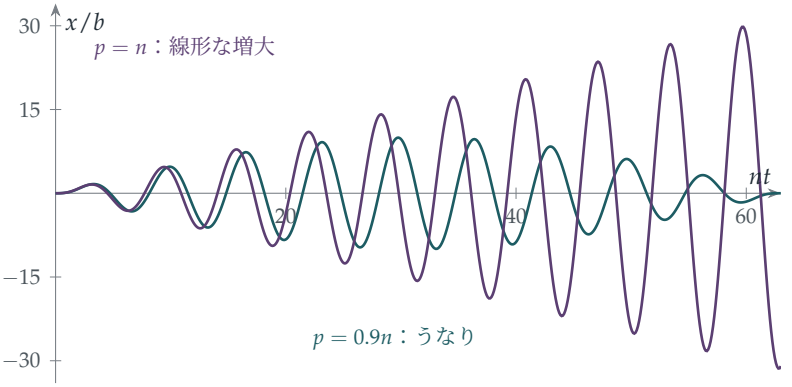

図 11.1.1　質点の応答（たるみは無視する）。揺らす振幅 b を単位としている。$p=0.9n$（ティール）のとき、応答は b の約 10 倍まで膨らみ、再びしぼむ。うなりの周期は $\frac{2\pi}{n-p}$ である。ちょうど共振する $p=n$（プラム）のとき、振幅は限りなく増大する。

減衰と共振曲線

現実の系は摩擦や空気抵抗によってエネルギーを失い、それが振幅の増大を抑える。減衰（damping）があると、振動数 p の駆動力に対する定常応答の振幅は固有振動数の近くで最大になる。ピークが鋭いほど、減衰は小さい。技術者はこれを **Q 値**（quality factor）Q で表す。大まかに言えば、系がエネルギーの大部分を失うまでに行う振動の回数である。ワイングラスの Q は数千にもなるので、ちょうど固有振動数の音を持続させるとグラスが割れることがある。自動車のサスペンションには意図的に低い Q が与えられており、段差を越えても車体が弾み続けないようになっている。

揺れる橋

1831 年、マンチェスター近郊のブロートン吊り橋を歩調をそろえて行進する兵士の隊列が橋を振動させ、ついには崩落させた。それ以来、軍隊は橋の上では歩調を乱すよう命じられている。2000 年 6 月に開通したロンドンのミレニアム・ブリッジは、群衆が渡り始めるとすぐに横揺れを始めた。歩行者が無意識のうちに揺れに合わせて歩調を調整し、揺れと同じ位相でエネルギーを供給してしまったのである。橋は閉鎖され、ダンパーを取り付けるのに 2 年を要した。1940 年のタコマナローズ橋の有名な崩落はしばしば共振として説明されるが、実際には別の現象、すなわち**空力弾性フラッター**（aeroelastic flutter）であった。これは、風の力が橋自身の運動に依存す

る現象である。その解析には、自励振動（self-excited oscillation）とリミットサイクル（limit cycle）の考え方が必要になる（Section 8.4）。

次の一歩

1. **落下するエレベーター。** STEP II 1996、問 11（step.maths.org/questions/96-s2-q11）に挑戦してみよ。エレベーターの中で弾性ひもにつるされたおもりを扱う問題で、エレベーターは加速を始め、その後加速をやめる。最終的な振幅が、加速の続く時間によってどのように変わるかに注目せよ。

2. **共振するとき。** $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ のもとで $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$ を、特解 $x = Ct\cos nt$ を試すことで直接解け。それが上の極限と一致することを確かめよ。

3. **うなり。** $n\sin pt - p\sin nt$ が二つの項の和として書け、p が n に近いとき、そのうち一方がおよそ $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$ になることを示せ。それを用いて、うなりの周期が $\frac{2\pi}{n-p}$ となることを説明せよ。

4. **減衰のある共振。** 小さな $k > 0$ に対して $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$ の定常状態（steady state）の振幅を求め、それが $p^2 = n^2 - 2k^2$ のときに最大となることを示せ。

さらに学ぶために

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。『振動と波動』。強制振動と共振を扱った第 4 章は、この題材の古典的な解説である。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。『同期』。ホタルからミレニアム・ブリッジまで、ものごとがどのようにして歩調をそろえるのかを描く。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。『人はだれでもエンジニア』。歴史のコラムで取り上げた橋を含む、工学上の失敗を扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 11.1 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/resonance.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com