10.8 三角形をなす三つの星

ワークシート

問題

STEP I 1999、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s1-q11

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　星が角速度（angular velocity）ω で半径 R の円周上を運動するためには、星にはたらく力の合計はどのようでなければならないか。

段階 1　幾何

扱う内容：三つの星

? **考えてみよう**　一辺の長さが a の正三角形（equilateral triangle）の各頂点は、その中心からどれだけ離れているか。中心は各中線（median）を頂点から 3 分の 2 進んだ位置にあることを用いよ。

段階 2 一つの星にはたらく力

扱う内容：三つの星

手を止めて、やってみよう 他の二つの星はそれぞれ、辺に沿って大きさ $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ の力で引きつける。二つの引力のなす角はいくらか。それらの合力（resultant）を求め、その向きを述べよ。

段階 3 角速度

扱う内容：三つの星

考えてみよう R を中心までの距離として、合力を $m\omega^2 R$ と等しいとおき、ω について解け。

段階 4　中心に置いた四つ目の星

扱う内容：中心に四つ目の星を加える

> **考えてみよう**　中心の星には正味の力がはたらくか。中心の星は各頂点の星にどれだけの引力を新たに及ぼすか。それを合力に加え、もう一度 ω について解け。

背後にある数学

姿を変えたケプラーの法則

答えを $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$ と書いてみよう。距離 a だけ離れて円軌道を描く 2 つの物体については、ケプラーの第 3 法則（Kepler's third law、Section 10.6 の演習問題）により $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$ が成り立つ。右辺に現れるのは全質量である。3 つの星も、全質量を $3m$ として同じ法則に従う。実際ラグランジュは、正三角形解が等しい質量の場合に限らず**任意の** 3 つの質量に対して存在することを示した。三角形は重心のまわりを $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$ を満たして回転する。その数年前にはオイラー（Euler）が、3 つの物体が回転する 1 本の直線上に並ぶ別の解の族を見いだしていた。これら 5 つの配置（ラベルの付け方の違いを除いて、一直線上のものが 3 つ、三角形のものが 2 つ）が、3 つの物体が同じ形を保つ唯一の配置である。

ラグランジュ点

m_1 を太陽、m_2 を惑星、m_3 をごく小さな小惑星としよう。正三角形解によれば、小惑星は太陽と惑星とともに正三角形をなす第 3 の頂点、すなわち軌道上で惑星の前方または後方に位置することができる。これらが**ラグランジュ点**（Lagrange points）L_4 と L_5 であり、オイラーの一直線上の解からは L_1、L_2、L_3 が得られる。木星には、その L_4 点と L_5 点の周辺に集まる「トロヤ群」小惑星が 1 万個以上知られている。ジェームズ・ウェッブ宇宙望遠鏡（James Webb Space Telescope）は、地球から 1.5 百万 km

先にある太陽–地球系の L_2 点の近くを周回しており、そこでは太陽、地球、月をすべて日よけの背後に保つことができる。

安定性

スターメイカーたちの三角形は長続きするだろうか。質量が等しい場合は、続かない。ごくわずかな乱れが成長し、星々は飛び散るか衝突する。ラウス（Edward Routh）は1875年、ラグランジュの三角形が安定（stable）であるのは1つの質量が支配的な場合に限ること、正確には

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

が成り立つときに限ることを示した。太陽と木星についてはこれが余裕をもって成り立ち、それゆえトロヤ群は生き残っている。3つの等しい質量では $27 \times 3m^2 > 9m^2$ であるから、この配置は不安定である。

ポアンカレの誤りと8の字解

1887年、スウェーデン国王オスカル2世（Oscar II）は、多体問題の解に対して懸賞を設けた。1889年、ポアンカレは三体問題に関する長大な論文でこの賞を得たが、論文の印刷中に編集者が議論の欠陥を見つけた。それを修正する過程で、ポアンカレは、ある解が「あまりに驚くべき複雑さで、図を描こうと試みることさえできない」ふるまいをすることを発見した。これがカオスの最初の一端である。印刷済みの冊子は回収されて廃棄され、その費用はポアンカレが負担した。新しい特殊解は今なお見つかり続けている。1993年に Cristopher Moore が数値的に発見し、2000年に Alain Chenciner と Richard Montgomery が証明したように、3つの等しい質量は8の字形の曲線上を互いに追いかけ合うことができる。その後、計算機によって何千もの周期軌道（periodic orbit）が新たに見つかっている。

次の一歩

1. **正方形に並んだ4つの星。** 質量 m の4つの星が1辺 a の正方形の頂点に置かれている。これらが $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$ で中心のまわりを剛体的に回転しうることを示せ。

2. **2つの等しい星と1つの惑星。** 質量 M の2つの星が距離 a だけ離れて、重心のまわりを周回している。質量の無視できる惑星が中心にある。この惑星は平衡（equilibrium）状態にあるか。2つの星を結ぶ直線に沿った微小な変位に対して安定か。その直線に垂直な変位に対してはどうか。

3 **等しくない質量。**質量 m_1、m_2、m_3 の 3 つの星が 1 辺 a の正三角形の頂点にあり、重心 G のまわりを回転している。m_1 の位置を P_1 とするとき、m_1 にはたらく重力が $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$ であることを示せ（**ヒント：**力をベクトルで表し、重心の定義を用いよ）。これからラグランジュの結果を導け。

4 **n 個の星。**n 個の等しい星が、半径 R の円に内接する正 n 角形の頂点にある。剛体的な回転に対する ω^2 を、$\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ の k についての和として求めよ。

さらに学ぶために

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。懸賞の経緯と、ポアンカレによるカオスの発見の物語。
- **Richard Montgomery,「A new solution to the three-body problem」,** *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。発見者の 1 人による 8 の字解の解説。オンラインで無料で読める。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。三体問題とカオスの一般向けの歴史。

詳しい解説付きの解答は第 10.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/three-stars.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com