10.7 球殻の内部の重力

ワークシート

問題

STEP III 1999、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q9

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> ? **考えてみよう**　円環上で直径の両端に位置する二つの小さな部分を考えよ。それらが質点に及ぼす力を図示せよ。どの成分が打ち消し合い、どの成分が足し合わされるか。

段階 1　環（ring）

扱う内容：環

> ? **考えてみよう**　環のどの部分も粒子から同じ距離にあり、その部分へ引いた直線は軸と同じ角をなす。環の微小部分が及ぼす引力の、軸（axis）方向の成分（component）は何か。それらをすべて足し合わせよ。

段階 2 球殻（shell）を環に切り分ける

扱う内容：球殻

考えてみよう 粒子を軸上の、中心から距離 b の位置に置く。中心における角 ϕ によって、球殻を薄い環に切り分ける。その環の半径、軸に沿った粒子からの距離、そして質量はそれぞれ何か。

段階 3 適切な変数

扱う内容：球殻

手を止めて、やってみよう 分母には $a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ が含まれている。これを s^2 とおくと、s は何を表すか。積分変数を ϕ から s に変換（change of variable）せよ。積分区間はどうなるか。

段階 4　消えてしまう

扱う内容：球殻

? **考えてみよう**　s についての積分を計算し、整理せよ。

背後にある数学

ニュートンの円錐による議論

ニュートン自身の証明（**プリンキピア**、第 I 巻、命題 70）は積分をまったく使わない。質点を頂点とする細い二重円錐を描き、球殻を二つの小片で切り取る（図 10.7.1）。小片の面積は、質点からの距離の 2 乗 r_1^2 と r_2^2 に比例する（弦は両端で円と等しい角をなすので、二つの小片は円錐と等しい角をなす）。したがって小片の質量は r_1^2 と r_2^2 に比例し、質量を距離の 2 乗で割ったものに比例する引力は、大きさが**等しく**向きが逆になる。質点を通るどの二重円錐でも打ち消し合うので、力の総和は 0 である。この打ち消し合いを成り立たせているのは、まさに逆二乗則（inverse-square law）である。距離のほかのべきであれば、球殻は質点を押すか引くかすることになる。

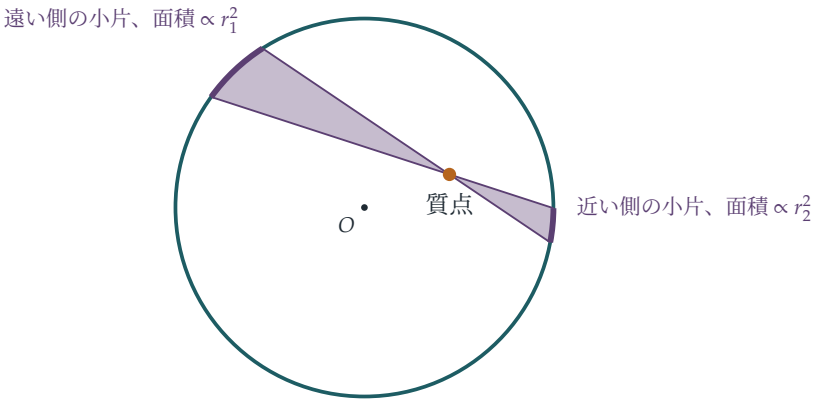

図 10.7.1　ニュートンの議論。質点から出る細い二重円錐が球殻を二つの小片で切り取る。遠い側の小片は距離の 2 乗の比だけ大きいが、その引力はちょうど同じ比だけ弱い。二つの引力は打ち消し合い、ほかのどの対も同様である。球殻の内部では重力が消える。

収縮する雲

STEP III 1987 Q14 は、この定理を逆向きに使う。一様な球の外側では、表面にある質点にはたらく引力は、全質量が中心にあるかのように GMm/r^2 である。いま、半径 R、質量 M の一様な球状の塵の雲が静止しているとし、それが自身の重力で収縮するとする。表面の質点が感じるのはその内側の質量だけであり、すべてが内側へ落ちていく間それは M のままである。よって内向きの速さ $v = -\dot{r}$ は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{したがって} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

を満たす。置換（substitution）$r = R\cos^2\alpha$（演習問題の一つ）により、半径 r に達するまでの時間は $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ となる。雲全体は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき一点に収縮する。それまでの時間が**自由落下時間**（free-fall time）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

である。ここで ρ は密度である。驚くべきことに、時間は密度だけで決まるので、雲のどの殻も同じ瞬間に中心に達する（図 10.7.2）。1 立方メートルあたり約 10^{-17} kg の典型的な星間雲では、t_{ff} はおよそ 700 000 年である。これが恒星が形成される時間の尺度を決めている。

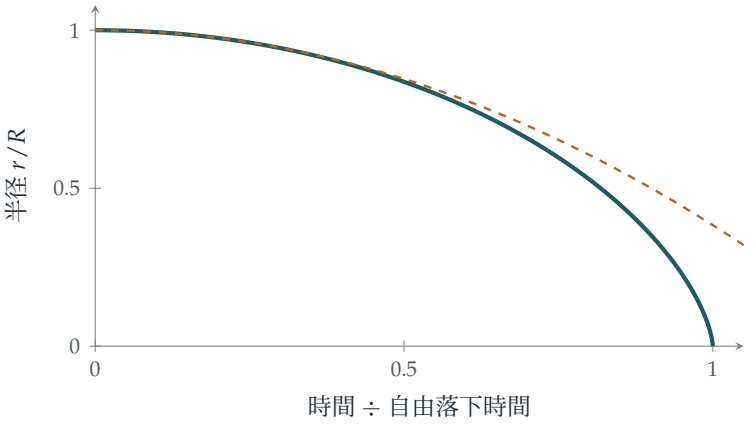

図 10.7.2　収縮する一様な塵の雲の半径と時間の関係（ティール色）。初めは落とした石のようにゆっくりと動き（琥珀色の破線の放物線は等加速度による近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$ である）、その後急激に加速して $t = t_{\text{ff}}$ で 0 に達する。この曲線はサイクロイド（cycloid）の半分である。

ニュートンの遅れとガウスの法則

ニュートンは 1660 年代までに逆二乗則を得ていたが、重力理論を発表したのは 1687 年になってからであった。一部の歴史家によれば、その理由の一つは、殻定理を証明するまでは地球を質点（point mass）とみなすことを正当化できなかったことにある。それを証明してしまうと、**プリンキピア**の残りの部分はそこから導かれた。今日では、この定理は**ガウス（*Gauss*）の法則**（Gauss's law）から簡単に導かれる。ガウスの法則とは、任意の閉曲面を通って外へ流れ出る重力場の総量は、その内部の質量に比例する、というものである。球殻の内部に、同じ中心をもつ球面をとる。その内部には質量がないので、そこを通る流れの総量は 0 である。それだけでは場が 0 になるとはいえない（一様な場は、一方の側から流れ込み反対側から流れ出るので、どの閉曲面を通る流れの総量も 0 である）。しかしここでは対称性が助けになる。場は中心へまっすぐ向かうか中心からまっすぐ離れる向きであり、球面上のどこでも強さが等しくなければならない。したがって流れの総量が 0 ならば場も 0 である。同じ法則が電場も支配する。帯電した金属の殻の内部に電場がないのも、自動車が雷から人を守ってくれるのも、このためである。

次の一歩

1 **球殻の外側。**先ほどの囲みの問いを完成させ、球殻の外側では力が $\frac{GM}{b^2}$ であることを示せ。これより、質量 M の中身の詰まった一様な球は、外側の質点を、その質量が中心にあるかのように引くことを導け。

2 **収縮時間。** STEP III 1987、問 14（step.maths.org/questions/87-s3-q14）に取り組んでみよ。塵の雲が自身の重力で収縮するのにかかる時間を求める問題であり、積分は三角関数による置換で計算できる。

3 **地球を貫くトンネル。** 一様な中身の詰まった球の内部で、中心から距離 b の点における力が $\frac{GMb}{a^3}$ であり、b に比例することを示せ。これより、地球の中心を通るトンネルに落とした球は周期（period）$2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$、すなわち約 84 分で振動（oscillate）することを導け。これは地表すれすれを回る人工衛星の周期と同じである。

4 **別の力の法則。** もし重力が逆三乗則に従うとしたら、球殻の内部での力はやはり 0 になるだろうか。（$\frac{1}{s^2}$ の代わりに $\frac{1}{s^3}$ として段階 3 をやり直せ。）

さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。重力を扱った章で、殻定理も含まれる。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。命題 70 と 71 を含むニュートンの証明を、ノーベル賞受賞者が解説している。
- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。重力、収縮、シミュレーションによって宇宙の構造がどのように説明されるかを述べている。

詳しい解説付きの解答は第 10.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/shell-theorem.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com