10.6 二体が一体になる

ワークシート

問題

STEP III 2004、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q11

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　それぞれの粒子についてニュートンの第 2 法則を書き下せ。それぞれの力はどちら向きにはたらくか。

段階 1　2 物体間の距離

扱う内容：z についての方程式

考えてみよう　P と Q それぞれについてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を書け。その際、各力の向きに注意すること。次に、辺々を引いて z だけについての方程式を得よ。

段階 2 距離についてのエネルギー

扱う内容：z を求める

考えてみよう $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ と書き、変数分離（separation of variables）して積分せよ。$t = 0$ における z と $\dot{z}$ の値は何か。

段階 3 意外なほど簡単な解

扱う内容：z を求める

手を止めて、やってみよう 答えは z^2 に関するものなので、$w = z^2$ とおけ。$\dot{w}^2$ を w で表し、それを微分せよ。$\ddot{w}$ はどうなるか。w と $\dot{w}$ の初期値（initial value）を用いよ。

段階 4　重心

扱う内容：x_1 と x_2 を求める

> **考えてみよう**　二つの運動方程式（equation of motion）を足し合わせて、力が打ち消し合うようにせよ。このことから $2x_1 + x_2$ について何がわかるか。これを $x_2 - x_1 = z$ と組み合わせよ。

背後にある数学

なぜ z^2 は 2 次式になるのか

$\ddot{z} = k/z^3$ の形の任意の力の法則について、同じ計算により $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 定数となる。$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ が保存されるエネルギーだからである。したがって z^2 はつねに t の 2 次式である。それはなぜか。

隠れた理由はこうである。**平面**内を、力を受けずに直線上を一定の速さで運動する粒子を考える。原点からの距離 r は、$r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$ であるから、$r^2 =$ (2 次式、変数 t) を満たす。また極座標（polar coordinates）では動径方向の運動方程式は $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$ であり、角運動量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ が一定であることから、これは

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

となる。逆 3 乗の斥力は、まさに隠れた回転運動による**遠心力**（centrifugal）の効果なのである。この問題では、$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ は、原点から距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のところを通る直線上を速さ 2 で動く点の、原点からの距離の 2 乗である。1 次元で反発し合う粒子は、2 次元における自由運動の影なのである。

二体問題

この問題の方法は、2 物体間の力が相対距離だけに依存し、2 物体を結ぶ直線に沿ってはたらくものであれば、1 次元に限らず 3 次元でも通用する。重心は等速運動をし、相

対位置ベクトル $\mathbf{r}$ は $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ として $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ に従う。重力の場合、これは**ケプラー問題**（Kepler problem）であり、ニュートンが『*Principia*』（プリンキピア）で解いた。相対位置は楕円、放物線、双曲線のいずれかを描く。地球と太陽はともに共通の重心のまわりを公転しており、その重心は太陽の内部にある。地球と月は地球の中心から約 4700 km の点のまわりを回っており、その点は地球の内部にあるが中心からはかなり離れている。地球が月ごとに揺れ動くのはこのためである。天文学者は、恒星のまさにこの揺れを検出することで、ほかの恒星のまわりの惑星を発見している。

可積分系

1969 年、Francesco Calogero は、直線上にある多数の粒子が逆 2 乗のポテンシャル（すなわち逆 3 乗の力）で互いに反発し合う系を研究し、驚くべきことに、粒子の個数によらずこの系が厳密に解けることを発見した。1975 年、Jürgen Moser は、時間発展しても固有値（eigenvalues）が一定に保たれる行列、すなわち Section 7.7 の *Lax 対*（Lax pairs）を用いてその理由を説明した。*Calogero–Moser* 系は現在、**可積分系**（integrable system）、つまり完全に解けるだけの十分な数の保存量をもつ系の中心的な例となっており、力学をランダム行列、場の量子論、ソリトン（solitons）の理論と結びつけている。

次の一歩

1. **糸で結ばれた 2 つの質点。** STEP III 2023、問 9（OCR が配布している 2023 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip）に挑戦せよ。糸で結ばれた 2 粒子の運動を、重心を用いて分離しながら追う問題である。一方の粒子が後ろ向きに動くのはいつかに注目せよ。

2. **引力。** 力を引力 $\frac{2}{z^3}$ にして同じ問題を解け。z^2 がやはり t の 2 次式であることを示し、2 粒子が衝突する時刻を求めよ。

3. **隠れた平面。** この問題の運動について、原点からの距離が $z(t)$ となる平面内の直線と、掃過される角 $\theta(t)$ を求めよ。$z^2\dot{\theta}$ が一定であり、$(z^2\dot{\theta})^2 = 3$ であることを確かめよ。

4. **ケプラーの第 3 法則。** 質量 m_1 と m_2 の 2 つの恒星が、距離 a を保ちながら重力のもとで重心のまわりを円運動している。周期 T が $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$ を満たすことを示せ。

さらに学ぶために

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books）、第 8 章。二体問題、換算質量、軌道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、第 10 章、中心力について。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。意欲的な読者向け：厳密に解ける系の世界。

詳しい解説付きの解答は第 10.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/two-body.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com