10.5 有限時間に無限回の跳ね返り

ワークシート

問題

STEP III 2002、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q11

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　はね返り係数 e のなめらかな壁に粒子が衝突するとき、速度の壁に沿った成分はどうなるか。壁に垂直な成分はどうなるか。

段階 1 離れる角度

扱う内容：e と v_1/u_1 を求める

考えてみよう 粒子が壁 OA に対して角 φ をなして M_1 を離れるとする。三角形 OM_1N_1 の内角の和を考えて、φ を θ で表せ。

手を止めて、やってみよう なめらかな壁では、速度の壁に沿った成分は変わらず、壁に垂直な成分は e 倍になる。これを角 θ、φ とあわせて用い、e と v_1/u_1 を求めよ。

段階 2　同じパターンの繰り返し

扱う内容：有限時間で O に到達する

考えてみよう　N_1 において、粒子は壁 OB にどのような角度で当たるか。M_1 で起きたことと比べよ。それ以降の跳ね返りではそれぞれ何が起きるか。

段階 3　二つの比

扱う内容：有限時間で O に到達する

手を止めて、やってみよう　三角形 OM_1N_1 に正弦定理（sine rule）を用いて、経路の各区間がその前の区間より何倍に短くなるかを求めよ。速さは跳ね返るたびに v_1/u_1 倍になる。各区間を進むのにかかる時間は何倍になるか。

段階 4 等比級数

扱う内容：有限時間で O に到達する

考えてみよう かかる時間の合計は等比級数（geometric series）である。その公比が 0 と 1 の間にあるのはどのようなときか。$\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$ を用いよ。

背後にある数学

$\theta \geq 60^\circ$ のとき

$\theta = 60^\circ$ のとき、比はちょうど 1 である。どの区間にも同じ時間がかかり、粒子は O にいくらでも近づくものの、決して到達しない。（速さと区間の長さがどちらも同じ倍率で縮むためである。）$\theta > 60^\circ$ のときは、区間にかかる時間はどんどん長くなる。いずれの場合も粒子は O に近づき、無限回はね返るが、有限の時間で到達するのは $\theta < 60^\circ$ のときだけである。値 $e = \tan 30^\circ / \tan 60^\circ = \frac{1}{3}$ がその境目である。

はずむボールと非弾性崩壊

同じ現象の最も簡単な例として、床に落としたボールは高さ e^2H まで上がり、次に e^4H まで上がり、と続く。はね返りの間隔はそれぞれのはね返りでの速さに比例し、速さは倍率 e で縮むので、合計時間は等比級数になる。最初の落下にかかる時間を $T_0 = \sqrt{2H/g}$ とすると、ボールは

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

の後にはずむのをやめる。無限回はずんで、そして静止するのである。1992 年、Sean McNamara と William Young は、一直線上に並んだ多数の非弾性粒子のシミュレーションでも同じことが起こることを示した。粒子の集団が有限の時間内に無限回の衝突を起こしうるのであり、これが「非弾性崩壊」である。砂や粒状流のシミュレーショ

ンでは、これを避けるための特別な規則を組み込まなければならない。また、この現象は粒状気体が自発的にクラスターを形成する理由の説明にも役立っている。

ゼノンと収束

紀元前 450 年頃のゼノンのパラドックスは、二千年にわたって哲学者たちを悩ませた。数学的な解決、すなわち無限和が有限の値をもちうるということが厳密にされたのは、ようやく 19 世紀になってからである。このとき、コーシー（Cauchy）、ワイエルシュトラス（Weierstrass）らが極限を用いて収束を定義した（第 2 章の主題である）。この問題の驚くべき点は、過程が**物理的に**無限であることである。有限の時間内に、本当に無限回の衝突が起こるのである。多角形の中のビリヤードや衝突する粒子の運動を研究する数学者は、このような振る舞いを**ゼノン現象**と呼ぶ。これは、衝突する剛体球の系がすべての時刻にわたって矛盾なく定まった運動をもつことを証明する際の難所の一つである。

次の一歩

1. **移動距離の合計。** 30° と 90° の間のすべての θ について、M_1 から O までに移動する距離の合計が有限であることを示し、それを OM_1 と θ で表せ。

2. **ほかのくさび。** 30° の代わりに角 α のくさびについて、この問題をもう一度考えよ。$\varphi = \theta - \alpha$ を示し、粒子が有限の時間で O に到達するための θ の条件を求めよ。

3. **弾性的な壁。** $e = 1$ のとき、粒子が O に到達することはあるか。（ヒント：くさびをその壁に関して繰り返し折り返し、経路が直線になるようにせよ。30° のくさびの写しは O のまわりにいくつ収まるか。）

4. **はずむボール。** ボールを高さ 1 m から $e = 0.8$ で落とす。ボールはどれだけの時間はずみ続け、合計でどれだけの距離を移動するか。（$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とせよ。）

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。はずむボールや無限に続く衝突の列に関する問題がいくつか収められている。
- **Sean McNamara & William Young,「Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium」**, *Physics of Fluids A* 4 (1992).
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society、オンラ

インで無料公開)。ビリヤードの数学を扱い、演習問題で用いた折り返しの技法も含まれている。

詳しい解説付きの解答は第 10.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/zeno-wedge.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com