10.4 分子とピストン

ワークシート

問題

STEP I 2002、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s1-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　速さ w で動くボールが、速さ u でこちらに向かって動いてくる壁に当たり、弾性的に（elastically）跳ね返る。跳ね返ったあとの速さはいくらか。（壁とともに動く座標系（frame）で考えよ。）

段階 1　n 回跳ね返った後の速さ

扱う内容：速さ

? **考えてみよう**　1 回の衝突（collision）を、ピストンとともに動く座標系（frame of reference）で考えよ。衝突の前後で、ピストンに対する粒子の相対速さはいくらか。それを地面に固定した座標系に戻すといくらになるか。固定された端で跳ね返るとき、速さは変わるか。

段階 2 長さについての漸化式

扱う内容：距離

> **手を止めて、やってみよう** n 回目と $(n+1)$ 回目の衝突の間、すなわち時間 t_n の間に、ピストンはどれだけ動くか。粒子はどれだけ進むか。どちらも d_n と d_{n+1} を用いて表し、一方を他方で割って t_n を消去せよ。

段階 3 次々に打ち消し合う積（telescoping）

扱う内容：d_n の式

> **考えてみよう** 漸化式（recurrence）を繰り返し用いて、d_n を d_1 と分数の積の形で表せ。何が打ち消し合うか。

段階 4　$v = u$ の場合

扱う内容：$v = u$ の場合

> **考えてみよう**　d_n の式に $v = u$ を代入せよ。次に $ut_n = d_n - d_{n+1}$ を用い、部分分数（partial fractions）に分解せよ。

背後にある数学

断熱不変量

速さに長さを掛けてみよう。

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1 \approx (v+u)d_1$$

が、n が大きいとき、あるいは u が v よりはるかに小さいときに成り立つ。したがって

$$\text{速さ} \times \text{長さ} \approx \text{一定}.$$

ピストンが分子に比べてゆっくり動くならば、ピストンがどれだけ動いても積 vd はほとんど変化しない。このように、系をゆっくり変化させたときにほぼ一定に保たれる量を**断熱不変量**という。一般に、往復運動の断熱不変量は $\oint p\,\mathrm{d}q$、すなわち運動量を一周期にわたって積分したものである。ここではそれは $mv \times 2d$ となる。

一つの分子から気体へ

$v \propto 1/d$ であるから、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は $1/d^2$ に比例する。多数の分子が一方向に沿って運動する気体では、温度は運動エネルギーの平均に比例するので $T \propto 1/d^2$ となる。つまり、長さを半分にすると温度は 4 倍になる。三次元では、エネルギーは三つの運動方向に分配され、同じ議論（ファインマン（Feynman）が**講義録**で述べているもの）によって、単原子気体の断熱圧縮の法則

$$TV^{2/3} = \text{一定}, \qquad \text{すなわち} \qquad pV^{5/3} = \text{一定}.$$

が導かれる。指数 $\frac{5}{3}$ は、単原子気体の比熱比 γ として知られる値である。自転車の空気入れの中の空気を体積の 5 分の 1 まで、素早く、熱が逃げないように圧縮したとすると、絶対温度は $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍になる（空気の分子は二原子分子なので、代わりに $\gamma = 1.4$ となる）。つまり 20°C から約 280°C になる。空気入れがそこまで熱くならないのは、圧縮がゆっくりで、熱が逃げていくからにすぎない。

フェルミの宇宙線

1949 年、エンリコ・フェルミ（Enrico Fermi）は、宇宙から莫大なエネルギーをもって飛来する粒子である宇宙線が、まさにこの問題の分子と同じしくみで加速されていると提唱した。すなわち、星間ガス雲の中を動く磁場に何度も跳ね返され、そのたびに少しずつエネルギーを得るというのである。現在では、この「フェルミ加速」は超新星残骸の衝撃波で起こっていると考えられている。そこでは粒子が、ピストンと壁の間を行き来する分子のように、衝撃波を何度も往復して横切る。断熱不変量は量子力学の誕生にも一役買った。1916 年、パウル・エーレンフェスト（Paul Ehrenfest）は、ゆっくりとした変化によって系が量子状態の間を飛び移ることはありえないから、量子化される量は断熱不変量でなければならないと論じたのである。

次の一歩

1. **不変量を厳密に。** $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ を示し、$n \to \infty$ のとき $v_n d_n \to (v+u)d_1$ となることを導け。

2. **ピストンを引き抜く。** ピストンを速さ $u < v$ で引き抜く場合について、問題を考え直せ。粒子が遅くなることを示し、$v_n d_n$ を求めよ。（膨張する気体は冷える。）

3. **エネルギー。** $v = u$ の場合、ピストンが端に近づくにつれて分子の速さは限りなく大きくなる。n 番目の周期の間にピストンにはたらく平均の力（運動量の変化を t_n で割ったもの）を求め、それが n^3 のように増大することを示せ。このことは、ピストンを最後まで押し込むのに必要な仕事について何を意味するか。

4. **弾むボール。** 重力のもとで床の上を弾性的に弾むボールがあり、床をゆっくりと持ち上げていく。この運動の断熱不変量を推測せよ。（**ヒント：**vd に相当するのは、平均の速さと跳ね上がる高さの積、あるいは同じことだが、エネルギーと跳ね返りの間の時間の積である。）

さらに学ぶために

► **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*,**

Vol. I（『ファインマン物理学』、オンラインで無料公開）、第 39 章「The kinetic theory of gases」（気体分子運動論）。同じピストンの議論を三次元に拡張している。

- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press、熱物理学の入門書）。断熱過程と気体分子運動論を大学 1 年生の水準で扱っている。
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann、ランダウ＝リフシッツ『力学』）、§49。断熱不変量の簡潔な解説。もう少し先で読むとよい。

詳しい解説付きの解答は第 10.4 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/piston.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com