# 10.3 ロケットと大砲

## ワークシート

### 問題

**STEP III 2017、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q11

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　砲を撃つ前、トラックは速度 $V$ で動いている。発射後の弾丸の速度は $V - v$ である（すなわち、後ろ向きに速さ $v - V$）。**発射前のトラックに対する**弾丸の相対速度はいくらか。

### 段階 1　一斉に発射する

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　最初はすべてが静止しているので、全運動量（momentum）は 0 である。$V = 0$ のとき、各発射体（projectile）は速度 $-v$ で飛び出す。運動量の式を書いて $u$ を求め、それから運動エネルギー（kinetic energy）を足し合わせよ。

### 段階 2 一つずつ発射する

扱う内容：小問 (ii)

**手を止めて、やってみよう** $r$ 回目の発射の直前に、台車（truck）は何個の発射体を積んでいるか。したがって運動している質量はいくらで、その速さはいくらか。発射後、発射された発射体の速さはいくらか。運動量保存則（conservation of momentum）の式を書き、変形して $(*)$ を導け。

**考えてみよう** $(*)$ から得られる増分 $u_r - u_{r-1}$ を足し合わせよ。各項を $\frac{mv}{M}$ と比較せよ。

### 段階 3　エネルギーの収支

扱う内容：小問 (iii)

**考えてみよう**　$K_r - K_{r-1}$ を書き出せ。速さが変化するのは、積荷を載せた台車と、いま発射された発射体だけである。

**手を止めて、やってみよう**　$u_r^2 - u_{r-1}^2$ の項を二乗の差（difference of two squares）として因数分解し、$(*)$ を用いて $(M+(n-r)m)(u_r - u_{r-1})$ を置き換えよ。そのうえで $r$ について和をとると、増分は次々に打ち消し合う（telescope）。

## 背後にある数学

### 何を固定すべきか

実際の砲やロケットエンジンは、弾丸が離れた直後に測った**自分自身**に対する相対速度が一定になるように弾丸を撃ち出す。この問題では、基準は**発射前の**トラックの速さである。弾丸が小さければこの違いはごくわずかだが、$n$ 個の弾丸をすべて一斉に撃つ場合には大きな違いになる。小問 (i) では、重い弾丸の塊が、あたかもトラックがまったく反動（recoil）を受けないかのように速さ $v$ で後方へ投げ出されており、そ

のためには多くのエネルギーが必要となる。

そうではなく、すべての弾丸が**発射後の**トラックに対して速さ $v$ で離れるとすると、結論は逆転する。一斉に撃つと $u = \frac{nmv}{M+nm}$ となり、一つずつ撃つと $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$ となる。各項は $\frac{mv}{M+nm}$ 以上であるから、後者のほうが大きい。今度は一つずつ撃つほうが有利である。各弾丸はすでに動いているトラックから押し出され、後の砲ほど加速すべき質量が少なくて済むからである。（演習問題で確かめよ。）

### ロケット方程式

次に、全質量 $\mu = nm$ を一定に保ったまま、弾丸を非常に小さく、非常に多くしていく。これは燃料を連続的に燃やすロケットである。$u_n$ を表す和は積分（integral）になる（どちらの規約でも同じ極限が得られる）。

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

これが**ツィオルコフスキーのロケット方程式**である。排気がロケットに対して速さ $v$ で噴出するロケットは、次の速さを得る。

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{initial}}}{m_{\text{final}}}.$$

図 10.3.1 は三つの答えを比較したものである。問題となるのは対数である。排気速度（exhaust speed）が約 4.5 km/s（優れた化学燃料）のとき、約 7.8 km/s の軌道速度（orbital speed）に達するには、質量比（mass ratio）が $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$ でなければならず、空気抵抗と重力を考慮すれば 10 以上に近くなる。ロケットのほとんどすべては燃料なのである。

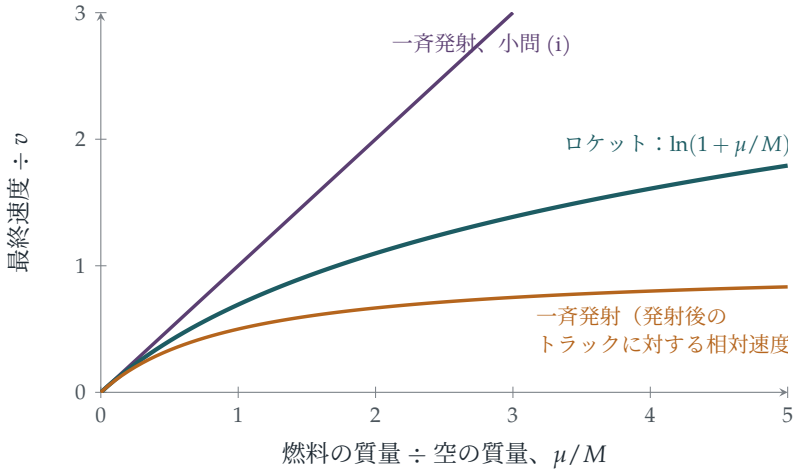


**図 10.3.1**　燃料と空の質量の比に対する最終速度。すべてを一斉に撃つと、問題の規約では $\mu/M$（紫）となるが、排気速度を反動を受けるトラックに対して測ると $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）にすぎない。連続的に噴射するロケットはその間にあり、$\ln(1+\mu/M)$（青緑）となる。この図は不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ を表している。

## ロケットが多段式である理由

対数は多段化（staging）の理由も説明する。途中で空になった燃料タンクを切り離すロケットは、もはやその無駄な質量を加速する必要がない。各段で得られる速さは（砲の場合と同じように）**足し合わされる**一方、各段の速さの増加はその段の質量の**比**で決まる。したがって、ロケットを複数の段に分けると、同じ全質量の一段式ロケットでは到達できない速さに達することができる。宇宙飛行士を月へ運んだサターン V（Saturn V）は三段式であり、その第一段は 3 分足らずで約 2000 トンの燃料を燃やした。

### ツィオルコフスキー

コンスタンチン・ツィオルコフスキーは、ロシアの地方都市カルーガの耳の不自由な教師であった。彼は 1903 年、「Exploration of outer space by means of reaction devices」（反作用装置による宇宙空間の探査）と題する論文でロケット方程式を発表した。彼は多段式ロケット、液体水素と液体酸素の燃料、宇宙ステーションについて、それらが実際に作れるようになる何十年も前に考察していた。この方程式はそれ以前にも、あまり目立たないところに現れていた（William Moore が 1810 年にその一つの形を導いている）が、それが宇宙飛行にとって何を意味するかを初めて見抜いたのはツィオルコフスキーであった。「地球は人類のゆりかごである。しかし、人は

いつまでもゆりかごの中で暮らすことはできない」と彼は書いている。

## 次の一歩

1 **もう一つの規約。** 各弾丸が発射後のトラックに対して速さ $v$ で離れるとして、小問 (i) と (ii) をやり直せ。このときは一つずつ撃つほうが最終速度が大きくなることを示せ。

2 **塵の雲の中の彗星。** STEP III 2009、問 11（step.maths.org/questions/09-s3-q11）に挑戦せよ。ロケットと同様の可変質量（variable mass）の問題であるが、彗星は質量を失うのではなく得ていく。彗星の速さが近づいていく値に注目せよ。

3 **二段式。** 排気速度 $v$、空の質量 $M$、燃料の質量 $9M$ のロケットがある。その最終速度を求めよ。次に、これを空の質量 $\frac{1}{2}M$、燃料 $4.5M$ の二つの段に分け、第一段は空になった時点で切り離すとする。最終速度を比較せよ。

4 **不等式。** 区間 $[0, x]$ 上で $\frac{1}{1+s}$ を 1 および $\frac{1}{1+x}$ と比較することにより、$x \geq 0$ に対して $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ を証明せよ。

## さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、第 4 章。運動量、可変質量、ロケット方程式。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工学の標準的な教科書。冒頭の数章は、この節を読んだ後なら読みこなせる。
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA による英訳、オンラインで無料公開）。宇宙開発の先駆者オーベルト（Oberth）自身による解説。

詳しい解説付きの解答は第 10.3 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/rockets.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com