10.2 重ねたボールの効果

ワークシート

問題

STEP II 2010、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s2-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　Section 10.1 より：速さ u で運動する質量 M が、静止している質量 m に弾性衝突（elastic collision）するとき、衝突後の m の速さはいくらか。

段階 1 速さの上限

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 運動量保存則（conservation of momentum）と弾性衝突（elastic collision）の条件（あるいは、運動している質量が静止している質量に衝突するときの結果）を用いて、A の速さを b と u で表せ。

手を止めて、やってみよう $\frac{2b}{b+1}$ を「2 から正の数を引いたもの」の形に書き直せ。$b \to \infty$ のとき何が起こるか。

段階 2　鎖に沿って受け渡す

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　各粒子の質量は、隣の粒子の λ 倍である。したがって、各衝突は $b = \lambda$ とした小問 (i) そのものである。1 回の衝突ごとに、速さは何倍になるか。

手を止めて、やってみよう　n 回の衝突の後、速さは u にその倍率の n 乗を掛けたものになる。$\lambda > 1$ のとき、その倍率は 1 より大きいか、小さいか。

段階 3　20 倍の速さ

扱う内容：$\lambda = 4$ の場合

> **考えてみよう** $\lambda = 4$ のときは $1.6^n > 20$ となればよい。$1.6 = 16/10$、$20 = 2 \times 10$ と書いて、底 10 の対数（logarithm）をとれ。

背後にある数学

バスケットボールとテニスボール

二つの球を高さ H から一緒に落とし、速さ $U = \sqrt{2gH}$ で床に達するとする。すべてが完全弾性的で、バスケットボールのほうがはるかに重いと仮定する。バスケットボールは床で跳ね返って上向きに速さ U をもち、すぐに、まだ速さ U で落下しているテニスボールと出会う。バスケットボールの座標系（frame）では、テニスボールは $2U$ で近づき、非常に重い物体で跳ね返って $2U$ で離れていく。地面の座標系に戻すと、これは上向きに $2U + U = 3U$ である（図 10.2.1）。到達する高さは打ち出す速さの 2 乗に比例するので、テニスボールは $9H$ まで上がる。

実際の球は完全弾性的ではない。反発係数（coefficient of restitution）を e、質量比を M/m とすると、テニスボールは速さ $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$ で離れていく。演習問題にある STEP I 2014 Q10 では、測定された高さから逆算して質量比を求める。

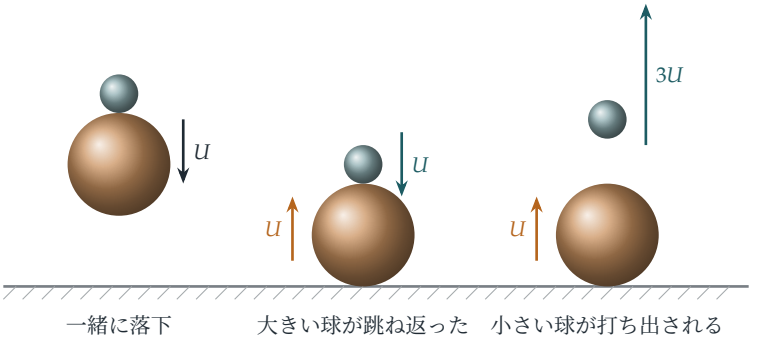

図 10.2.1　積み重ねた球の効果。球は完全弾性的で、下の球のほうがはるかに重いとする。大きい球は速さ U で跳ね上がり、U で落ちてくる小さい球と出会う。大きい球から見ると、小さい球は $2U$ で到着して $2U$ で離れるので、地面の座標系では $3U$ で離れ、もとの高さの 9 倍まで達する。

スイングバイ

惑星のそばを通過する宇宙探査機は惑星に触れることはないが、重力は非常に重い物体との非常に柔らかい弾性衝突のようにはたらく。これをスイングバイ（gravitational slingshot）という。惑星の座標系では、探査機は回り込んで、到着したときと同じ速さで離れていく。惑星が速さ V で探査機に向かって動いているならば、太陽の座標系では、探査機はテニスボールとまったく同じように最大 $2V$ の速さを得ることができる。1977 年に打ち上げられた 2 機のボイジャー探査機は、外惑星がまれにしか起こらない配置に並んだ機会を利用して木星から土星へ（ボイジャー 2 号はさらに天王星と海王星へ）と進み、遭遇のたびに速さを得た。こうした重力アシストがなければ、海王星までの旅には 12 年ではなく約 30 年かかっていたであろう。エネルギーは惑星から供給され、惑星は測定できないほどわずかに減速する。

スーパーボールと超新星

1968 年、W. R. Mellen は *American Journal of Physics* 誌で、大きさが次第に小さくなるいくつかの球を積み重ねて作る「スーパーボール跳ね返り発射体」を紹介し、一番上の球が衝突時の速さの何倍もの速さで打ち出されうることを指摘した。天体物理学者は、これと重力崩壊型超新星との大まかな類似を指摘している。星の外層が落ち込んで、硬く高密度な中心核で跳ね返り、衝撃波（shock wave）が運動量をますます密度の低い物質へと外向きに運び、それを莫大な速さにまで加速するのである。積み重ねた球の効果の実演は、この考え方を学生に説明するのに用いられるが、実際の超新星には、跳ねる球よりはるかに多くの物理、たとえばニュートリノ（neutrino）がかかわっている。

次の一歩

1 **現実の場合。**STEP I 2014、問 10（step.maths.org/questions/14-s1-q10）に挑戦してみよう。具体的な数値と不完全な跳ね返りを扱う、積み重ねた球の問題である。

2 **非弾性的な連鎖。**STEP I 2017、問 10（step.maths.org/questions/17-s1-q10）に挑戦してみよう。質量が等比数列的に増えていく粒子の列に沿って衝突を伝えていく問題である。各粒子がちょうど 2 回の衝突にかかわるのはどのような場合か。

3 **3 個の球。**完全弾性的な 3 個の球を、それぞれが下の球よりはるかに軽くなるように積み重ねる。一番上の球は $7U$ で離れ、$49H$ まで上がることを示せ。球が k 個のとき、一番上の球は $(2^k - 1)U$ で離れることを示せ。

4 **エネルギーはどこから来るのか。**小問 (ii) で、A の速さが非有界であるにもかかわらず、運動エネルギー（kinetic energy）の総和が保存されることを示せ。重い粒子たちはどうなるか。

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。積み重ねた球の問題が含まれている。
- **W. R. Mellen, “Superball rebound projectiles”**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。短くて楽しい論文である。
- **Gary Flandro, “Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter”**, *Astronautica Acta* 12 (1966)。ボイジャーの「グランドツアー」を提案した論文である。

詳しい解説付きの解答は第 10.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/stacked-balls.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com