10.1 ニュートンのゆりかご

ワークシート

問題

STEP II 1990、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q14

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　質量 m のビー玉が速さ u で、静止している質量 M のビー玉に衝突し、運動エネルギー（kinetic energy）が保存されるとする。衝突後の速度はいくらか。$M = m$ の場合はどうなるか。

段階 1 最後の 2 個だけが動く場合

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 衝突後に動くのが A_n と A_{n+1} だけであると仮定する。運動量保存（conservation of momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）の保存を式に書き下せ。これらは質量 m と λm の 2 物体の 1 回の衝突（collision）に対する式そのものである。

手を止めて、やってみよう A_n の速度を求めよ。$\lambda > 1$ のとき、A_n はどちら向きに動くか。そのすぐ後ろには何があるか。

段階 2　3 個のビー玉

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　今度は A_{n-1}、A_n、A_{n+1} だけが、それぞれ速度 a、b、c で動くとする。A_{n-1} の後ろで静止しているのはどのビー玉か。どのビー玉も前にあるビー玉を追い越せないことから、0、a、b、c の間にはどのような不等式（inequality）が成り立つか。

手を止めて、やってみよう　運動量の式を 2 乗し、エネルギーの式を引け。$\lambda > 1$ のとき、各項の符号はどうなるか。そこから何が導かれるか。

段階 3 動くことのできる 2 個のビー玉

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 小問 (ii) の議論により、動くビー玉がすべて前向きに進むような結果はありえない。したがって、どれかのビー玉は後ろ向きに動かなければならない。後ろに何もないビー玉はどれか。そのビー玉と A_{n+1} だけが動く場合を試してみよ。

背後にある数学

なぜ球が 1 個だけ飛び出すのか

等しい球からなるニュートンのゆりかごで、k 個の球がそろって速さ w で飛び出すとする。運動量保存より $kw = u$、エネルギー保存より $kw^2 = u^2$ である。割り算をすると $w = u$ かつ $k = 1$ となる。したがって、飛び出す球がそろって動く結果のうち、両方の法則を満たすのは「1 個の球が元の速さで飛び出す」ものだけである。半分の速さの 2 個の球は運動量は正しいがエネルギーは半分しかない。2 倍の速さの 1 個の球が正しい運動量をもつのは、それが球の半分である場合に限られる。

しかし、これで決着がつくわけではない。n 個の球があれば未知の速度は n 個あるのに保存則は 2 つしかないので、両方を満たす結果は無数にある（3 個の球が異なる速さで動くものを 1 つ見つけてみよ）。実際にどれが起こるかは、接触中に球がどのように変形するかによる。1980 年代初頭、Frank Herrmann とその共同研究者たちは、おなじみの振る舞いは衝撃が列に沿って広がることなく伝わることに依存しており、それはわずかな隙間を空けて並べた硬い鋼球で起こることを示した。柔らかい球や、互いにきつく押しつけられた球では、ゆりかごの振る舞いはそれほどきれいではなくなり、精密な測定によれば、他の球も常にわずかに動いている。

保存則と対称性

保存則はどこから来るのだろうか。1918 年、エミー・ネーター（Emmy Noether）は、現代物理学の基礎の 1 つとなる定理を証明した。物理系の連続的な対称性（symmetry）のそれぞれから、保存量が 1 つ得られるというものである。物理法則がここでも 1 メートル左でも同じであれば（空間並進に関する対称性）、運動量が保存される。今日も明日も同じであれば（時間並進に関する対称性）、エネルギーが保存される。どの向きにも同じであれば（回転対称性）、角運動量が保存される。ネーターの定理には、大学 2 年次のラグランジュ力学の講義で出会うことになるだろう。本章では全体を通してその帰結を用いる。

ホイヘンス（Huygens）、レン（Wren）、ウォリス（Wallis）

1668 年、王立協会は物体の衝突の問題に対する解答を募った。ジョン・ウォリスは非弾性衝突を扱い、クリストファー・レンとクリスティアーン・ホイヘンスはそれぞれ独立に弾性衝突（elastic collision）の場合を解いた。ホイヘンスの鍵となる洞察は、座標系を変えることであった。重心とともに動く船から衝突を眺めると、2 つの等しい球は単に速さが逆向きになって跳ね返るだけであり、その後、岸の座標系に戻せばよい。彼はまた、ある量、すなわち質量と速さの 2 乗の積の和が衝突の前後で等しいことにも気づいていた。もっとも、運動エネルギーがそれ自体として保存量であると認められるまでには、さらに 1 世紀を要した。

次の一歩

1. **同じ問題をもう一度。** STEP I 2006、問 11（step.maths.org/questions/06-s1-q11）に挑戦してみよう。溝の中に粒子が一列に並び、端により重い粒子がある。どのような最終状態が可能か。

2. **衝突を追う。** 小問 (iii) の衝突を、A_0 が A_1 に衝突するところから始まる、2 個のビー玉どうしの別々の衝突の連続としてモデル化せよ。その連続を最後まで追い、小問 (iii) で求めた運動に行き着くことを示せ。

3. **2 個の球を当てる。** 5 個の等しい球からなるゆりかごで、2 個の球をそろって放し、残りの 3 個に速さ u で衝突させる。「2 個の球が速さ u で飛び出す」が両方の保存則と矛盾しないことを示し、さらに矛盾しない別の結果を 1 つ求めよ。

4. **軽い端。** $\lambda < 1$ の場合について、2 個のビー玉どうしの衝突の連続を追え。A_n と A_{n+1} 以外に、最終的に動いているビー玉はあるか。

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。運動量とエネルギーの保存について、衝突に関する多くの問題とともに扱っている。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle,「Simple explanation of a well-known collision experiment」**, *American Journal of Physics* 49 (1981)。ニュートンのゆりかごがなぜうまく働くのかを説明している。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。対称性と保存則の結びつきについての、読みやすい解説である。

詳しい解説付きの解答は第 10.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/newtons-cradle.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com