1.8 有理数を数える

ワークシート

問題

STEP III 2020、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　何かを証明する前に、最初の 15 項ほどを計算してみよう。比 u_n / u_{n+1} について何に気づくだろうか。

段階 1 奇数番目が偶数番目に勝る

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$ のとき、(u_{2k}, u_{2k+1}) と (u_{2k+1}, u_{2k+2}) を a と b で表すとどうなるか。

考えてみよう $n \geq 2$ のとき、組 (u_n, u_{n+1}) は位置 $k = \lfloor n/2 \rfloor$ にある組から得られる。$n = 2k$ の場合と $n = 2k+1$ の場合を分けて考えよ。

手を止めて、やってみよう どちらの場合も、組の一方の項は $u_k + u_{k+1}$ である。なぜこれがもう一方の項より大きいのか。すべての項が正であることを使え。

段階 2　隣り合う項は互いに素である

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　d が u_{2k} と u_{2k+1} を割り切るならば、ほかに何を割り切らなければならないか。u_{2k+1} と u_{2k+2} についても同じことを考えよ。

手を止めて、やってみよう　したがって、ある組の公約数（common factor）は、それより前の組の公約数でもある。1 より大きい公約数をもつ最初の組をとり、矛盾（contradiction）を導け。

段階 3 同じ組は二度現れない

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 最も早く繰り返される組 (a, b) をとる。それは $(1, 1)$ でありうるか。

手を止めて、やってみよう 小問 (i) により、a と b の大小を比べれば、その位置が奇数番目か偶数番目かがわかる。これを使って、二つの出現をともに一つ前に戻し、より早く繰り返される組を作れ。

段階 4　互いに素な組はすべて現れる

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう　なぜ $a - b$ と b は互いに素（coprime）なのか。それらの任意の公約数は、ほかに何を割り切るか。

手を止めて、やってみよう　数列（sequence）のどこかで $a - b$ の直後に b が現れたとすると、その後にどのような組が現れるか。$a < b$ の場合は役割を入れ替えよ。

段階 5 すべての分数の一覧

扱う内容：小問 (v)

考えてみよう すべての正の有理数（rational number）は、p と q が互いに素であるような p/q の形に書ける。(p,q) が隣り合う組として現れることを示せばよい。

手を止めて、やってみよう ある互いに素な組が決して現れないと仮定し、そのような組のうち和が最小のものを選べ。小問 (iv) から矛盾が得られる。さらに小問 (ii) と (iii) から、f が同じ値を二度とらないことがわかる。

背後にある数学

Calkin–Wilf 木

正の分数を木の形に並べる。一番上に $\frac{1}{1}$ を置き、各分数 $\frac{a}{b}$ に二つの子、すなわち左に $\frac{a}{a+b}$、右に $\frac{a+b}{b}$ を与える。この木を一行ずつ、左から右へ読むと、ちょうどこの問題のリスト $f(1), f(2), f(3), \ldots$ が得られる（図 1.8.1）。段階 3 はすべての分数がただ一つの親をもつことを述べ、段階 4 はすべての分数が木の中にあることを述べてい

る。2003 年に Moshe Newman は、木すら必要ないことを発見した。リストの各分数は、一つ前の分数から

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}.$$

によって計算できるのである。

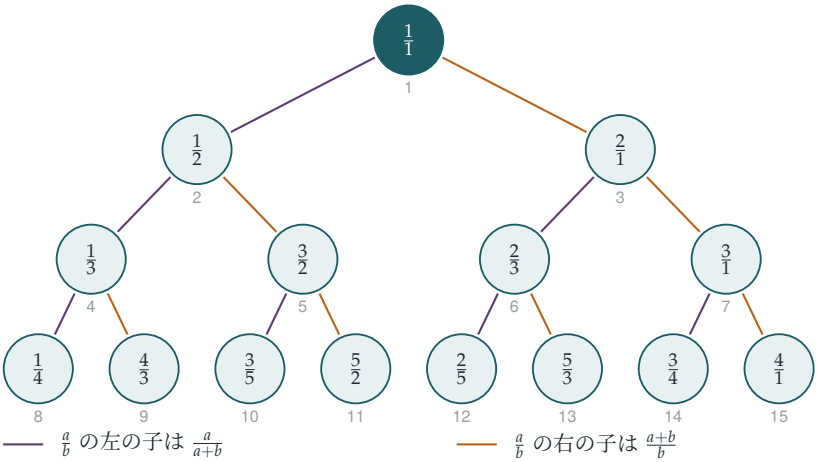

図 1.8.1　Calkin–Wilf 木の最初の 4 行。一行ずつ、左から右へ読むと $f(1), f(2), f(3), \ldots$ が得られる。灰色の小さな数は位置 n である。すべての正の分数が既約分数の形でちょうど一回ずつ現れる。

無限の大きさの違い

このように並べ上げることのできる集合を**可算**（countable）であるという。分数は可算である。分数は整数よりはるかに多いように思えるので、これは驚くべきことである。大学の最初の学期には、カントールの**対角線論法**（diagonal argument）にも出会うだろう。これは**実数**が可算でないこと、すなわち実数のどんなリストも必ずどれかを取りこぼすことを示すものである。したがって、無限には本当に異なる大きさがあり、実数は有理数より真に大きな無限をなす。これは大学 1 年次の講義で出会う結果の中でも、とりわけ驚くべきものの一つである。

Stern の数列

数列 u_n は *Stern* **の二原子数列**（Stern's diatomic sequence）であり、ほかにもさまざまな顔をもつ。たとえば u_{n+1} は、各べきを高々 2 回まで用いて n を 2 のべきの和として表す方法の数に等しい。この数列は *Stern–Brocot* **木**（Stern–Brocot tree）や、無理数の最良有理近似を与える連分数（continued fraction）とも深く関係している。

次の一歩

1 **分数を見つける。** $f(n) = \frac{3}{5}$ となるのはどの n か。また $f(n) = \frac{5}{3}$ となるのはどの n か。親の規則を用いて $\frac{1}{1}$ までさかのぼれ。

2 **Newman の公式。** $x_1 = 1$ から始めて、Newman の公式がリストの最初の 10 個の分数を生み出すことを確かめよ。

3 **カントールの対角線論法。** 0 と 1 の間のすべての実数を小数で書いたリストがあるとする。リストの n 番目の数と n 桁目が異なるような小数を構成せよ。これがリストの不完全さを示すのはなぜか。（$0.0999\ldots = 0.1$ のような小数にはどのような注意が必要か。）

4 **可算和集合。** やや難 正の整数の組 (m, n) 全体の集合が可算であることを、正の整数全体との全単射を具体的に与えることで示せ。（$2^{m-1}(2n-1)$ を試してみよ。）

さらに学ぶために

- **Neil Calkin & Herbert Wilf,「Recounting the rationals」**（*American Mathematical Monthly*, 2000）。4 ページで、全編が読みやすい。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（邦訳『天書の証明』）、第 17 章「Sets, functions, and the continuum hypothesis」（集合、関数、連続体仮説）。Calkin–Wilf 木が取り上げられている。
- **Ian Stewart & David Tall, *The Foundations of Mathematics***（Oxford University Press）。大学 1 年次の講義と同様に、可算性、カントール、実数を扱う。

詳しい解説付きの解答は第 1.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/counting-rationals.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com