# 1.5 無限降下法

## ワークシート

### 問題

**STEP III 2022、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

**考えてみよう**　小問 (i) の $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ を見てみよう。三つの項のうち二つは明らかに偶数（even）である。このことから残りの一つについて何がわかるか。

### 段階 1 最初の降下（descent）

扱う内容：小問 (i)

**考えてみよう** $a = 2p$ とおいて整理せよ。新しい方程式は、係数（coefficient）の位置が入れ替わっただけで同じ形をしている。同じことを $b$、続いて $c$ についても繰り返せ。

**手を止めて、やってみよう** これで $|p| < |a|$ を満たす解 $(p, q, r)$ が得られた。このことから、なぜ解がまったく存在しないといえるのか。$|a|$ が最小となる解を考えてみよ。

### 段階 2　別の素数

扱う内容：小問 (ii)

**考えてみよう**　ここでは 2 で割る方法はうまくいかない。3 つの係数のうち 2 つを割り切る素数（prime）はどれか。

**手を止めて、やってみよう**　3 が $b$ を割り切ること、次に $c$、さらに $a$ を割り切ることを、その都度代入しながら示せ。まったく同じ方程式に戻るだろうか。

### 段階 3　3 を法とする（modulo 3）平方数

扱う内容：小問 (iii)

**考えてみよう**　最初の結果について：3 の倍数でない数を $3n \pm 1$ と表し、それを 2 乗せよ。平方数を 3 で割った余り（remainder）としてありうるものは何か。

**考えてみよう**　次に、$a^2 + b^2$ の余りとしてありうるものを列挙せよ。それが 3 の倍数になるのはどのようなときか。

**手を止めて、やってみよう**　それを用いて 3 が $a$ と $b$ を割り切り、さらに $c$ も割り切ることを示せ。あとは小問 (i) と同様に議論せよ。

### 段階 4　ひとひねり：方程式が変わる

扱う内容：小問 (iv)

**考えてみよう**　4 で割った余りを考えよ。偶数の 2 乗と奇数の 2 乗は、それぞれどのような余りになりうるか。

**考えてみよう**　$a$、$b$、$c$ がすべて偶数ならば、それらを半分にせよ。新しい方程式は元の方程式と同じだろうか。

**手を止めて、やってみよう**　係数が変わってしまうので、より強い主張を証明せよ：任意の $k \geq 2$ に対して $a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$ は解をもたない。半分にする操作によって、この方程式の族の中にとどまるだろうか。

## 背後にある数学

### フェルマー、降下法、そして最終定理

フェルマーは無限降下法を用いて、$x^4 + y^4 = z^2$ が正の整数解をもたないことを証明した。これは有名な「最終定理」（Last Theorem）のうち彼が証明を残した唯一の場合であり、$x^n + y^n = z^n$ の $n = 4$ の場合を解決するものである。のちにオイラー（Euler）が $n = 3$ の場合に降下法を用いた（その証明には欠陥があったが、後に補われた）。降下法は今でも現代の理論の出発点である。Section 1.9 に出てくるような曲線に関するモーデル–ヴェイユの定理（Mordell–Weil theorem）の証明は、高度に洗練された降下法なのである。

### 局所的障害

この節の証明はどれも、ある数を法とする余りを調べることで成り立っていた。ある $n$ について方程式が $n$ を法として解をもたないか、あるいは実数解をもたなければ、整数解ももたないことは確かである。このような理由を**局所的障害**（local obstructions）といい、大学では、$p, p^2, p^3, \ldots$ を法とするすべての余りを一度に調べる方法である $p$ **進数**（$p$-adic numbers）に出会うことになる。

ハッセ(Hasse)とミンコフスキー(Minkowski)による見事な定理によれば、$a^2 + b^2 = 3c^2$ のような**二次**方程式については、局所的障害が唯一の障害である。すなわち、解をもたない「局所的」な理由がなければ、実際に有理数解が存在する。三次方程式では、これは劇的に破綻する。1951 年、セルマー（Ernst Selmer）は

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

が任意の整数を法として解をもち、実数解ももつにもかかわらず、0 でない整数解をもたないことを示した。「局所から大域へ」の原理（local-to-global principle）がいつ、なぜ破綻するのかを解明することは、現代の整数論の大きなテーマの一つである。

### 解をもつ方程式

小問 (iv) には有名な親類がある。$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$、すなわち**マルコフ方程式**（Markov equation）である。この方程式は正の整数解を無限に多くもち、$(1,1,1)$、$(1,1,2)$、$(1,2,5)$、$(1,5,13)$、$(2,5,29)$ と続く。そしてこれらの解は、無理数が分数によってどれほどよく近似できるかという問題と結びついている。演習 4 を参照せよ。

## 次の一歩

1 **STEP I の準備運動。**（*STEP I 2010* 問題 *8*）$a^3 + 3b^3 = 9c^3$ の整数解は $a = b = c = 0$ のみであることを示せ。次に、一の位の数字を考えることにより、$p^4 + 2q^4 = 5r^4$ についても同じことを示せ。

2 **降下を必要としない法。** 4 を法として考えるだけで、$x^2 + y^2 = 4z + 3$ が整数解を一つももたないことを示せ。

3 **有理点。** 小問 (iii) を用いて、円 $x^2 + y^2 = 3$ 上には**有理数**座標をもつ点（有理点、rational point）が存在しないことを示せ（$(1,1)$ を含む $x^2 + y^2 = 2$ と対比せよ）。

4 **マルコフの三つ組。** $(x, y, z)$ が $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ を満たすならば、$(x, y, 3xy - z)$ もこれを満たすことを示せ。$(1,1,1)$ から出発して、上に挙げた三つ組を生成せよ（この「跳躍」の手法は降下法の逆である）。

## さらに学ぶために

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（『数論の高みへ』）、第 2 章および第 5 章。
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***（Pearson）（『やさしい数論入門』）。非常に読みやすい。$x^4 + y^4 = z^2$ に対するフェルマーの降下法による証明も載っている。
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***（Fourth Estate）（『フェルマーの最終定理』）。フェルマーの余白の書き込みからワイルズ（Wiles）の証明に至るまでの物語を、一般の読者向けに描いている。

詳しい解説付きの解答は第 1.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/infinite-descent.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com