1.4 e は無理数であり、e^2 もまた無理数である

ワークシート

この節では 2 つの問題を扱う。1 つ目は 1997 年の問題で、e が無理数（irrational）であることを証明する。2 つ目は 2024 年の問題で、同じ考え方をより巧妙にした形を用いて e^2 が無理数であることを証明する。こちらは本当に難しくなる。

ウォームアップ

STEP III 1997、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q7

本題

STEP III 2024、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$e = p/q$ と仮定する。e に q を掛けると整数になる。では、$q!$ を掛けると e の級数の各項はどうなるか。

段階 1 準備運動：e は無理数である

扱う内容：準備問題（warm-up question）、STEP III 1997

考えてみよう b_n は等比級数（geometric series）である。その初項と公比（common ratio）は何か。したがって、その和はいくらか。

手を止めて、やってみよう a_n と b_n を項ごとに比較せよ。a_n の各項の分母は、どれも $n+1$ 以上の因数の積である。どちらの級数のほうが大きいか。

考えてみよう e の級数に $n!$ を掛けよ。$1/n!$ までの項は整数になる。残りの項はどの級数になるか。$e = p/q$ とすると、どの n の値で矛盾（contradiction）が生じるか。

段階 2　なぜ e^2 は難しいのか

扱う内容：準備問題から本問への一歩、STEP III 2024

考えてみよう　準備問題の方法を $e^2 = \sum \frac{2^r}{r!}$ に適用してみよ。なぜ残りの部分（tail）はもはや小さくならないのか。$e^2 = \frac{p}{q}$ とすると、qe と $\frac{p}{e}$ について何がいえるか。

段階 3 二つの残りの部分

扱う内容：本問、小問 (i) と (ii)

考えてみよう 小問 (i) は、a_n を $f(n)$ に置き換えて、準備問題の比較をもう一度行うものである。

考えてみよう $g(n)$ の項は符号が交互に変わる（alternate in sign）。項はしだいに小さくなっているか。

手を止めて、やってみよう 項を二通りの方法で二つずつ組にせよ。第 1 項から組にする方法と、第 2 項から組にする方法である。それぞれの組み方から、不等式（inequality）が一つずつ得られる。

段階 4　再び整数

扱う内容：本問、小問 (iii)

考えてみよう　$e = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!}$ と書き、$m = 2n$ として $m!$ を掛けよ。どの項が整数になるか。

考えてみよう　残りの項、すなわち $r > m$ の項の和は何になるか。$f(m)$ の定義と比較せよ。

手を止めて、やってみよう　$\frac{1}{e} = \sum_{r \geq 0} \frac{(-1)^r}{r!}$ についても同じことを行え。残りの部分を $g(m)$ と対応させるとき、$m = 2n$ が偶数であることがなぜ重要なのか。

段階 5 矛盾

扱う内容：本問、小問 (iv) と (v)

考えてみよう 小問 (iii) を用いて、$f(2n)$ と $g(2n)$ を、整数に e または $\frac{1}{e}$ の倍数を加えたもの、あるいは引いたものとして表せ。

手を止めて、やってみよう これらを $q\,f(2n)+p\,g(2n)$ に代入せよ。$qe=\frac{p}{e}$ はどこで使われるか。

考えてみよう $e^2=\frac{p}{q}$ と仮定する。すると、小問 (iv) はすべての n について成り立つ。

> **手を止めて、やってみよう**　小問 (i) と (ii) により、$q\,f(2n) + p\,g(2n)$ は 0 と小さな値の間にはさまれる。この整数が 0 と 1 の間に（両端を含まずに）あるためには、n はどれだけ大きくなければならないか。

背後にある数学

e はどれほど無理数なのか

リウヴィル（Liouville）は 1840 年に、e^2 が無理数であること、さらには整数係数の二次方程式（quadratic equation）を満たさないことを証明した。1873 年、エルミート（Hermite）ははるかに先へ進み、e が**超越数**（transcendental）であること、すなわち整数係数の**いかなる**多項式（polynomial）の根でもないことを証明した。その証明は、まさに上の議論を高度にしたものである。つまり、整数を作り、それが 0 と 1 の間に（両端を除いて）あることを示すのである。その 9 年後、リンデマン（Lindemann）はエルミートの方法を応用して π が超越数であることを示し、定規とコンパスによる「円積問題」という古代からの問題が不可能であることをついに証明した。

まだわかっていないこと

これらの方法がこれほど強力であるにもかかわらず、きまりが悪いほど単純な問題が未解決のまま残っている。$e + \pi$ は無理数か。$e\pi$ はどうか。誰も知らない。ただし、少なくとも一方は超越数でなければならない（演習 4）。$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ は無理数か。答えは「はい」である。アペリー（Apéry）が 1978 年にこれを証明し、数学界を驚かせた。$\zeta(5)$ はどうか。誰も知らない。

近似

これらの証明の背後には、より深い考え方がある。それは、ある数が分数によって**あまりにもよく**近似できるならば、その数は無理数である、というものである。e の級数の部分和（partial sums）は、非常に速く e に非常に近づく分数である。分数は、他の分数によってそれほどよく近似されることはありえない。これが**ディオファントス近似**（Diophantine approximation）の出発点であり、数論のこの分野については Section 2.9 でさらに探究できる。そこでは別の種類の積分から、e にさらに迫るよりよい分数が得られる。

次の一歩

1 **$1/e$ だけを用いる。** $1/e = p/q$ と仮定し、$1/e$ の交代級数だけを用いて、e が無理数であることを証明せよ。

2 **$\sin 1$ は無理数である。** $\sin 1 = 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \cdots$ を用いて、$\sin 1$ が無理数であることを証明せよ。（適当な奇数の階乗を掛けよ。）

3 **なぜ π ではうまくいかないのか。** この方法が π に直接は使えない理由を説明せよ。次に、級数の代わりに積分を用いて π が無理数であることを示した、ニーヴン（Niven）による 1 ページの証明（1947 年）を調べよ。これは優秀な A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の生徒の手の届く範囲にある。

4 **どちらか一方は超越数である。** やや難 e と π が $x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$ の根であることを示せ。係数が代数的数（algebraic number）である多項式の根はそれ自身代数的であること、および π が代数的でないこと（リンデマン）は仮定してよい。$e+\pi$ と $e\pi$ の少なくとも一方が超越数であることを導け。

さらに学ぶために

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（『天書の証明』）、第 8 章「Some irrational numbers」（いくつかの無理数）。まさにこれらの考え方を用いて、e、e^2、e^4、π^2 が無理数であることを証明している。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。$\sqrt{2}$ から超越性までを扱う、短い古典的名著である。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。無理数の歴史を読みやすく描いた本である。

詳しい解説付きの解答は第 1.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/e-irrational.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com