1.3 最小の反例

ワークシート

問題

STEP III 2015、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q5

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　ステップ 4 では「k を S に属する最小の正の整数と定める」とある。なぜそうしてよいのだろうか。S が正の**実数**の集合であったとしても、それは許されるだろうか。

段階 1　ステップ 3：S は空でない（non-empty）

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　$\sqrt{2} = p/q$ であるとすると、$\sqrt{2}$ に掛けると整数になる正の整数はどれか。

段階 2 ステップ 5：より小さい要素

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $n = (\sqrt{2}-1)k$ について二つの事実が必要である。それが正の整数であることと、$n\sqrt{2}$ が整数であることである。整数 m を用いて $k\sqrt{2} = m$ と書き、n と $n\sqrt{2}$ をともに k と m で表せ。

段階 3 ステップ 6：矛盾（contradiction）

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう $\sqrt{2}-1$ はどのくらいの大きさか。$(\sqrt{2}-1)k$ と k を比べ、ステップ 4 で k をどのように選んだかを思い出せ。

段階 4　立方根（cube root）：二つの数を結びつける

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$a = 2^{1/3}$ とおく。a が有理数（rational）ならば、a^2 も有理数か。a^2 が有理数ならば、a を a^2 と $a^3 = 2$ を用いて表せるか。

段階 5 議論を応用する

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $\sqrt{2}-1$ を $a-1$ に置き換えて、小問 (i) をそのまま真似てみよ。その真似はどこで破綻するか。

手を止めて、やってみよう より多くの情報を保持する集合（set）を用いよ。すなわち、na と na^2 がともに整数となる正の整数 n 全体の集合である。これが空でないこと、そして k がこの集合に属するときは常に $(a-1)k$ も属することを確かめよ。

背後にある数学

図に描ける証明

小問 (i) の背後には、Stanley Tennenbaum による美しい図がある。$\sqrt{2}=a/b$ ならば $a^2=2b^2$ である。つまり、一辺 a の正方形は、一辺 b の正方形 2 個と同じ面積をもつ。図 1.3.1 のように、二つの b の正方形を a の正方形の向かい合う隅に置く。すると、それらは小さな正方形の部分で重なり、また覆われない小さな正方形が二つ残

る。面積が等しいことから、重なった部分は覆われない二つの正方形を合わせたものに等しくなければならず、同じ性質をもつ**より小さい**整数の組が得られる。より小さい組がいつまでも続くことはありえないので、そのような正方形は存在しない。より小さい組はちょうど $(2b - a,\ a - b)$ であり、これは私たちの $(\sqrt{2} - 1)k$ のステップが姿を変えたものにほかならない。

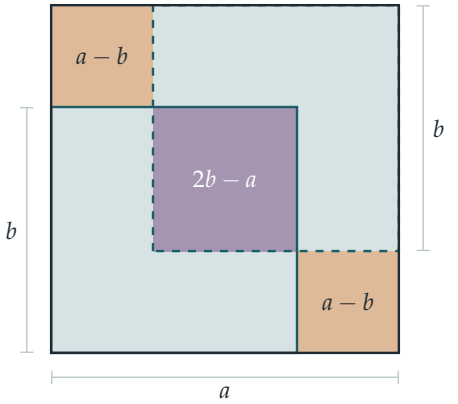

図 1.3.1　Tennenbaum の証明。一辺 b の二つの正方形（ティール色）が、一辺 a の正方形の向かい合う隅に置かれている。$a^2 = 2b^2$ ならば、2 回数えられた面積（プラム色の重なり）は数えられなかった面積（二つのアンバー色の隅）に等しくなければならないので、$(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$ となる。これはより小さい解である。

整列性、帰納法、降下法

整列性原理と帰納法の原理は論理的に同値である。すなわち、それぞれが他方から証明できる。大学では、どちらも自然数の基礎として用いられるのを目にするだろう。Section 1.5 では、同じ原理を別の形、すなわちフェルマー（Fermat）の**無限降下法**（method of infinite descent）として用いる。それは、正の整数からなる狭義単調減少の無限数列は存在しない、という形である。

どこまで通用するか

この議論によって、N が平方数（perfect square）でないときには必ず $\sqrt{N}$ が無理数であること（演習を参照）、さらに一般に、整数の n 乗根は整数であるか無理数であるかのいずれかであることが証明できる。大学では、これは**代数的整数**（algebraic integers）に関する主張となる。すなわち、$x^3 - 2 = 0$ のような、整数係数のモニック多項式（monic polynomial）の方程式を満たす有理数は、整数でなければならない。こ

の考え方には Section 6.3 で再び出会うことになる。

ピタゴラス学派（Pythagoreans）が $\sqrt{2}$ の無理性を明かしたヒッパソス（Hippasus）を溺死させたという伝説は、おそらく事実ではない。確かなのは、この発見によってギリシャの数学者たちが数の研究と長さの研究を切り離さざるをえなくなったということである。この分裂が癒やされるには、19 世紀、そしてデデキント（Dedekind）による実数の構成を待たなければならなかった。

次の一歩

1 **ほかの平方根。** この議論を応用して、$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。$\sqrt{2}-1$ の役割を果たすのはどの数か。

2 **平方数でないものすべて。** N を平方数でない正の整数とし、m を $m < \sqrt{N} < m+1$ を満たす整数とする。$(\sqrt{N}-m)k$ を考えることにより、$\sqrt{N}$ が無理数であることを証明せよ。

3 **誤りを見つけよ。** この議論を $\sqrt{4}$ に対して実行してみよ。正確にはどのステップで破綻するか。

4 **Tennenbaum の図。** 図 1.3.1 を用いて、$a^2 = 2b^2$ ならば $(2b-a)^2 = 2(a-b)^2$ であることを示せ。また、この恒等式を代数的にも確かめよ。

さらに学ぶために

- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。帰納法や整列性を含む、証明への徹底した入門書。
- **R. P. Burn, *A Pathway into Number Theory***（Cambridge University Press）。注意深く順序立てられた問題だけで構成された本。大学 1 年次の講義への準備として理想的である。
- **John Conway & Joseph Shipman,「Extreme proofs I: the irrationality of $\sqrt{2}$」**(*Mathematical Intelligencer*, 2013)。一つの事実に対する多くの証明を、機知に富んだ筆致で比較している。

詳しい解説付きの解答は第 1.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/well-ordering.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com