1.2 素数はどれほどまばらか？

ワークシート

問題

STEP III 2016、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q5

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　小問 (iv) では、**すべての** $n \geq 2$ について命題を証明することが求められている。小問 (iii) では、$2m$ までのすべての k について命題が成り立つと仮定している。これはどのような帰納法（induction）だろうか。

段階 1 二項係数は大きすぎない

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 2^{2m+1} はどこから来るのか。$(1+x)^{2m+1}$ の二項展開（binomial expansion）に $x=1$ を代入してみよ。

考えてみよう その和の項はすべて正である。そのうち $\binom{2m+1}{m}$ に等しいのはどの 2 つの項か。

手を止めて、やってみよう $\binom{2m+1}{m}$ の 2 倍は和全体以下であるが、示すべきは狭義の不等式（strict inequality）である。まだ使っていない項はないか。

段階 2　その二項係数（binomial coefficient）を割り切る素数はどれか

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$\binom{2m+1}{m}$ を階乗（factorial）を用いて書き、分母を払って分数が現れないようにせよ。

考えてみよう　$m+1 < p \leq 2m+1$ を満たす素数（prime）p をとる。p は $(2m+1)!$ を割り切るか。また、因数がすべて $m+1$ 以下である $m!\,(m+1)!$ を p が割り切ることはありうるか。

手を止めて、やってみよう　したがって、そのような素数はどれも $\binom{2m+1}{m}$ を割り切る。それらの積もまたこれを割り切るのはなぜか。そして、小問 (i) を用いるとこの小問はどのように完結するか。

段階 3 積を分ける

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう $2m+1$ 以下の素数を、$m+1$ 以下のものと $m+1$ より大きいものに分けよ。これにより $P_{1,2m+1}$ はどうなるか。

手を止めて、やってみよう 一方の因数にはこの小問の仮定（hypothesis）を、もう一方には小問 (ii) を用いよ。どちらの評価も 4 の累乗の形で書け。

段階 4　すべての n

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう　n についての強い帰納法（strong induction）を用いよ。小問 (iii) で扱えるのはどのような n の値か。

手を止めて、やってみよう　それ以外の n の値について：2 より大きい偶数が素数になりうるか。このことから、$P_{1,n}$ と $P_{1,n-1}$ の関係について何がわかるか。

背後にある数学

4^n から素数定理（Prime Number Theorem）へ

結果の対数（logarithm）をとると $\ln P_{1,n} < n \ln 4$、すなわち

$$\sum_{p \le n} \ln p < (\ln 4)\, n \approx 1.39\, n.$$

となる。1850 年代にパフヌティ・チェビシェフ（Pafnuty Chebyshev）は、まさにこの種の評価を上からも下からも証明し、$\sum_{p \le n} \ln p$ が n に比例して増大することを示

した。ガウス（Gauss）はそれ以前、およそ 15 歳のときにすでに、数表から n 以下の素数の個数はおよそ $n/\ln n$ であると予想していた。これが**素数定理**となり、1896 年にジャック・アダマール（Jacques Hadamard）とシャルル・ド・ラ・ヴァレ・プーサン（Charles de la Vallée Poussin）が複素解析（complex analysis）を用いてついに証明した。対数の形で述べると

$$\sum_{p \le n} \ln p \sim n,$$

であり、したがって n 以下の素数の積はおよそ e^n である。我々の上界 4^n はまったく的外れではない。図 1.2.1 に 3 つすべてを示す。

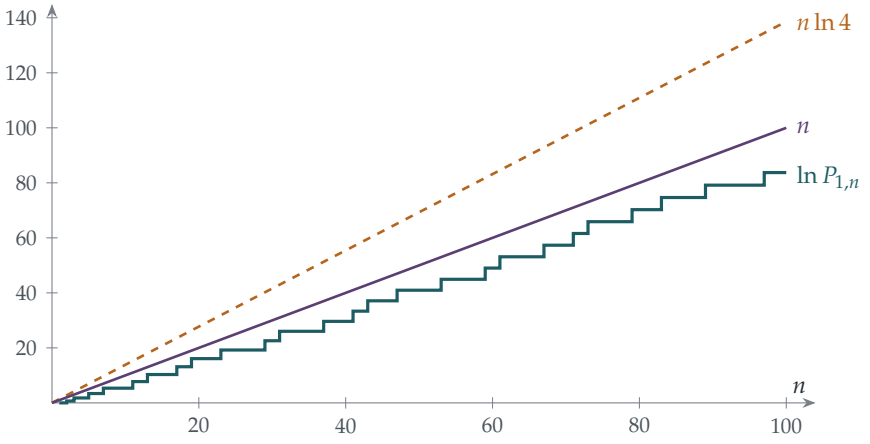

図 1.2.1　n 以下のすべての素数の積の対数（青緑）。各素数 p で $\ln p$ だけ跳ね上がる。本節では、これが $n \ln 4$（琥珀色、破線）より下にとどまることを証明する。素数定理によれば、これは n（紫）と同じように増大する。

ベルトランの仮説（Bertrand's postulate）

1845 年にジョゼフ・ベルトラン（Joseph Bertrand）は、すべての $n \ge 1$ について n と $2n$ の間に必ず素数が存在すると予想した。チェビシェフは 1852 年にこれを証明した。その 80 年後、19 歳のポール・エルデシュが美しい初等的証明を見いだした。その鍵となる要素は、この問題の補題と、**中央**二項係数 $\binom{2n}{n}$ を割り切る素数がどれかを注意深く調べることである。Martin Aigner と Günter Ziegler は、数学で最も優美な証明を集めた *Proofs from THE BOOK* の第 2 章としてこの証明を選んだ。

この先へ

素数の正確な分布は、リーマンゼータ関数（Riemann zeta function）

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

の零点によって支配されている。この関数には Section 2.4 で、ずっと控えめな姿で出会うことになる。そこでは $\zeta(2) = \pi^2/6$ である。これらの零点がどこにあるかを正確に予言する**リーマン予想**（Riemann Hypothesis）が正しければ、素数定理の誤差を可能な限り厳しく押さえ込むことができる。これはおそらく数学で最も有名な未解決問題であり、ミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）の一つでもある。

次の一歩

1. **数の感覚をつかむ。** $n = 10, 20, 30$ について $P_{1,n}$ を計算し、4^n および e^n と比較せよ。（ここでは電卓を使ってよい。）

2. **中央二項係数。** $\binom{2m}{m}$ が $(1+1)^{2m}$ の展開における $2m+1$ 個の項の中で最大であることを示し、$\binom{2m}{m} \geq \dfrac{4^m}{2m+1}$ を導け。

3. **素数はそれほど多くない。** $\pi(n)$ を n 以下の素数の個数とする。$\sqrt{n}$ と n の間にある素数はすべて $\sqrt{n}$ より大きく、それらの積は $P_{1,n} < 4^n$ 以下である。これより

   $$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) < \frac{2\ln 4}{\ln n}\, n,$$

   を導き、さらに $\pi(n) < 2.8\, n/\ln n + \sqrt{n}$ を導け。これを素数定理の $\pi(n) \approx n/\ln n$ と比較せよ。

4. **ベルトランの仮説を確かめる。** $n = 1, 2, \ldots, 50$ のそれぞれについて n と $2n$ の間にある素数を見つけることで、ベルトランの仮説を確かめよ。各素数が直前の素数の 2 倍未満であるような短い素数のリストを使って、効率よく確かめられるだろうか。

さらに学ぶために

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、第 2 章「Bertrand's postulate」（ベルトランの仮説）。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。素数定理とリーマン予想の歴史を一般向けに描いた本。

- **G. J. O. Jameson, *The Prime Number Theorem***（Cambridge University Press）。厳密でありながら平易で、学部生向けに書かれている。最初の数章は A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）程度の微積分しか必要としない。

詳しい解説付きの解答は第 1.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/prime-distribution.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com