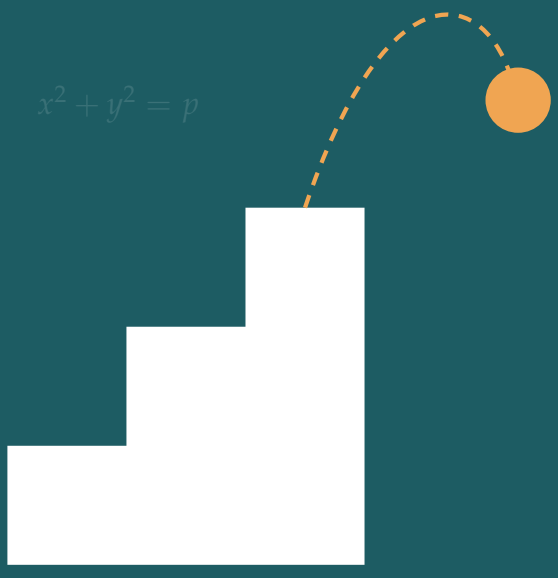
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

見本問題解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

見本問題解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

見本問題解答例

STEP の見本問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 判別式と部分分数 純粋数学 . . . 3

Q2 三角関数と最適化 純粋数学 . . . 7

Q3 2階微分方程式 純粋数学 . . . 11

Q4 置換積分 純粋数学 . . . 14

Q5 桁数と階乗の数え上げ 純粋数学 . . . 17

Q6 弓形の面積 純粋数学 . . . 20

Q7 複素指数級数 純粋数学 . . . 24

Q8 積分方程式 純粋数学 . . . 27

Q9 絶対値を含む不等式 純粋数学 . . . 30

Q10 仕事率と抵抗 力学 . . . 34

Q11 摩擦と転がり接触 力学 . . . 38

Q12 摩擦を伴う衝突 力学 . . . 42

Q13 円運動 力学 . . . 46

Q14 期待値 確率・統計 . . . 50

Q15 確率変数の和 確率・統計 . . . 53

Q16 連続型確率変数 確率・統計 . . . 57

STEP II

Q1 部分分数分解 純粋数学 . . . 61

Q2 対称な連立方程式 純粋数学 . . . 65

Q3 ド・モアブルの定理 純粋数学 . . . 69

Q4 双曲線関数 純粋数学 . . . 73

Q5 級数と積分による評価 純粋数学 . . . 77

Q6 微分方程式から導く加法定理 純粋数学 . . . 81

Q7 階段関数の積分 純粋数学 84
Q8 剰余群における位数 純粋数学 88
Q9 球、平面と鏡映 純粋数学 92
Q10 論理パズル 純粋数学 96
Q11 放物運動と衝突 力学 100
Q12 針金上の振動 力学 104
Q13 つり合いとモーメント 力学 109
Q14 剛体の回転 力学 113
Q15 期待値と標本平均 確率・統計 117
Q16 トーナメント戦の確率 確率・統計 121

STEP III

Q1 数学的帰納法 純粋数学 125
Q2 二項係数の不等式と極限 純粋数学 128
Q3 複素数の三角不等式 純粋数学 132
Q4 放物線の接線 純粋数学 135
Q5 方程式の解の個数 純粋数学 139
Q6 双曲線関数の漸化式 純粋数学 144
Q7 階数低下法 純粋数学 148
Q8 ベクトルとコーシー・シュワルツの不等式 純粋数学 151
Q9 行列の群 純粋数学 155
Q10 合同算術 純粋数学 159
Q11 一階微分方程式 力学 162
Q12 棒のつり合い 力学 166
Q13 転がる輪 力学 170
Q14 回転を伴う衝突 力学 174
Q15 ランダムネットワークの連結性 確率・統計 178
Q16 負の二項分布 確率・統計 182

解答例

STEP I 見本問題、第 1 問

純粋数学 • 判別式と部分分数

STEP I 見本問題、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q1

鍵となる考え方

小問 (i) では、各 x を固定すると方程式は y についての 2 次方程式であり、実数 y が存在するのは判別式（discriminant）が非負のときに限る。この条件がそのまま x に対する制約になる。役割を入れ替えると、方程式は x についての 2 次方程式でもあり、そこから y に対する制約が得られる。小問 (ii) は部分分数分解（partial fractions）の標準的な問題である。分数を、二項展開（binomial expansion）がわかっている項に分け、x^n の係数を足し合わせればよい。

解答

小問 (i)

方程式を、係数が x に依存する y の 2 次方程式とみなす：

$$y^2 + 16x\,y + (4x^2 + 24x) = 0.$$

与えられた実数 x に対して、これを満たす実数 y が存在するための必要十分条件は、判別式が非負であることである：

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

積 $x(5x-2)$ が非負となるのは、2 つの因数が同符号である（またはどちらかが 0 である）とき、すなわち $x \leq 0$ または $x \geq \frac{2}{5}$ のときに限る。したがって、任意の実数解は

$$x \leq 0 \quad \text{または} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

を満たし、示すべきことが示された。

次に、方程式を x の 2 次方程式とみなす：

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

実数 x が存在するための必要十分条件は

$$\begin{aligned}(16y+24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y+6)(y+2) \geq 0.\end{aligned}$$

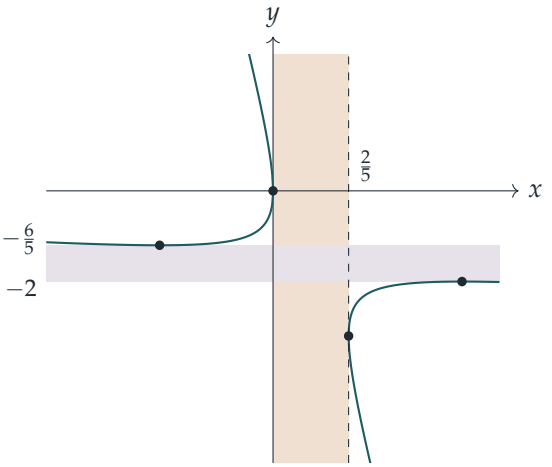
$(5y+6)(y+2)$ の根は $y = -2$ と $y = -\frac{6}{5}$ であり、この 2 次式が負になるのはその間だけである。よって

$$y \leq -2 \quad \text{または} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

考えてみよう これらの制約は最良のものだろうか。それとも、実際の範囲はもっと狭いのだろうか。

これらは正確である。判別式による議論は「必要十分条件」であり、$x \leq 0$ または $x \geq \frac{2}{5}$ を満たすすべての x に対して少なくとも 1 つの実数 y が存在し、y についても同様である。境界の値も重根によって実際にとられる。x の範囲の端については $(x, y) = (0, 0)$ と $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$、$y$ の範囲の端については $(1, -2)$ と $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$ である。いずれも元の方程式を満たすことを確かめられる。

幾何学的には、この曲線は双曲線（hyperbola）であり（$16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$ だから）、除外される 2 つの帯状の領域は、その 2 つの枝の間の隙間である。



小問 (ii)

次のようにおく：

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2},$$

すると $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$ である。$x=-1$ とおくと $9=9A$ より $A=1$、$x=2$ とおくと $9=3C$ より $C=3$、$x=0$ とおくと $9=4A+2B+C=7+2B$ より $B=1$ である。したがって

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

次に各項を展開する。二項級数が $\frac{x}{2}$ のべきになるように、因数 2 をくくり出す：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, \qquad |x|<1,$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad |x|<2,$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, \qquad |x|<2,$$

ここで $|u|<1$ に対する $(1-u)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$ を用いた。これらを足すと、x^n の係数は

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

3 つの級数がすべて収束（converge）するのは、ちょうど $|x|<1$ のときである（1 つ目は $|x|<1$ を必要とし、残りは $|x|<2$ でよい）。$1\leq|x|<2$ では後の 2 つは収束するが 1 つ目は収束しないので、それらの和も収束しえない。したがって、この展開が有効なのは

$$-1<x<1.$$

検算

小問 (i) では、点 $(1,-2)$ を代入すると $4-32+4+24=0$、$(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$ を代入すると $\frac{36}{25}+\frac{288}{25}+\frac{36}{25}-\frac{360}{25}=0$ となり、y の範囲の両端が実際にとられることが確かめられる。小問 (ii) では、$n=0$ のとき $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ であり、これは $x=0$ における $\frac{9}{4\cdot 1}$ と一致する。また $n=1$ のとき $-1+\frac{8}{8}=0$ であるが、分母 $(2-x)^2(1+x)=4-3x^2+x^3$ に x の項がないことから、これは正しい。数値的にも、$x=0.9$ で級数を足し合わせると $3.914745\ldots$ となり、$9/(1.1^2\times 1.9)$ と一致する。

よくある間違い

- 不等号の向きを逆にして、$-2 \leq y \leq -\frac{6}{5}$ と答えてしまう。判別式が負になるのは根の**間**であるから、その区間こそが除外される区間である（実際、$(0,0)$ は曲線上にあり、$y = 0$ はその区間の外にある）。
- 因数 $\frac{1}{2}$（2 乗の項では $\frac{1}{4}$）をくくり出すのを忘れ、$(2-x)^{-1}$ を $(1-x)^{-1}$ であるかのように展開してしまう。
- 有効範囲を $|x| < 2$ と答えてしまう。展開が有効なのはすべての項が収束する範囲だけなので、$|x| < 1$ である。

STEP のその先へ

小問 (i) の曲線は 2 次曲線（conic）であり、それが楕円・放物線・双曲線のいずれになるかは、2 次の項 $ax^2 + bxy + cy^2$ に対する $b^2 - 4ac$ の符号で決まる。大学では、これを 2 次形式（quadratic form）の対称行列とその固有値（eigenvalue）を通して理解する。小問 (ii) は収束半径（radius of convergence）の考え方に触れている。展開は、関数が発散する最も近い点、ここでは $x = -1$ まで有効である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は 2 次形式を扱っており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の理解）はべき級数とその収束を扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数と最適化

> **STEP I 見本問題、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q2

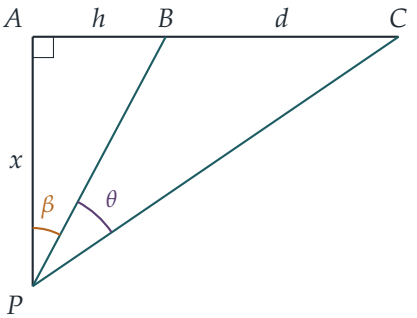
鍵となる考え方

角 θ は、P における二つの角の**差**であり、それぞれの角は A に直角をもつ直角三角形（right-angled triangle）の中にある。それらの正接（tangent）は図から直接読み取れるので、tan の差の公式（subtraction formula）を使えばよい。最大値については、$\tan\theta$ を x が一箇所にしか現れない形、すなわち $x + (\text{定数})/x$ の形に書けば、微分を使わずに相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）で決着がつく。

解答

$\tan\theta$ を求める

$\alpha = \angle APC$、$\beta = \angle APB$ とおく。B は A と C の間にあるので、$\theta = \alpha - \beta$ である。



直角三角形 PAC と PAB（直角は A）において、

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

差の公式より、

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

分子と分母に x^2 を掛けると、

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

（分母 $1+\tan\alpha\tan\beta$ は正なので、この公式が破綻することはない。）

θ を最大にする

考えてみよう $\tan\theta$ を最大にすることは、θ を最大にすることと同じだろうか？

この場合はそうである。α と β はともに 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に（端点を含まずに）あり、さらに $\alpha > \beta$ であるから、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる。この区間で tan は狭義単調増加（strictly increasing）なので、θ が最大となるのは $\tan\theta$ が最大となるときである。

分子と分母を $x > 0$ で割ると、

$$\tan\theta = \frac{d}{x+\dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

ここで d は固定されているので、$\tan\theta$ が最大になるのは分母 $x+h(h+d)/x$ が最小になるときである。二つの項はともに正なので、相加平均・相乗平均の不等式より

$$x+\frac{h(h+d)}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

であり、等号が成り立つのは二つの項が等しいとき、すなわち $x = h(h+d)/x$、つまり $x^2 = h(h+d)$ のときに限る。したがって、分母が最小値をとり、θ が最大値をとるのは

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

のときであり、このとき $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$ である。

微分を用いる方法。 $k = h(h+d)$、$f(x) = dx/(x^2+k)$ とおくと、商の微分法（quotient rule）より

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

となる。これは $0 < x < \sqrt{k}$ で正、$x > \sqrt{k}$ で負であるから、f は増加して $x = \sqrt{k}$ でただ一つの極大値をとり、その後は減少する。相加平均・相乗平均の不等式を使う方が速く、しかもこれが全体での最大値（global maximum）であることが一目でわかる。

検算

- 極限：$x \to 0$ または $x \to \infty$ のとき、公式から $\tan\theta \to 0$ となる。これは正しい。A のごく近くからでも非常に遠くからでも、線分 BC を P から見込む角（subtended angle）はほとんどない。したがって、その間に最大値があるはずである。
- 対称性：$\tan\theta$ は x を $h(h+d)/x$ に置き換えても変わらないので、最大値はこの入れ替えの不動点（fixed point）$x = \sqrt{h(h+d)}$ でとられるはずである。$h = 2$、$d = 1$ のとき、$x = 2$ と $x = 3$ では同じ角（約 $11.31°$）が得られ、$x = \sqrt{6}$ における最大値は約 $11.54°$ である。
- $h = 1$、$d = 3$ のとき：$x = 2$ であり、$\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$ となる。これは 3–4–5 の直角三角形の角で、$36.87°$ である。θ を座標から直接計算する方法で、20 000 組のランダムな (h, d, x) について調べたところ、公式と 10^{-14} の精度で一致した。また、最大を与える x を数値的に探索した結果も、すべて $\sqrt{h(h+d)}$ と一致した。

よくある間違い

- $\tan\theta = d/x$ と書いてしまう。これは θ が直角三角形の中にあるかのように扱っているが、そうではない。直角は A にあり、BC 上にはない。
- $\tan\theta$ を最大にしておきながら、それがなぜ θ を最大にすることになるのかを述べない。そのためには、θ が tan の増加する区間にとどまっていることが必要である。

STEP のその先へ

この答えには美しい幾何学的な解釈がある。BC を一定の角で見込む点は、B と C を通る円の弧の上にある。角が最大になるのは、直線 AP と共有点をもつそのような円のうち最小のもの、すなわち P においてその直線に**接する**円の上である。すると方べきの定理（tangent–secant theorem、点 A の方べき（power of a point））により $AP^2 = AB \cdot AC$ となり、これはまさに $x^2 = h(h+d)$ である。これはレギオモンタヌス（Regiomontanus）の問題であり、しばしば「台座の上の像を最もよく見るには、どこに立てばよいか？」という形で出題される。ある量を最適化するとき、まずそれと同時に増減し、しかも扱いやすい別の量に置き換えるという考え方は、大学 1 年次の解析学（first-year analysis）を通じて繰り返し現れるテーマである。Siklos の *Advanced*

Problems in Mathematics には、この精神に沿った問題がさらに数多く収められている。

解答例

STEP I 見本問題、第 3 問

純粋数学 ・ 2 階微分方程式

STEP I 見本問題、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q3

鍵となる考え方

二階の微分方程式（second-order equation）は難しいが、一階の微分方程式（first-order equation）が二つなら易しい。示された置換（substitution）$z = y' - y$（$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を y' と書く）は、左辺が z と z' だけを含む式にまとまるように選ばれている。すると z についての一階線形（linear）微分方程式が残り、続いて y についてもう一つの一階線形微分方程式が得られる。どちらも積分因子（integrating factor）によって解ける。

解答

階数を下げる

$z = y' - y$ とおくと $z' = y'' - y'$ である。これに合わせて方程式の左辺を分解する。

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

したがって方程式は

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

となる。初期条件（initial conditions）から $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$ である。

考えてみよう 分解 $(y'' - y') + 3(y' - y)$ にはどうすれば気づけただろうか？

ある定数 k について、$y'' + 2y' - 3y$ が $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$ に等しくなればよい。y' の項を比較すると $k = 3$ となり、このとき $-ky = -3y$ も一致する。（これがうまくいくのは、1 が特性方程式（auxiliary equation）$m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$ の解だからである。もう一つの解 -3 が $z' + 3z$ に現れている。）

z を求める

積分因子 e^{3x} を掛けると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z\mathrm{e}^{3x}\right) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

$x = 0$ において $1 = \frac{1}{2} + A$ であるから $A = \frac{1}{2}$ となり、

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

y を求める

次に $y' - y = z$、すなわち

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

である。積分因子は e^{-x} であり、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{-x}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$
$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

$x = 0$ において $1 = -\frac{1}{8} + B$ であるから $B = \frac{9}{8}$ である。両辺に e^{x} を掛けて、

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

ここでは $y(0) = 1$ しか使っていないことに注意しよう。条件 $y'(0) = 2$ は $z(0)$ を求める際にすでに使っているので、両方の条件が適用されている。

検算

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$ であり、$y' = \left((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\right)/8$ から $y'(0) = 16/8 = 2$ が得られる。
- 代入による確認：e^{-3x} は斉次方程式（homogeneous equation）の解であり（$9 - 6 - 3 = 0$）、e^{x} も解である（$1 + 2 - 3 = 0$）。$x\mathrm{e}^{x}$ については、$y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$ に e^{x} を掛けたものとなるので、$\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$ はちょうど $2\mathrm{e}^{x}$ を与える。
- 数値的には、もとの方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で $x = 0$ から進めると $y(1) \approx 4.41098$ となり、$(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$ と一致する。

よくある間違い

- 最後にもう一度 $y'(0) = 2$ を適用してしまう、あるいはそれを $z(0) = 1$ に変換し忘れる。
- 置換を使わずに特解（particular integral）として $c\,\mathrm{e}^x$ を試すこと。e^x はすでに斉次方程式の解なのでこれはうまくいかず、代わりに $cx\mathrm{e}^x$ が必要になる。置換を使えば、この点は自動的に処理される。

STEP のその先へ

この置換は、実は微分作用素（differential operator）の因数分解である。$\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ を D と書くと、方程式は $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$ であり、$z = (D-1)y$ である。このように作用素を因数分解することで、定数係数（constant-coefficient）線形微分方程式の理論全体が説明でき、重根（repeated root）や「共鳴（resonant）」する根があるとなぜ余分な因子 x が現れるのかもわかる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は、この理論を体系的に展開している。

解答例

STEP I 見本問題、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 見本問題、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q4

鍵となる考え方

2 次式の平方根が現れたら、まず平方完成（completing the square）をする。ここでは根号の中の 2 次式が $(x+1)^2-3$ となり、根号の外の因数もまた $x+1$ であるから、$u=x+1$ と平行移動すれば $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$ という整った形が残る。この形（変数と、その 2 乗から定数を引いたものの平方根との積）は、まさに sec による置換（secant substitution）、あるいは同じく逆数による置換 $t=1/u$ が扱うためにあるような形である。どちらの置換を用いても、無限区間は有限区間に変わる。

解答

平方完成

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

である。$x\geq 1$ ならば $(x+1)^2\geq 4>3$ であるから、これは正であり、したがって被積分関数（integrand）は $[1,\infty)$ 全体で定義される。$u=x+1$ とおくと、$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ であり、$x=1$ のとき $u=2$、$x\to\infty$ のとき $u\to\infty$ である。よって

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

u が大きいとき被積分関数は $1/u^2$ のように振る舞うので、この積分は収束（converge）する。

sec による置換

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ として $u = \sqrt{3}\sec\theta$ とおく。すると

$$\mathrm{d}u = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \sqrt{u^2-3} = \sqrt{3(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{3}\tan\theta,$$

となる。ここで、この範囲では $\tan\theta \ge 0$ であることを用いて絶対値を外した。

考えてみよう 新しい積分区間の端はどうなるか。

$u = 2$ では $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$、すなわち $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ でなければならないから、$\theta = \frac{\pi}{6}$ である。$u \to \infty$ のとき $\sec\theta \to \infty$ であるから、θ は下から $\theta \to \frac{\pi}{2}$ となる。この置換は $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ で増加するので、積分区間の端の順序は保たれる。

これで、すべてが約分される。

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

したがって

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

別解：逆数による置換

sec が思い浮かばなくても、$t = 1/u$ で同じようにうまくいき、しかも積分区間がすぐに有限になる。$u = 1/t$ とすると $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$ であり、$t > 0$ に対して

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

積分区間の端 $u = 2$ と $u \to \infty$ はそれぞれ $t = \frac{1}{2}$ と $t \to 0$ になり、負の符号によって上端と下端が入れ替わる。

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{3}\,t\right)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

これは最初の方法の結果と一致する。

検算

- 原始関数（antiderivative）$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$ を微分すると被積分関数に戻る。そして $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ である。

- 大きさの大まかな確認：$[1,\infty)$ 上で被積分関数は $1/(x+1)^2$ より少し大きく、後者の積分は $\frac{1}{2}$ である。求めた答えは $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$ であり、当然そうあるべきとおり、$\frac{1}{2}$ をわずかに上回っている。
- もとの積分を数値積分（numerical quadrature）すると（区間を分割し、無限に延びる部分は $x = 1/w$ によって取り除く）0.604600 となり、$\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$ と一致する。

よくある間違い

- 積分区間の端の変更を忘れること。下端は 0 ではなく $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。0 を用いると誤った答え $\pi/(2\sqrt{3})$ が得られてしまう。
- 用いる範囲で $\tan\theta$ の符号を確かめずに $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$ と書くこと。
- 極限をきちんととらずに、$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$ に「無限大を代入した」ままの形で答えを放置すること。

STEP のその先へ

これは広義積分（improper integral）である。厳密には $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$ を意味し、大学 1 年次の解析学（analysis）の講義では、このような極限がいつ存在するかが厳密に扱われる（$\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$ との比較が標準的な判定法である）。また、ここで用いた置換は、有理式 R に対する $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ の積分という一般論の出発点でもある。このような積分は、常に有理関数（rational function）の積分に帰着できる。広義積分と比較判定法（comparison test）については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

解答例

STEP I 見本問題、第 5 問

純粋数学 ・ 桁数と階乗の数え上げ

> **STEP I 見本問題、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの小問も、計算するというより注意深く数え上げる問題である。(i) では、まず 1 桁、2 桁、3 桁の数というまとまりごとに桁数を数えて、1000 番目の数字がちょうどどこに来るかを突き止め、そのうえで 7 の個数を一の位、十の位、百の位と位ごとに数える。(ii) では、末尾の 0（trailing zeros）の 1 つ 1 つが因数 $10 = 2 \times 5$ に対応し、5 は 2 よりも少ないので、365! に含まれる因数 5 の個数を数えればよい。

解答

小問 (i)

どこで止まるか。 1 から 9 までの数で 9 個の数字を使う。10 から 99 までの 90 個の 2 桁の数で 180 個の数字を使い、ここまでで 189 個となる。残りは

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

個の数字である。最初の 270 個の 3 桁の数は $100, 101, \ldots, 369$ であり、これらで 810 個の数字を使う。最後の数字は 370 の先頭の数字、すなわち 3 である。したがって、$1, 2, \ldots, 369$ をすべて書き終え、そのあとに 3 を 1 つだけ書いたことになる。

> ? **考えてみよう** 数 370 には 7 が含まれている。これは数えるべきだろうか？

数えない。先頭の数字 3 を書いたところで止まるので、その 7 は書かれない。止まる位置を数字 1 個の単位まで正確に突き止める必要があるのは、まさにこのためである。

1 から 369 までに現れる 7 を数える。 位取り（place value）ごとに数える。どの 7 もち

ょうど1つの位にあるので、二重に数えることはない。77のような数は正しく2回分として数えられる。

- **一の位。** 10個ずつの完全なまとまり $10k, \ldots, 10k+9$ のそれぞれに、7で終わる数がちょうど1つある。0から359までの数は36個の完全なまとまりをなすので、7は36個である：$7, 17, \ldots, 357$。途中までのまとまり360から369でさらに367の1個が加わる。合計37個。
- **十の位。** 100個ずつの完全なまとまりのそれぞれに、十の位が7である数がちょうど10個ある：70–79、170–179、270–279である。まとまり370–379は369を超えている。合計30個。
- **百の位。** 369までのどの数も、百の位は高々3である（あるいは百の位がない）。合計0個。

最後に1つだけ書いた3は何も加えない。よって、数字7が使われる回数は

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 回である。}$$

小問 (ii)

N を10進法で表したときの末尾の0の個数は、$10^k \mid N$ となる最大の k である。$10 = 2 \times 5$ であるから、これは N の素因数分解（prime factorisation）における2の指数と5の指数のうち小さい方に等しい。

5を数える。 365! を割り切る5の最大のべきの指数は、$j = 1, \ldots, 365$ にわたって j に含まれる因数5の個数を足し合わせたものである。5の倍数は少なくとも1個の因数を与え、25の倍数は2個目を、125の倍数は3個目を与え、以下同様である。各層を別々に数えると、

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && \text{（5の倍数），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && \text{（25の倍数），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && \text{（125の倍数：125, 250），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0. &&
\end{aligned}$$

ちょうど 5^m で割り切れる数は、最初の m 行のそれぞれで1回ずつ数えられるので、本来あるべきとおりちょうど m を与える。したがって、365! における5の指数は

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2は制約にならない。 2について同じ議論をすると、因数2は少なくとも $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$ 個ある。（実際には $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$ 個である。）よって $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$ は 365! を割り切るが、$5^{90} \nmid 365!$ であるから 10^{90} は割り切らない。

ゆえに、365! の末尾にはちょうど **89** 個の 0 が並ぶ。

検算

(i) について、止まる位置を手早く確かめる：$9 + 180 + 3 \times 270 = 999$ 個の数字で 369 の終わりまで達し、その次の数字は 370 の先頭の 3 である。最初の 1000 個の数字をコンピュータで書き出して数えると、7 は 67 個であり、そのうち 20 個が 1–99 に、47 個が 100–369 にあることが確認できる。(ii) については、365! を正確に計算し（779 桁ある）、末尾の 0 を数える。0 は 89 個あり、5 の個数と一致する。手で方法を確かめられる小さな例として、25! の末尾の 0 は $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$ 個のはずであり、実際 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$ である。

よくある間違い

- 370（さらには 371–379 まで）を書いたものとして数え、68 以上の答えを出してしまう。
- $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$ だけを使い、25、50、… には 5 が 2 個、125、250 には 3 個含まれることを忘れる。
- 7 を数字ごとではなく数ごとに数えてしまい、77、177、277 を 2 回ではなく 1 回しか数えない。

STEP のその先へ

(ii) の層ごとの数え方はルジャンドル（Legendre）の公式（Legendre's formula）である：素数 p について、$n!$ における p の指数は $\sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$ であり、これは $(n - s_p(n))/(p-1)$ にも等しい。ここで $s_p(n)$ は n を p 進法で表したときの各桁の数字の和である。今の場合 $365 = 2430_5$ で、各桁の和は 9 であり、$(365 - 9)/4 = 89$ となる。この公式は、二項係数（binomial coefficients）の素因数に関するクンマー（Kummer）の定理の基礎になっている。この種の初等整数論（elementary number theory）をさらに探究するには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がすばらしい手引きとなる。

解答例

STEP I 見本問題、第 6 問

純粋数学 • 弓形の面積

> **STEP I 見本問題、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

鍵となる考え方

この硬貨は、正七角形（regular heptagon）の各辺の外側に円弧状の「ふくらみ」がついた形である。したがってその面積は、正七角形の面積に 7 つの弓形（circular segment）の面積を加えたものであり、弓形の面積は扇形（sector）から三角形を除いたものである。こうして問題はすべて 2 つの角に帰着する。1 つは各円弧がその中心に対して張る角（円周角の定理（inscribed angle theorem）からただちに得られる）、もう 1 つは正七角形の長い対角線（diagonal）と外接円（circumcircle）の半径とのなす角である。

解答

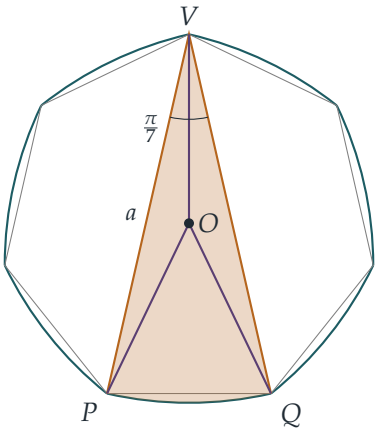
図形の形

各頂点は、それに向かい合う円弧の両端から距離 a の位置にある（両端はともに、その頂点を中心とする半径 a の円上にある）。したがって、各頂点とそこから 3 つ先の頂点を結ぶ 7 本の「長い」対角線は、すべて長さ a をもつ。等しい半径の等しい円弧はその中心に対して等しい角を張るので、7 本の辺（円弧の弦）もまたすべて等しい。

長い対角線を順にたどると、すべての辺の長さが a の七芒星ができる。その各先端での角は、その頂点から出る 2 本の対角線のなす角であり、これら 2 本の対角線と向かい合う辺とで、辺の長さが a、a および共通の辺の長さである三角形ができる。このような 7 つの三角形はすべて合同（congruent）なので、この星形は等辺であるだけでなく等角でもあり、したがって正則である。ゆえに 7 つの頂点は正七角形の頂点であり、その中心を O、外接円の半径を R とする。

1 つの頂点を V とし、V を中心とする円弧の両端を P、Q とする。P と Q は正七角形

の隣り合う頂点である。



各円弧の角

辺 PQ は中心 O に対して角 $2\pi/7$ を張る。V は外接円上の、PQ に対する優弧上にあるので、円周角の定理より

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

したがって各円弧は、半径 a の円の一部で、その中心に対して角 $\pi/7$ を張る。よって扇形 VPQ（網かけ部分）の面積は

$$\tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

である。

面積を足し合わせる

硬貨の面は、正七角形と、各辺に 1 つずつある 7 つの弓形からなる。正七角形は OPQ のような 7 つの三角形に分けられ、辺 PQ 上の弓形は扇形 VPQ から三角形 VPQ を除いたものである。よって

$$\begin{aligned} \text{面積} &= 7\,[OPQ] + 7\big(\text{扇形}VPQ - [VPQ]\big) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7\big([VPQ] - [OPQ]\big), \end{aligned}$$

である。ここで $[\cdot]$ は面積を表す。

考えてみよう 2 つの三角形の面積をそれぞれ計算することなく、$[VPQ] - [OPQ]$ を求めるにはどうすればよいか。

中心 O は三角形 VPQ の内部、その対称軸上にある。したがって三角形 VPQ から三角形 OPQ を除くと、合同な 2 つの三角形 OVP と OVQ が残る：

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2 \cdot \tfrac{1}{2} R\, a \sin \angle OVP.$$

対称性より VO は $\angle PVQ$ を二等分するので、$\angle OVP = \pi/14$ である。三角形 OVP は $OV = OP = R$ の二等辺三角形なので、2 つの底角はともに $\pi/14$ であり、O から VP に垂線を下ろすと

$$a = VP = 2R \cos \frac{\pi}{14}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

を得る。したがって

$$[VPQ] - [OPQ] = R\, a \sin \frac{\pi}{14} = \frac{a^2 \sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2} \tan \frac{\pi}{14},$$

であり、

$$\text{面積} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2} \tan \frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2} \left(\pi - 7 \tan \frac{\pi}{14} \right),$$

となって、示すべき式が得られた。

検算

- 数値的には $\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$ なので、面積はおよそ $0.772a^2$ である。7 つの円弧上に点を密にとって靴ひも公式（shoelace formula）を用いた計算とも小数第 6 位まで一致し、モンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定とも同様に一致する（点が硬貨の内部にあるのは、7 つの頂点すべてから距離 a 以内にあるとき、かつそのときに限る）。
- この硬貨はどの方向にも幅 a をもち、この点で直径 a の円板と同じである。円板の面積は $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$ である。幅が一定値 a であるすべての図形のうちで面積が最大なのは円板なので、それより少し小さくなるはずであり、実際 $0.772a^2 < 0.785a^2$ となっている。
- ルーローの n 角形（Reuleaux n-gon、n は奇数）に同じ議論を適用すると $\frac{a^2}{2}(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n})$ を得る。$n \to \infty$ のとき $n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$ となり、面積は円板の面積 $\pi a^2/4$ に近づく。$n = 3$ のときは、よく知られたルーローの三角形の面積 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$ が得られる。

よくある間違い

- 円弧の角を、$\pi/7$（円弧の実際の中心である向かい側の頂点での角）ではなく、$2\pi/7$（中心 O での角）としてしまう。

► a を外接円の半径 R と混同する。a は長い対角線であり、$a = 2R\cos(\pi/14)$ である。

STEP のその先へ

50 ペンス硬貨（50p coin）は**定幅図形**（curve of constant width）である。すなわち、平行な 2 本の接線（tangent line）の組はどれも同じ距離 a だけ離れている。硬貨投入口がどの向きに入れても同じように硬貨を測れるのはこのためである。バルビエの定理（Barbier's theorem）によれば、このような曲線の周の長さはすべて πa であり（ここでは $7 \cdot a \cdot \pi/7$）、ブラシュケ–ルベーグの定理（Blaschke–Lebesgue theorem）によれば、面積が最小となるのはルーローの三角形である。この種の幾何学についてさらに知りたければ、クーラント（Courant）とロビンズ（Robbins）の *What Is Mathematics?*（『数学とは何か』）に、定幅図形についてのすばらしい節がある。

解答例

STEP I 見本問題、第 7 問

純粋数学 ・ 複素指数級数

> **STEP I 見本問題、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q7

鍵となる考え方

$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を見たら、いつでも「半角（half-angle）」の因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ をくくり出すとよい。残るのは $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ であり、これは実数である。級数については、二項係数（binomial coefficient）$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$ が二項定理（binomial theorem）を示唆している。そこで各正弦を指数関数の虚部（imaginary part）として書くと、和は $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ の累乗の虚部となる。これは前半ですでに極形式（polar form）に直してある。

解答

絶対値と偏角

因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ をくくり出すと、

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\right]\\ &= 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

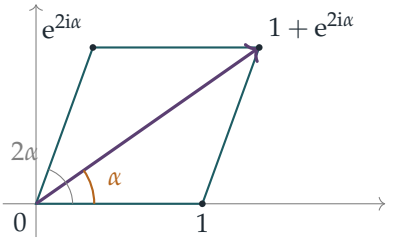
> ? **考えてみよう** これでそのまま「絶対値（modulus）は $2\cos\alpha$、偏角（argument）は α」と読み取ってよいだろうか。α に対する制限は何のためにあるのか。

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ という形から絶対値 r、偏角 θ が得られるのは、$r>0$ のときに限る。ここでは $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$ なので $\cos\alpha>0$ であり、さらにこの範囲は主値の区間（principal interval）$(-\pi,\pi]$ の内部にある。したがって

$$\left|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right|=2\cos\alpha,\qquad \arg\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)=\alpha.$$

（もし $\cos\alpha$ が負であれば、絶対値は $-2\cos\alpha$ となり、偏角は π だけずれる。）

美しい幾何的な描像もある。点 0、1、$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ は、点 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ とともに、辺の長さが 1 のひし形（rhombus）をなす。0 から出る対角線は角 2α を二等分し、その長さは $2\cos\alpha$ である。



級数

実数 θ に対して $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であり、二項係数は実数であるから、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r\Big] = \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n\Big], \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$ を用い、続いて二項定理を用いた。次に、前半の結果とド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$ を用いると、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

$2^n\cos^n\alpha$ は実数であるから、虚部をとると

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

因数分解 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ は**すべての**実数 α に対して成り立つ。$\cos\alpha > 0$ が必要だったのは絶対値と偏角を言い表すためだけであり、したがって和の公式は与えられた範囲に限らず、すべての実数 α に対して成り立つ。

検算

- $n=0$：両辺とも $\sin\alpha$ である。$n=1$：左辺は和積公式（sum-to-product formula）により $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$ となり、$2\cos\alpha\sin 2\alpha$ と一致する。
- $n=3$、$\alpha=\frac{\pi}{6}$：左辺は $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$、右辺は $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$ である。

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$：各項は $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^r$ となるので、和は $n \geq 1$ に対して $(1-1)^n = 0$ であり、$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ と一致する。
- $0 \leq n \leq 24$ について、無作為に選んだ α の値で公式が成り立つことを数値的に確かめた。

よくある間違い

- α の範囲によって正になることに触れずに、絶対値を $2\cos\alpha$ と答えること。絶対値は負にはなりえない。
- 虚部を早くとりすぎること。$\mathrm{Im}(zw) \neq \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, w$ であるから、最後の最後まで複素数のまま扱うこと。
- $e^{i(2r+1)\alpha}$ を $\left(e^{2i\alpha}\right)^r$ と書いてしまい、余分な因数 $e^{i\alpha}$ を落とすこと。そうすると $\sin(n+1)\alpha$ が $\sin n\alpha$ になってしまう。

STEP のその先へ

$\sum \binom{n}{r} e^{ir\theta}$ を閉じた形で求めるという同じ考え方は、フーリエ解析（Fourier analysis）にも現れる。そこでは $\cos^n$ 型の式を倍角の和に展開したり、逆に倍角の和をまとめたりし、二項の重み $\binom{n}{r}/2^n$ は二項分布（binomial distribution）となる。半角をくくり出す方法は、$1 - e^{i\theta}$ の絶対値を求める標準的な方法でもあり、これは等比級数（geometric series）や 1 の累乗根（roots of unity）で出会うことになる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、ひし形の図も含め、こうした式変形の幾何的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP I 見本問題、第 8 問

純粋数学 ・ 積分方程式

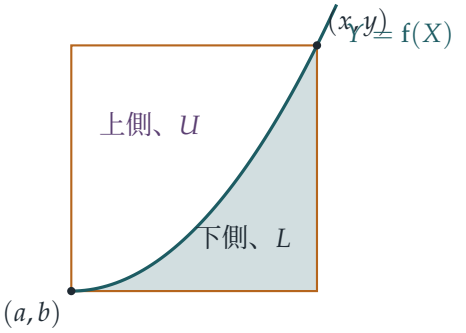
> **STEP I 見本問題、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q8

鍵となる考え方

面積の条件は (x,y) のあらゆる位置で成り立つので、これは実は x の 2 つの関数のあいだの等式である。一方の辺は f の積分であり、もう一方の辺には $\mathrm{f}(x)$ そのものが含まれる。x で微分すると積分が消え、一階（first-order）の微分方程式（differential equation）が残る。これは変数分離（separation of variables）で解ける（あるいは、よりすっきりと、ある商の導関数が 0 であるという形になる）。

解答

$\mathrm{f}'(x) \geq 0$ であるから、曲線は長方形の頂点 (a,b) から向かい合う頂点 (x,y) へと上っていく。よって長方形の幅は $x-a$、高さは $y-b=\mathrm{f}(x)-b \geq 0$ である。下側の部分は曲線と下の辺 $Y=b$ にはさまれた領域（下図の網かけ部分）であり、上側の部分はその残りである。



積分変数として t を用いると（x はここでは積分の上端であるため）、

$$L = \int_a^x \big(\mathrm{f}(t) - b\big)\,\mathrm{d}t, \qquad L + U = (x-a)\big(\mathrm{f}(x) - b\big).$$

条件 $L = \frac{1}{2}U$ は $U = 2L$ を意味するので、長方形全体の面積は $3L$ である：

$$3\int_a^x \big(\mathrm{f}(t) - b\big)\,\mathrm{d}t = (x-a)\big(\mathrm{f}(x) - b\big) \qquad \text{任意の} x \geq a. \tag{$*$}$$

考えてみよう 積分を含む等式から、f について解ける形にするにはどうすればよいか？

$(*)$ はすべての $x \geq a$ で成り立つので、両辺は x の同じ関数であり、したがってそれらの導関数も一致する。関数 f は微分可能であり（f′ についての条件が与えられている）、ゆえに連続である。よって微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、左辺の導関数は $3(\mathrm{f}(x) - b)$ である。右辺を積の微分法（product rule）で微分すると、

$$3\big(\mathrm{f}(x) - b\big) = \big(\mathrm{f}(x) - b\big) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

すなわち

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2\big(\mathrm{f}(x) - b\big).$$

これを整理するため、$g(x) = \mathrm{f}(x) - b$、$u = x - a$ とおく。すると $g' = \mathrm{f}'$ であり、方程式は $u\,g' = 2g$ となる。変数分離して $g'/g = 2/u$ とすることもできるが、それには g で割る必要があり、g は 0 になるかもしれない。$x > a$（したがって $u > 0$）において次のことに気づくほうがすっきりしている：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

よって g/u^2 は $x > a$ において定数であり、それを k とおくと

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

となる。(a, b) は曲線上にあるので、これは $x = a$ でも成り立つ。$x \geq a$ において $\mathrm{f}(x) \geq b$ である（関数は $\mathrm{f}(a) = b$ から非減少（non-decreasing）である）から $k \geq 0$ であり、さらに曲線が水平な直線 $y = b$ である場合を除けば $k > 0$ である。その場合はどの長方形も面積 0 につぶれてしまい、条件は意味をもたない。

したがって曲線は $x \geq a$ における $y - b = k(x-a)^2$、すなわち鉛直な軸 $x = a$ と頂点 (a, b) をもつ放物線（parabola）の半分である。$x \geq a$ なので右側の枝だけが得られ、よってこれは題意のとおり放物線の弧である。

逆に、この曲線は確かに条件を満たす：$L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$ であり、長方形の面積は $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$ であるから、$U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$ となる。

検算

$a = b = 0$、$k = 1$、$x = 3$ とすると、長方形は 3×9 で面積は 27、また $\int_0^3 t^2 \,\mathrm{d}t = 9$ であるから、2 つの部分は 9 と 18 で、比は 1 : 2 である。より一般に、$y - b = k(x-a)^p$ に対して下側と上側の面積比は $1/p$ である（$p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ についてシンプソンの公式（Simpson's rule）で数値的に確かめた）。よって比 $\frac{1}{2}$ からは $p = 2$ が選び出される。直線（$p = 1$）は当然ながら長方形を等分する。

よくある間違い

- x を積分の上端と積分変数の両方に用いてしまい、微分の段階が混乱する。
- 2 つの部分を取り違えて $U = \frac{1}{2}L$ としてしまう。すると $(x-a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f} - b)$ となり、曲線 $y - b = k\sqrt{x-a}$、すなわち**水平な**軸をもつ、向きの違う放物線が得られてしまう。
- 断りなく $\mathrm{f}(x) - b$ で割ってしまう。上で用いた商の議論はこれを回避している。

STEP のその先へ

等式 $(*)$ は**積分方程式**（integral equation）である。すなわち未知関数が積分の中に現れている。微分によって微分方程式に直し、もとの等式が初期値（initial value）も定めていることを忘れない、というのが定石の第一手である。そして答えの一意性（uniqueness）は、区間上で導関数が 0 である関数は定数である、という事実（平均値の定理（mean value theorem）の帰結）に基づいている。Abbott の *Understanding Analysis* は微分積分学の基本定理と平均値の定理をともに丁寧に証明している。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations* は $u\,g' = 2g$ のような方程式を扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 9 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む不等式

> **STEP I 見本問題、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q9

鍵となる考え方

どちらの小問も、絶対値記号（modulus）の中の式がどこで符号を変えるか、あるいはどこである値を横切るかを正確に求めることで、絶対値記号を外すという問題である。(i) では $u = x+1$ とおくと式は $u - 2/u$ となり、これは $u = 0$ の両側それぞれで増加関数である。したがって、不等式は各枝の上で u を 2 次方程式の 2 つの根の間に挟み込むだけのものになる。(ii) では $\cos x - \sin x$ を 1 つの余弦で表すことで符号の変わる点がわかり、そこで積分を分割する。

解答

小問 (i)

式が定義されるためには $x \neq -1$ が必要である。$u = x+1$ とおくと $u \neq 0$ であり、

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+2x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2-2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

これを $f(u)$ とおく。不等式は $-2 < f(u) < 2$ となる。

> **考えてみよう** なぜ単純に両辺に $x+1$ を掛けないのか？

$x+1$ は負になりうるからであり、負の数を掛けると不等号の向きが逆になる。これを不用意に行うのは、答えの半分を失う典型的な原因である。そこで代わりに f の形を利用する。導関数（derivative）は $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$ であるから、f は $u < 0$ において、また別に $u > 0$ において、狭義単調増加（strictly increasing）である。各枝の上で f は $-\infty$ から $+\infty$ までの値をとる。実際、$u \to 0^-$ のとき $-2/u \to +\infty$、$u \to 0^+$

のとき $-2/u \to -\infty$ であり、$|u| \to \infty$ のとき $f(u) \sim u$ である。よって各枝の上で f は値 -2 と 2 をそれぞれちょうど 1 回ずつとり、$-2 < f < 2$ が成り立つのはちょうどその 2 点の間である。

$u \neq 0$ のとき、u を掛けると次の 2 つの同値な方程式が得られる。

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

枝 $u > 0$。 正の根は $u = -1 + \sqrt{3}$（$f = -2$ となる点）と $u = 1 + \sqrt{3}$（$f = 2$ となる点）である。f は増加関数であるから、$-2 < f(u) < 2$ となるのはちょうど $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$ のとき、すなわち $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ のときである。

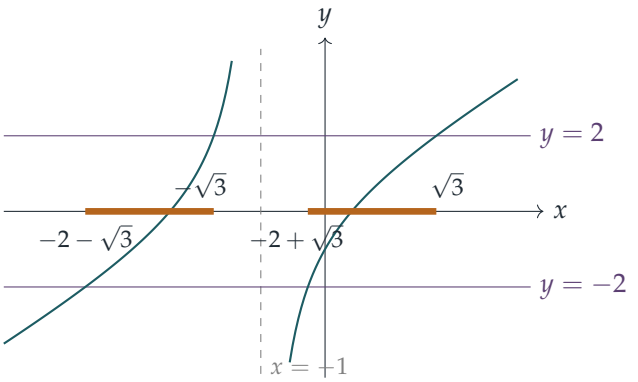
枝 $u < 0$。 負の根は $u = -1 - \sqrt{3}$（$f = -2$ となる点）と $u = 1 - \sqrt{3}$（$f = 2$ となる点）である。再び単調性（monotonicity）により、$-2 < f(u) < 2$ となるのはちょうど $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$ のとき、すなわち $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$ のときである。

どちらの区間も $x = -1$ を含まない（$-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$ に注意）。よって解の集合は

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

であり、題意のとおり端点はすべて $a + b\sqrt{3}$ の形をしている。端点では絶対値がちょうど 2 に等しくなるので、端点は含まれない。

$y = x + (x-1)/(x+1)$ のグラフを直線 $y = \pm 2$ とともに描くと、曲線が 2 直線の間にある 2 つの区間（琥珀色で示す）がわかる。



小問 (ii)

2 つの項を 1 つの余弦にまとめる。

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$0 \le x \le \pi$ のとき $\pi/4 \le x + \pi/4 \le 5\pi/4$ であり、余弦は $[\pi/4, \pi/2)$ で正、$(\pi/2, 5\pi/4]$ で負である。よって $0 \le x \le \pi/4$ では $\cos x - \sin x \ge 0$、$\pi/4 \le x \le \pi$ では ≤ 0 である。積分を $\pi/4$ で分割し、$\cos x - \sin x$ の原始関数（antiderivative）の 1 つが $\sin x + \cos x$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= (\sqrt{2} - 1) - (-1 - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

検算

- (i) の具体的な値による確認：$x = 0$ のとき式の値は -1 で絶対値の範囲内にあり、実際 $0 \in (-2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$ である。$x = -2$ のとき値は $-2 + 3 = 1$ で、$-2 \in (-2 - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ である。$x = -1.5$ のとき値は $-1.5 + 5 = 3.5$ で範囲外であり、確かに $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$ はどちらの区間にも属さない。
- 細かい格子点上と、$[-50, 50]$ 内の 2×10^5 個の無作為な点で不等式を調べたところ、いたるところで 2 つの区間と一致した。また 4 つの端点すべてで絶対値は 2 に等しい。
- (ii) では、シンプソンの公式（Simpson's rule）により 2.828427… が得られ、$2\sqrt{2} \approx 2.828427$ と一致する。2 つの部分はそれぞれ $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ と $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$ である。妥当性の確認として、被積分関数（integrand）は高々 $\sqrt{2}$ であるから、積分は高々 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$ である。

よくある間違い

- $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$ の両辺に $x + 1$ の符号を考えずにそれを掛けてしまい、$x = -1$ より左の区間を失う（あるいは誤って含めてしまう）。
- $f < 2$ だけ、あるいは $f > -2$ だけを解いてしまう。絶対値の不等式では両方が同時に成り立つ必要がある。
- (ii) で、$\cos x - \sin x$ を $[0, \pi]$ 全体でそのまま積分してしまい、-2 を得る（絶対値の積分が負になったら、誤りを疑うべき危険信号である）。

STEP のその先へ

(i) の工夫は、代数的な不等式を単調関数についての主張に置き換えることである。すなわち、f がある区間で狭義単調増加ならば、$a < f(u) < b$ が成り立つのはちょうど $f = a$ となる点と $f = b$ となる点の間である。これを厳密に示すには中間値の定理（intermediate value theorem）を用いる。これは大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大きな定理の 1 つである。また $|x - a| < \varepsilon$ のような絶対値を含む不等式は、その講義における日常の言葉である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、その両方に触れられる親しみやすい本である。

解答例

STEP I 見本問題、第 10 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

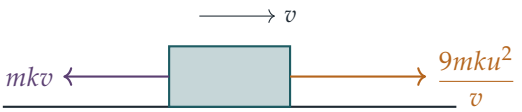
> **STEP I 見本問題、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q10

鍵となる考え方

仕事率（power）は力と速さの積であるから、一定の仕事率 P で動く機関車は P/v の牽引力（driving force）で引っ張る。このときニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から、v についての 1 階の微分方程式（differential equation）が得られ、これは変数分離できる。重要なのは加速度の適切な形を選ぶことである。問題が**時間**を問うているなら $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ を、**距離**を問うているなら $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ を用いる。

解答

機関車を水平な線路上の質量 m の質点としてモデル化する。すると重力と垂直抗力（normal reaction）は打ち消し合い、水平方向の力だけを考えればよい。運動の向きを正の向きとする。



最大の速さ

速さ v のとき牽引力は $9mku^2/v$ であるから、ニュートンの第 2 法則より

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

$v < 3u$ である間は右辺が正であるから、機関車は加速する。加速が止まるのは牽引力と抵抗がつり合うとき、すなわち $9u^2 = v^2$ のときだけである。よって、とりうる最大

の速さは

$$v_{\max} = 3u.$$

考えてみよう 機関車は $v < 3u$ である間はつねに加速しているのに、なぜ $3u$ に到達しないのだろうか。

$v \to 3u$ のとき加速度は 0 に近づく。変数を分離すると、速さ v_1 から速さ v_2 になるまでの時間は

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

であり、これは $v_2 \to 3u$ のとき無限大に発散する。したがって $3u$ は終端速度（terminal speed）である。機関車はいくらでも $3u$ に近づくが、有限の時間で実際に到達することはない。（同じことであるが、$v = 3u$ はこの微分方程式の平衡点（equilibrium）であり、解の一意性（uniqueness）により、それより下から出発した解がそこに到達することはできない。）

u から $2u$ まで

上の公式に $v_1 = u$、$v_2 = 2u$ を代入すると

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

動力の停止

このとき働く力は 2 つの抵抗 mkv と mkB だけであり、どちらも運動を妨げる向きに働く。求めたいのは距離であるから、加速度を $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書く。

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad \Longrightarrow \quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

$\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$ と書き直し、x が 0 から D まで増加する間に v が $2u$ から 0 まで減少するとして積分すると

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v + B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v + B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u + B}{B}\right). \end{aligned}$$

よって、動力を止めてから進む距離は

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1 + \frac{2u}{B}\right)\right].$$

今度は機関車は有限の時間で停止する。$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \leq -kB < 0$ であるから、減速度は決して kB を下回らない。一定の抵抗を追加する必要があるのは、まさにこのためである。

検算

- $B \to 0$ のとき $B\ln(1+2u/B) \to 0$ であるから、$D \to 2u/k$ となる。これは抵抗 mkv だけの場合と一致する。その場合は $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$ より、v は距離に対して割合 k で一次関数的に減少する。
- $y > 0$ のとき $\ln(1+y) < y$ であるから $B\ln(1+2u/B) < 2u$ となり、$D > 0$ である。また、D は B が大きくなるにつれて減少する。これは当然そうあるべきである。
- 数値的には、$k = u = B = 1$ として運動方程式を数値的に刻んで解くと、停止距離は 0.90139 となり、$2 - \ln 3 \approx 0.90139$ と一致する。動力のある段階を $v = 1$ から時間 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$ だけ刻んで解くと、最後に $v = 2.0000$ となる。

よくある間違い

- 牽引力を一定として扱ってしまう。仕事率が一定のとき、力は P/v であり、機関車が速くなるにつれて小さくなる。
- 最後の部分で $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ を用いてしまう。これでは停止距離ではなく停止までの時間が求まる。
- 機関車は「いずれは」$3u$ に到達すると主張してしまう。時間の積分は発散するので、到達することはない。

STEP のその先へ

速さ $3u$ は自励系（autonomous）の方程式 $\dot{v} = f(v)$ の安定な平衡点である。解はそこへ指数関数的に近づくが、決して一致しない。性質のよい微分方程式の解どうしは交わることも合流することもできないからである。これは、微分方程式の入門講義で学ぶ解の一意性定理と相直線（phase line）解析の最初の一端である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）はその両方を扱っている。仕事率や抵抗力についてさらに学ぶには、Kleppner と Kolenkow によ

る *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

解答例

STEP I 見本問題、第 11 問

力学 ・ 摩擦と転がり接触

STEP I 見本問題、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

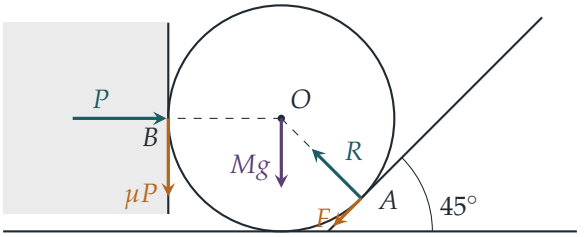
鍵となる考え方

円柱が動き出そうとする瞬間には床が押す力はなくなるので、関係するのは重力、鉛直な面、斜面の三つだけである。「転がる（roll）」とは円柱が斜面上で滑らないことを意味するので、円柱は斜面との接点のまわりに回転し始める。このとき鉛直な面に接している点がどう動くかを調べると、円柱はその面に対して滑らなければならないことがわかる。したがって、摩擦が限界（limiting）に達するのはその面である。あとは中心のまわりのモーメント（moment）の式から、余分な手間なしに斜面の摩擦が求まる。

解答

モデル。円柱は半径 r の一様な剛体（rigid body）とし、その中心 O を通る鉛直断面で問題を考える。装置の面は鉛直で、水平に動く。面との接点を B とすると、これは O と同じ高さにある。斜面との接点を A とする。斜面の傾きは 45° なので、OA は鉛直下向きと 45° をなす。O を原点とし、x を右向き（斜面の方向）、y を上向きにとると、

$$B = (-r, 0), \qquad A = \tfrac{r}{\sqrt{2}}(1, -1).$$



どの摩擦が限界に達するか

円柱が動き出す直前には、円柱は床から離れようとしているので、床からの垂直抗力（normal reaction）はゼロであり、それに伴って床の摩擦（friction）もゼロである。斜面を転がり上がるためには、円柱は A で滑ってはならないので、その運動は A のまわりの回転として始まり、中心は斜面に沿って $(1,1)$ の方向に上っていく。この回転は時計回りである。角速度（angular speed）を ω とすると、円柱上の点 X の速度は、$X-A$ を時計回りに 90° 回転させたものの ω 倍、すなわち $X-A=(x,y)$ に対して $\omega\,(y,-x)$ である。$X=B$ のとき、

$$B-A=r\Big(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

面は水平にしか動かないが、B の速度には上向きの成分があるので、B は面に沿って上に滑る。円柱は両方の面の上で同時に転がることはできないので、鉛直な面の上で滑らなければならず、**摩擦が限界に達するのは鉛直な面である**。摩擦は滑りを妨げる向きに働くので、円柱には大きさ μP の摩擦が**下向き**に働く。斜面では滑りがないので、斜面の摩擦 F は釣り合いが要求する値をとり、制約は $F\le \nu R$ だけである。（斜面の摩擦係数（coefficient of friction）を ν と書く。問題文では v と印刷されている。）

> ? **考えてみよう** なぜ斜面のほうで摩擦が限界に達することはありえないのか。

円柱が A で滑るなら、それは斜面を転がるのではなく滑り上がっていることになる。転がるとは A で滑らないことである。上の計算から、転がるならば B で滑りが生じることがわかるので、摩擦が垂直抗力の μ 倍に達する接点は B である。

P を求める

斜面の垂直抗力を R とし、これは AO の方向（方向 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$）に働く。斜面の摩擦を F とし、斜面に沿って**下向き**（方向 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$）を正とする。

O のまわりのモーメント。重力、P、R はいずれも O を通る。B における摩擦 μP は距離 r のところに働き、円柱を反時計回りに回そうとする。A における摩擦 F は接線方向なので、これも距離 r のところに働き、斜面に沿って下を向くときは円柱を時計回りに回そうとする。よって

$$\mu P\,r=Fr\quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

したがって、斜面の摩擦は確かに斜面に沿って下向きに働き、その大きさは面での摩擦と等しい。

水平方向の釣り合い：

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0\quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu).\tag{1}$$

鉛直方向の釣り合い：

$$\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P - Mg = 0. \tag{2}$$

(1) から得られる $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$ を (2) に代入すると、

$$P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P = Mg$$
$$P\left(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu\right) = Mg,$$

ここで $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ を用いた。したがって

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

となり、示すべき式が得られた。

μ と ν に関する条件

μ について。 P は押す力の大きさであり、$Mg > 0$ なので、$1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$ が必要である。すなわち

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

$\mu \geq \sqrt{2} - 1$ ならば、どれほど大きく押しても円柱を斜面に転がり上がらせることはできない。面での下向きの摩擦の増加が、P とともに少なくとも持ち上げる力と同じ速さで大きくなり、円柱は動かなくなってしまうのである。

ν について。 円柱は斜面上で滑らないので、$F \leq \nu R$ である。$F = \mu P$ と (1) を用い、$\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$ より $R > 0$ であることに注意すると、

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

ここで $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$ で割った。以上で問題は解けた。

検算

- **なめらかな面、$\mu = 0$：** このとき $P = Mg$ となり、斜面の摩擦は不要である。これは、鉛直な壁と 45° の斜面の間に挟まれた摩擦のない円柱の場合と一致する。斜面の抗力は水平成分と鉛直成分が等しいので、P と Mg を等しく釣り合わせなければならない。
- **数値：** $\mu = 0.2$ のとき、$P \approx 1.934\,Mg$ であり、$\nu \geq 0.165$ が必要である。これらの値を代入し直すと、水平方向の力、鉛直方向の力、O のまわりのモーメントはすべて（丸め誤差の範囲で）釣り合う。M と μ を無作為に選んでも同様である。

- $\mu \to \sqrt{2}-1 \approx 0.414$ のとき $P \to \infty$ となり、これは上で述べた動かなくなる現象と整合する。

よくある間違い

- 斜面で摩擦が限界に達するとしてしまう。「転がる」という条件により、そこでの滑りは除外される。
- 床からの抗力を残したままにする。転がり上がる直前には円柱は浮き上がろうとしているので、床からの抗力はゼロである。
- 面での摩擦の向きを間違える。B は面に対して**上向き**に動くので、円柱に働く摩擦は**下向き**である。これが P が Mg を上回る理由である。

STEP のその先へ

瞬間回転中心（instantaneous centre of rotation）に注目してどの接点が滑るかを判断するという鍵となるステップは、剛体の運動学（rigid-body kinematics）の出発点である。大学 1 年次の講義では、これは一般的な法則 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$ や、複数の粗い接点が競合する問題へとつながっていく。$\mu \geq \sqrt{2}-1$ における「動かなくなる」現象、つまりどれだけ強く押しても決してうまくいかない現象は、自己ロック（self-locking）と呼ばれる効果であり、技術者はくさびやクランプで意図的にこれを利用している。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の運動と摩擦をこのような丁寧さで扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 12 問

力学 ・ 摩擦を伴う衝突

> **STEP I 見本問題、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q12

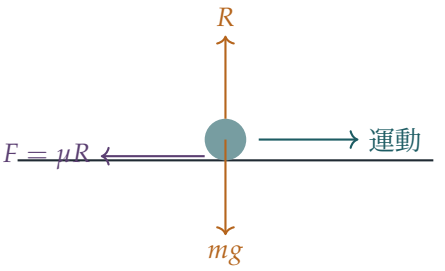
鍵となる考え方

ここでは摩擦がすべての働きを担っている。水平な氷の上を滑る円板には一定の減速させる力がはたらくので、その減速度は一定であり、出来事と出来事の間の運動は姿を変えた「等加速度運動」にすぎない。最後から逆向きにたどっていこう。B の停止距離から衝突後の速さが決まり、衝突の法則によってそれが衝突直前の A の速さに変換され、もう一度等加速度運動の計算を行えば O での出発時に戻れる。

解答

モデル

各円板を、摩擦係数（coefficient of friction）μ の水平で粗い面上にある質量 m の質点（particle）とみなす。円板が滑っている間、それにはたらく力は、下向きの重力 mg、上向きの垂直抗力（normal reaction）R、そして運動を妨げる向きの最大摩擦力（limiting friction）F である。



鉛直方向に力を分解（resolving）すると、鉛直方向の加速度はないので $R = mg$ である。円板は滑っているので摩擦力は最大摩擦力であり、$F = \mu R = \mu mg$ となる。水平方向に分解すると $m\ddot{x} = -\mu mg$ なので、滑っている円板はすべて一定の割合

$$a = \mu g,$$

で減速し、これは円板の質量によらない。また、衝突は瞬間的に起こると仮定する。したがって衝突そのものの間に摩擦がはたらく時間はなく、そのとき問題になるのは円板どうしの間の衝突力だけであり、OC 方向の運動量（momentum）は保存される。

衝突後の B の速さ

B は O から距離 d の点から出発し、O から距離 $2d$ の点 C で止まるので、滑る距離は d である。衝突直後の速さを w とする。終速度 0、加速度 $-\mu g$、変位 d として $v^2 = u^2 + 2as$ を用いると、

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

となり、これが求める結果である。

衝突直前の A の速さ

A が速さ u で B に衝突し、衝突直後の A の速度を v_A とする（どちらも $O \to C$ の向きを正とする）。質量がともに m で等しいので、運動量保存則より

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

であり、ニュートンの実験法則（Newton's experimental law）より

$$w - v_A = eu.$$

である。これらを足し合わせると v_A が消去されて $2w = (1+e)u$ となるので、

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

（代わりに引き算をすると $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$ が得られるので、A はより遅い速さで同じ向きに進み続ける。）

> **考えてみよう** A が再び B に追いついて、計算が台なしになることはないだろうか？

ない。衝突後は両方の円板が同じ割合 μg で減速するので、両方が動いている間、速さの差 $w - v_A = eu$ は一定に保たれる。B が A より遅くなることはないので前にあり続

け、また、より遅い速さから動き始める A が先に止まる。したがって衝突はちょうど 1 回だけであり、d から $2d$ までの B の移動は妨げられない。($e = 0$ のときは、両方の円板は止まるまで一体となって動き、やはりそれ以上の衝突は起こらない。)

出発時の速さ

A は O から B まで距離 d を μg で減速しながら滑るので、再び $v^2 = u^2 + 2as$ より

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

u を代入すると、

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{4 \cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}\left(4 + (1+e)^2\right) \\ &= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}\,(5 + 2e + e^2). \end{aligned}$$

$U > 0$ かつ $1 + e > 0$ なので正の平方根をとると、

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}\,(5 + 2e + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

となり、求める式が得られる。

検算

- 完全弾性衝突(perfectly elastic)、$e = 1$ の場合:同じ円板どうしは速度を交換するので、A はぴたりと止まり、B は A の到着時の速さ $u = w$ で動き出す。公式から $U = \sqrt{2}\,\sqrt{2\mu g d} = \sqrt{2\mu g (2d)}$ が得られ、これはちょうど 1 枚の円板が全距離 $2d$ を滑って C に達するのに必要な速さである。これは理にかなっている。運動量がそのまま受け渡されるのである。
- 完全非弾性衝突(perfectly inelastic)、$e = 0$ の場合:公式から $U = \sqrt{5}\,\sqrt{2\mu g d}$ が得られ、これは $e = 1$ の場合より大きい。衝突で運動エネルギー(kinetic energy)が失われるのだから、そうなるべきである。より一般に、$(5 + 2e + e^2)/(1+e)^2 = 1 + 4/(1+e)^2$ は e が増加すると減少する。
- 次元(dimensions):μ と e は無次元の数であり、$\sqrt{gd}$ は速さである。
- 数値的には、$\mu = 0.1$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 1\ \mathrm{m}$、$e = 0.5$ とすると、公式から $U = \frac{7}{3} \approx 2.33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ が得られる。この U から小さな時間刻みで運動を逐次計算すると(μ、d、e を無作為に何通りも選んでも)、B は O から $2d$ の 0.001% 以内の位置で静止する。

よくある間違い

- 衝突の前後でエネルギー保存則を適用してしまう。$e = 1$ でない限り、衝突で運動エネルギーは失われる。衝突では運動量と反発の法則（restitution law）を用い、仕事とエネルギーの関係（あるいは $v^2 = u^2 + 2as$）を用いるのは出来事と出来事の間だけにすること。
- A も衝突前に距離 d だけ滑ることを忘れて、$U = u$ と書いてしまう。
- 反発の法則を逆向きに立ててしまう。遠ざかる速さ $w - v_A$ こそが、接近の速さ u の e 倍に等しいのである。

STEP のその先へ

ここで見事なのは、摩擦によって、質量にかかわらずすべての円板が同じ減速度をもつという点である。そのため、μg で減速する座標系（frame）では、両方の円板が滑っている間は氷は実質的に摩擦がないのと同じになり、衝突は教科書どおりのものに見える。都合のよい座標系を選ぶことは大学の力学における中心的な技法であり、摩擦の法則 $F = \mu R$ そのものも経験的なモデルであって、その限界を知っておく価値がある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と摩擦の両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 13 問

力学 ・ 円運動

> **STEP I 見本問題、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q13

鍵となる考え方

これは、糸が伸びることのできる円錐振り子（conical pendulum）である。フックの法則（Hooke's law）は張力（tension）を糸の長さに結びつけ、一方で力を鉛直方向と水平方向に分解すると、張力が g および ω に結びつく。糸は鉛直方向と 0 でない角をなすので、張力は真に mg より大きくなければならない。この一つの事実が、二つの不等式の両方を導くのである。

解答

粒子を、フックの法則に従う軽い弾性糸につながれた質点（point mass）としてモデル化し、空気抵抗は無視する。λ を弾性係数（modulus of elasticity）とする。

弾性係数。 静止してつり下がっているとき、糸の伸び（extension）は $2a - a = a$ であり、張力は重力とつり合う：

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

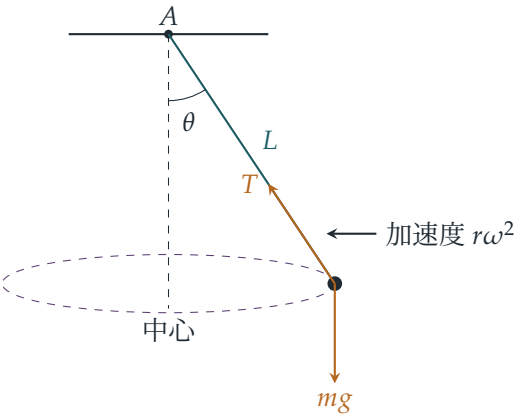
したがって、糸の長さが L のとき、その張力は

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

である。

円運動。 粒子が A の下方で水平な円を描いて運動し、長さ L の糸が鉛直下向きと角 θ をなすとする。運動は A の高さより下での本当の円運動であるから、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であ

り、したがって $\sin\theta > 0$ かつ $0 < \cos\theta < 1$ である。円の中心は A の真下にあり、半径は $r = L\sin\theta$ である。



A を通る鉛直線のまわりの粒子の角速度（angular speed）は ω であるから、その加速度は $r\omega^2 = L\omega^2\sin\theta$ であり、水平に中心へ向かう。鉛直方向の加速度はない。

鉛直方向に分解すると

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

水平方向に、中心へ向かう向きに分解すると

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

となる。ここで $\sin\theta \neq 0$ であるから $\sin\theta$ で割ってよい。

考えてみよう 円運動が本当の円運動である（粒子が単に静止してつり下がっているのではない）という事実は、どこで使われているか？

それは二度使われている。(2) で $\sin\theta$ で割るところと、後で $\cos\theta < 1$ とするところである。もし $\theta = 0$ ならば、粒子は単に軸上で静止してつり下がっているだけであり、(2) は何も主張せず、どんな ω でも「成り立って」しまう。

糸は $2a$ より長い。 (1) より、$0 < \cos\theta < 1$ であるから

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

フックの法則を用いると、これは

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad \Longrightarrow \quad L - a > a \quad \Longrightarrow \quad L > 2a,$$

を意味する。したがって、糸は $2a$ より長く伸ばされている。

ω の範囲。 フックの法則から得られる T の式と (2) から得られる式を等しいとおくと

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

$L > 2a$ であるから $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$ であり、よって $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$ である。したがって

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

となり、これが示すべきことであった。

逆（converse）（要求されてはいないが、安心のために）。 ω がこの範囲にあるとき、$L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$ とおく。これは正であり、$L > 2a$ を満たし、$\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$ を与える。この値は 0 と 1 の間に真に含まれる。したがって、そのようなすべての ω に対して、円錐運動が実際に存在する。

検算

- 極限：$L \to 2a$ のとき、張力は mg に近づき、$\theta \to 0$ かつ $\omega^2 \to g/(2a)$ となる。これは長さ $2a$ の単振り子（simple pendulum）の微小振動の振動数である。$L \to \infty$ のときは $\omega^2 \to g/a$ となる。
- 数値的に：$\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$ とすると、$L = 4a$、$T = 3mg$、$\cos\theta = \frac{1}{3}$ が得られる。この初期条件から三次元の運動方程式を数値的に 2 周分進めたところ、粒子は予測された円上に、単位長さの 10^{-13} 以内の精度でとどまった。
- 単位：g/a の単位は s^{-2} であり、ω^2 の単位として正しい。

よくある間違い

- 円の半径を $L\sin\theta$ ではなく L としてしまう。そうすると (2) で $\sin\theta$ が約分されなくなる。
- $T > mg$ には $\cos\theta < 1$、すなわち $\theta \neq 0$ が必要であることを忘れる。真の不等式はこのことに依存している。
- 伸びた長さ L の代わりに、自然長（natural length）a（あるいはつり合いの長さ $2a$）を半径として用いてしまう。

STEP のその先へ

下限 $\omega^2 = g/(2a)$ は鉛直線のまわりの微小振動の振動数であり、これは偶然ではない。軸の近くでの定常な円錐運動は、位相が 4 分の 1 周期ずれた、互いに垂直な二つの微小振動にほかならないのである。上限は、糸がどれほど伸びても、糸の硬さがもはや向心力（centripetal force）を供給できなくなるところである。定常運動（steady motion）とその安定性（stability）を調べること、たとえば粒子が円軌道から少しずらされたときに何が起こるかを問うことは、大学 1 年の力学における標準的な話題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円錐振り子と回転系における運動の解析を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 14 問

確率・統計 ・ 期待値

STEP I 見本問題、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

鍵となる考え方

すべては一つの表にかかっている。公平な 4 面のさいころ 2 個の目の和の分布（distribution）である。これが得られれば、どの予想 x に対しても期待利得（expected gain）は「賞金 × 勝つ確率 − 罰金 × 負ける確率」にすぎない。面白いのは、大きな予想ほど賞金は大きいが勝つ確率は小さいという緊張関係があることで、すべてを比べてみるまでは最良の予想は明らかでない。

解答

目の和を S とする。各さいころは 1,2,3,4 をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で独立に（independently）出すので、16 通りの順序対はどれも同様に確からしい。各和をとる対を数えると、次のようになる。

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

（たとえば、$S=5$ となるのは $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ のときである。）

B が x と予想し、$p=\mathrm{P}(S=x)$ とすると、B の利得 G（ペンス）は確率 p で $100x^2$、確率 $1-p$ で $-50x$ である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x\big[(2x+1)p-1\big].\end{aligned}$$

x をつくる方法の数を k として $p = \frac{k}{16}$ と書くと、

$$\mathrm{E}(G) = \frac{25x\left[k(2x+1) - 16\right]}{8}.$$

小問 (i)

和が 8 になるのは $(4,4)$ だけなので $p = \frac{1}{16}$ であり、

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

となる。よって、8 と予想したときの B の期待利得は、求めるとおり 25 ペンスである。

小問 (ii)

$2, 3, \ldots, 8$ 以外の予想は決して勝てないので（目の和は正であるから x は正とする）、損をするだけである。起こりうる 7 つの和について、上の式から次の表が得られる。

x	2	3	4	5	6	7	8
k	1	2	3	4	3	2	1
$\mathrm{E}(G)$（ペンス）	−68.75	−18.75	137.5	437.5	431.25	306.25	25

たとえば $x = 5$ のとき、$\mathrm{E}(G) = \frac{25\cdot 5\,(4\cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125\cdot 28}{8} = 437.5$ である。

> **考えてみよう**　賞金は x^2 のように増えるのに、なぜ 7 や 8 のような大きな予想が最良ではないのだろうか？

賞金はたしかに急速に増えるが、勝つ確率は 5 の両側で減っていき、しかも罰金ははるかに起こりやすい「外れ」の場合に支払われる。$x = 8$ では確率が $\frac{1}{16}$ まで下がり、大きな賞金をほぼちょうど打ち消してしまう。二つの効果が最もよく釣り合うのは中央付近である。$x = 6$ は $x = 5$ より賞金が大きいが、勝ち方が 4 通りではなく 3 通りしかなく、わずかに及ばない。

したがって、B には $\boxed{x = 5}$ と予想するよう勧める。期待利得は 1 回あたり 437.5 ペンス、すなわち £4.375（約 £4.38）である。

検算

- 表の確率の和は $\frac{16}{16} = 1$ である。
- 小問 (i) はちょうど 25 になり、表と式が正しいことを裏づけている。
- 5 と予想するゲームを 400 000 回シミュレーションしたところ、平均利得は約 437.2 ペンスであり、正確な値 437.5 とよく合った。

よくある間違い

- 和 2 から 8 を同様に確からしいとみなすこと。同様に確からしい結果は 16 通りの順序対であるから、そうはならない。
- B が $50x$ を失うのは確率 1 ではなく確率 $1-p$ であることを忘れること。
- 賞金が大きいからといって $x=6$ や $x=7$ で止めてしまうこと。5 と 6 は僅差なので、すべての値を計算しなければならない。

STEP のその先へ

これは小さな意思決定問題である。期待される報酬を最大にする行動を選ぶのである。大学では同じ考え方が決定理論（decision theory）や、独立な確率変数（random variable）の和の研究に現れる。そこでは和の分布は**畳み込み**（convolution）によって求められ（ここでは表の三角形の形がそれにあたる）、さいころが多数になると中心極限定理（central limit theorem）により正規分布の曲線に近づく。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）はその両方を扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 15 問

確率・統計 ・ 確率変数の和

> **STEP I 見本問題、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q15

鍵となる考え方

C の一見奇妙な分布（distribution）は、価格の末尾の数字が $0, 1, \ldots, 9$ のどれである確率も等しいとすれば、1 つの価格を 10 ペンス単位に四捨五入したときに生じる誤差そのものである。このとき買い物客の誤差の合計は C と同じ分布をもつ 36 個の独立（independent）な確率変数の和となるので、その平均と分散はただちに求まり、20 ペンスの食い違いがどれほど意外なものかは中心極限定理（Central Limit Theorem）が教えてくれる。

解答

C の期待値と分散

すべての i について $\mathrm{P}(C = i) = \mathrm{P}(C = -i)$ であるから、この分布は 0 に関して対称（symmetric）である。したがって項 $i\,\mathrm{P}(C = i)$ は対ごとに打ち消し合い、

$$\mathrm{E}(C) = 0.$$

である（確率の総和は確かに 1 である：$9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = 1$）。平均が 0 であるから、分散（variance）は単に $\mathrm{E}(C^2)$ に等しい：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) &= 2 \cdot \frac{25}{20} + \frac{2}{10}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2 \cdot 30}{10} = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

買い物客の見積もり

モデル。 1 つの商品について、実際の価格から四捨五入後の価格を引いたものをペンス単位で C とする。これは価格の末尾の数字 d だけで決まる。d は $0, 1, \ldots, 9$ のどれである確率も等しいと仮定する。ここで「無作為に」買うというのはこういう意味であるべきだが、これは実際の価格についての仮定である。

- $d = 0$：四捨五入は起こらないので $C = 0$。
- $d = 1, 2, 3, 4$：価格は d だけ切り下げられるので $C = d$。
- $d = 6, 7, 8, 9$：価格は $10 - d$ だけ切り上げられるので $C = -(10 - d)$、すなわち $-4, -3, -2, -1$ となる。
- $d = 5$：価格は等しい確率で切り下げられるか切り上げられるので、$C = 5$ または -5 であり、それぞれの確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$ である。

$-4, \ldots, 4$ のそれぞれはちょうど 1 つの数字から確率 $\frac{1}{10}$ で生じ、± 5 の確率はそれぞれ $\frac{1}{20}$ である。これはまさに前半の分布であり、だからこそ前半はあのように設定されていたのである。

誤差の合計。 36 個の商品の誤差を $C_1, \ldots, C_{36}$ とし、

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{36}$$

を真の請求額から買い物客の見積もりを引いたものとする。商品は無作為に選ばれるので、C_j は互いに独立で、それぞれ C と同じ分布に従うとみなす。すると

$$\mathrm{E}(S) = 36 \cdot 0 = 0, \qquad \mathrm{Var}(S) = 36 \cdot \tfrac{17}{2} = 306,$$

となる（分散の計算には独立性を用いた）。よって S の標準偏差（standard deviation）は $\sqrt{306} \approx 17.5$ ペンスである。

> ? **考えてみよう** 20 ペンスは大きな食い違いだろうか、それとも小さな食い違いだろうか。

これは 1 回の四捨五入の誤差の大きさとではなく、標準偏差と比べなければならない。レジの請求額は見積もりより 20 ペンス高いので、$S = 20$ である。これは平均より

$$\frac{20}{\sqrt{306}} \approx 1.14$$

標準偏差だけ上にある。S は独立同分布な 36 個の確率変数の和であるから、中心極限定理により S は近似的に $\mathrm{N}(0, 306)$ に従う。（S は整数値をとるので）連続性補正

（continuity correction）を行うと、

$$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{19.5}{\sqrt{306}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.11) \approx 0.13,$$

となる。ただし $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ である。（どちらの向きであれ）少なくともこれだけ大きな誤差は、およそ 26% の確率で起こる。

したがって、買い物客は誤りを疑うべきでは**ない**。20 ペンスの差は四捨五入の誤差の通常のばらつき、つまりおよそ 1 標準偏差の範囲に十分収まっており、7 回か 8 回の買い物に 1 回程度は起こることである。標準偏差のおよそ 2 倍を超える食い違い、たとえば 35 ペンス以上であって初めて、本当に疑う根拠になる。

検算

- 価格を 10 ペンス単位に四捨五入すると変化は高々 5 ペンスなので、36 個の商品での最悪の場合は 180 ペンスである。典型的な誤差がおよそ 17 ペンスとこれよりはるかに小さいのは当然である。正の誤差と負の誤差が大部分打ち消し合うからである。
- コンピュータで、四捨五入の誤差がちょうど C の分布をもち、$\mathrm{E}(C) = 0$、$\mathrm{Var}(C) = \frac{17}{2}$ であることを確かめた。さらに分数を用いて 36 個の畳み込み（convolution）を厳密に計算したところ、$\mathrm{Var}(S) = 306$、$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx 0.1330$ となった。これに対し正規近似（normal approximation）では 0.1325、2×10^5 回の買い物のシミュレーションでは 0.132 であった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(S)$ を $36^2\,\mathrm{Var}(C)$ としてしまう。これは $36C$、つまり 1 つの誤差を 36 回繰り返したものの分散である。独立な誤差については、分散は単に足し合わされる。
- S がちょうど 20 となる確率（およそ 0.012）を意外さの尺度とみなしてしまう。S の個々の値はどれもかなり起こりにくい。重要なのは、観測された誤差と少なくとも同じ大きさの誤差が起こる確率である。
- 何を仮定しているかを述べ忘れる。すなわち、価格の末尾の数字が一様分布（uniform distribution）に従い、各商品の誤差が独立であるという仮定である。

STEP のその先へ

これは仮説検定（hypothesis test）の背後にある推論である。何も問題は起きていない（ここでは S は単なる四捨五入の誤差である）と仮定し、観測された結果と少なくとも同じくらい極端な結果がどれほど起こりやすいかを問うのである。同じ四捨五入の誤差の解析は数値解析（numerical analysis）でも用いられ、そこでは多数の数を四捨五入したときの誤差は、通常その個数に比例してではなく、個数の平方根のように増大する。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、確率変数（random variable）の和と中心極限定理をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP I 見本問題、第 16 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

STEP I 見本問題、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q16

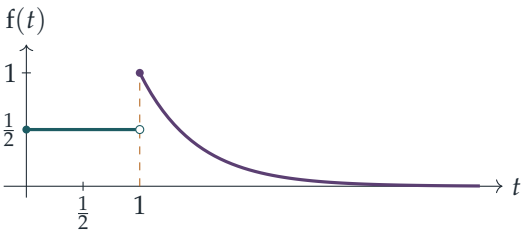
鍵となる考え方

未知数 k は全確率が 1 であることから決まり、それ以外はすべて確率密度（density）の二つの部分を別々に積分すれば求まる。費用については、連続変数 T を離散変数に置き換えるのがコツである。硬貨の枚数は完了した半分単位の分（30 秒）が何回経過したかだけで決まるので、T がそれぞれの半分単位の区間に入る確率が求まればよい。あとは等比級数（geometric series）に類する級数が片づけてくれる。

解答

k と平均を求める

この確率密度は、$[0,1)$ 上の高さ $\frac{1}{2}$ の平らな部分と、それに続く指数関数的な裾（exponential tail）からなり、$t=1$ で跳びがある。



最初の部分が確率 $\frac{1}{2}$ を担うので、裾の部分が残りの $\frac{1}{2}$ を担わなければならない：

$$k\int_1^\infty \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = k\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^\infty = \tfrac{1}{2}k\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad k = \mathrm{e}^2.$$

（したがって $t \geq 1$ における確率密度は e^{2-2t} であり、図のとおり $t = 1$ で 1 に等しい。）

平均については、$u = t$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int_1^\infty t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^\infty + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2},$$

となる。ここで $t \to \infty$ のとき $t\,\mathrm{e}^{-2t} \to 0$ であることを用いた。よって

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^2 \cdot \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = 1,$$

であり、題意のとおり通話時間の期待値（expected value）は 1 分である。

累積分布関数

$\mathrm{F}(t) = \mathrm{P}(T \leq t)$ とおく。$t < 0$ のときは 0、$0 \leq t < 1$ のときは $\int_0^t \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}t$、そして $t \geq 1$ のときは

$$\mathrm{F}(t) = \tfrac{1}{2} + \int_1^t \mathrm{e}^{2-2s}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{2-2t}\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t}.$$

である。よって累積分布関数（cumulative distribution function）は

$$\mathrm{F}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \tfrac{1}{2}t & 0 \leq t < 1, \\ 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t} & t \geq 1. \end{cases}$$

となる。f は $t = 1$ で跳ぶが、F はそこで連続であり（どちらの式も $\tfrac{1}{2}$ を与える）、$t \to \infty$ のとき $\mathrm{F}(t) \to 1$ であることに注意しよう。後で使う形として、$t \geq 1$ のとき $\mathrm{P}(T > t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t}$ である。

費用の期待値

最初に硬貨を 1 枚入れ、その後は 30 秒が経過するたびにもう 1 枚入れる。したがって通話が T 分続くとき、完了した 30 秒の回数は $\lfloor 2T \rfloor$ であり、

$$C = 10\big(1 + \lfloor 2T \rfloor\big).$$

となる。（通話がちょうど 30 秒の区切りで終わったその瞬間に硬貨を入れるかどうかは問題にならない。T は連続なので、そうなる確率は 0 である。）

考えてみよう 連続な T から C の分布へはどうやって移ればよいだろうか？

事象 $C = 10(n+1)$ はちょうど事象 $\tfrac{n}{2} \leq T < \tfrac{n+1}{2}$ であり、その確率は F から読み取れる：

- $n=0$：$\mathrm{P}(C=10)=\mathrm{F}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；
- $n=1$：$\mathrm{P}(C=20)=\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；
- $n\geq 2$：両端点がともに 1 以上なので

$$\mathrm{P}\big(C=10(n+1)\big)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-n}-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-(n+1)}=\tfrac{1}{2}\big(1-\mathrm{e}^{-1}\big)\mathrm{e}^{2-n}.$$

$r=\mathrm{e}^{-1}$、$m=n-2$ とおくと、$\mathrm{e}^{2-n}=r^m$、$10(n+1)=10(m+3)$ である。すると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C)&=10\cdot\tfrac{1}{4}+20\cdot\tfrac{1}{4}+\sum_{m=0}^{\infty}10(m+3)\cdot\tfrac{1}{2}(1-r)\,r^m\\&=\tfrac{15}{2}+5(1-r)\left(\sum_{m=0}^{\infty}mr^m+3\sum_{m=0}^{\infty}r^m\right).\end{aligned}$$

$0<r<1$ なので、等比級数から $\sum r^m=\dfrac{1}{1-r}$ が得られ、これを項別微分（differentiating term by term）して r を掛ければ $\sum mr^m=\dfrac{r}{(1-r)^2}$ が得られる。したがって

$$\mathrm{E}(C)=\tfrac{15}{2}+5(1-r)\left(\frac{r}{(1-r)^2}+\frac{3}{1-r}\right)=\tfrac{15}{2}+\frac{5r}{1-r}+15.$$

最後に $\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ なので

$$\mathrm{E}(C)=22\tfrac{1}{2}+\frac{5}{\mathrm{e}-1},$$

となり、題意が示された。数値ではおよそ 25.41 ペンスである。

考察

1 分あたり 20 ペンスならば、平均 1 分の通話の費用は平均 20 ペンスになるはずだが、実際には $\mathrm{E}(C)\approx 25.4$ である。この差が生じるのは、その男性が 30 秒ごとに**前払い**しているからである。どの硬貨も 30 秒分をまるごと買うが、最後の 1 枚分が使い切られることはほとんどない。実際、$\lfloor 2T\rfloor>2T-1$ なので、すべての通話について $C=10(1+\lfloor 2T\rfloor)>20T$ が成り立つ。費用は通話時間を次の 30 秒の区切りまで**切り上げる**ので、$\mathrm{E}(C)$ は $20\,\mathrm{E}(T)$ を、支払ったのに使わなかった時間の期待値の 20 倍（ここではおよそ 5.4 ペンス）だけ上回る。

検算

- C の確率の和は 1 になる：$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\sum_{m\geq 0}\frac{1}{2}(1-r)r^m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$。

- 評価 $20T < C \leq 20T + 10$ から $20 < \mathrm{E}(C) \leq 30$ が得られ、25.41 は余裕をもってその範囲に収まる。最後の 30 秒のうち使われない時間が一様分布（uniform）に従うなら、超過分はおよそ 5 ペンスと予想されるが、長い裾のためにそれより少し多くなる。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により全確率 1、平均 1 が得られ、また 10^6 回の通話のシミュレーション（半分は $[0,1)$ 上の一様分布、残り半分は 1 にレート 2 の指数分布を加えたもの）では平均費用 25.41 ペンスとなり、$22.5 + 5/(\mathrm{e}-1) = 25.4099$ と一致した。

よくある間違い

- 最初の硬貨を忘れて、硬貨の枚数を $1 + \lfloor 2T \rfloor$ ではなく $\lfloor 2T \rfloor$ としてしまう。これでは答えがちょうど 10 ペンス少なくなる。
- $t = \frac{1}{2}$ で F に $t \geq 1$ の式を使ってしまう。区間 $[0, \frac{1}{2})$ と $[\frac{1}{2}, 1)$ は一様な部分を使って扱わなければならない。

STEP のその先へ

T の裾は無記憶性（memoryless property）をもつことに注目しよう。$T \geq 1$ という条件の下で、残りの時間 $T - 1$ はレート 2 の指数分布に従う。$n \geq 2$ に対する確率が等比数列をなすのはこのためである。$N = \lfloor 2T \rfloor$ とおくと、裾和公式（tail-sum formula）$\mathrm{E}(N) = \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(N \geq n)$ を使えば同じ答えがさらに速く得られる。このような離散的な振る舞いと連続的な振る舞いの混合は、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で丁寧に扱われており、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率入門）には無記憶性の例がさらに数多く載っている。

解答例

STEP II 見本問題、第 1 問

純粋数学 ・ 部分分数分解

> **STEP II 見本問題、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q1

鍵となる考え方

いつもの部分分数分解（partial fractions）の手順に取りかかる前に、分子を見てみよう。分子は分母の導関数（derivative）にちょうど一致している。分母は一次式の積に因数分解できるので、f は対数微分（logarithmic derivative）であり、積の対数微分は各因数の対数微分の和になる。後半では、方程式は和が 1 になる 3 つの単位分数（unit fraction）の式となり、大きさを評価するだけで x は非常に小さい値に限られる。

解答

部分分数分解

分母は次のように因数分解できる。

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x\big(x^2 + (a+b)x + ab\big) = x(x+a)(x+b),$$

これを微分すると

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

となり、これはまさに分子である。したがって $\mathrm{f}(x) = D'(x)/D(x)$ である。

一般の場合、 $a \neq b$。3 つの因数 $x, x+a, x+b$ は互いに異なる（$a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ であるから）。よって、3 つの単純な部分分数が現れると予想される。積の微分法（product rule）により

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

であり、これを $D(x) = x(x+a)(x+b)$ で項ごとに割ると

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

を得る。（同じことであるが、$\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$ であり、積の対数は和に分かれる。）もちろん、隠蔽法（cover-up rule）を使っても同じ結果が得られる。$x = 0$ における留数（residue）は $ab/(ab) = 1$ であり、$x = -a$ では $\big(3a^2 - 2a^2 - 2ab + ab\big)/\big((-a)(b-a)\big) = a(a-b)/\big(a(a-b)\big) = 1$ である。$x = -b$ でも同様である。

考えてみよう $a = b$ のとき、この形では何がまずいだろうか。

特別な場合、$a = b$。 このとき分母は $x(x+a)^2$ となり、重複因数をもつ。したがって標準的な形は $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x+a)^2}$ となるはずである。しかし、分子も因数 $x+a$ をもつ。

$$3x^2 + 4ax + a^2 = (3x+a)(x+a),$$

よってこれが約分され、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x+a}{x(x+a)} = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+a}} \qquad (a = b),$$

が残る。最後の等号は隠蔽法による（$x = 0$ で $a/a = 1$、$x = -a$ で $-2a/(-a) = 2$）。$(x+a)^{-2}$ の項はまったく現れず、$C = 0$ である。これは一般の場合の式で b を a に置き換えたものと一致するが、重複因数が 2 乗の項を生むのではなく消えてしまったことには注目する価値がある。

a と b は 0 でないので、因数 x が $x+a$ や $x+b$ と一致することはない。よって場合はこれですべてである。

$\mathrm{f}(x) = 1$ となるとき

ここで x, a, b を正の整数とする。上のどちらの場合も（$a = b$ の式は一般の式で $b = a$ としたものにすぎない）

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b},$$

であり、3 つの項はすべて正である。$a, b \geq 1$ であるから、後ろの 2 つの項はそれぞれ $\frac{1}{x}$ より真に小さい。

考えてみよう それぞれ $\frac{1}{x}$ 以下である 3 つの分数の和が 1 になるとき、x はどこまで大きくなれるだろうか。

▶ $x = 1$ ならば $\mathrm{f}(x) = 1 + (\text{正の数}) > 1$ である。

- $x \geq 4$ ならば $\mathrm{f}(x) < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} < 1$ である。
- $x = 3$ ならば $x + a \geq 4$ かつ $x + b \geq 4$ であるから、$\mathrm{f}(x) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$ である。

したがって $\mathrm{f}(x) = 1$ ならば $x = 2$ でなければならず、このとき

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} = \frac{1}{2}.$$

が必要である。両辺に $2(2+a)(2+b)$ を掛けると $2(2+b) + 2(2+a) = (2+a)(2+b)$、すなわち $8 + 2a + 2b = 4 + 2a + 2b + ab$ となるので

$$ab = 4.$$

である。a, b が正の整数であることから、可能性は $(a,b) = (1,4), (2,2), (4,1)$ のみである。よって $\mathrm{f}(x) = 1$ となるのはちょうど

$$(x,a,b) = (2,1,4), \quad (2,2,2), \quad (2,4,1),$$

のときであり、求められていたとおり有限個（3 つ）である。$(2,2,2)$ は特別な場合 $a = b$ にあたることに注意しよう：$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$。

検算

3 つの解は、よく知られた単位分数の等式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ と $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ である。数値的には、部分分数分解した形と元の f を、無作為に選んだ 2000 個の有理数点において厳密な有理数演算で比較した（$a \neq b$ と $a = b$ の両方について）。また、$1 \leq x, a, b < 200$ のすべてを総当たりで調べたところ、上の 3 つの組がちょうど見つかり、それ以外はなかった。

よくある間違い

- $a = b$ の場合に $\frac{C}{(x+a)^2}$ の項を立ててがむしゃらに計算し、約分に気づかないこと。$C = 0$ となるはずであり、分子の因数 $(x+a)$ に気づけば手間が省ける。
- $x = 1$ と $x = 3$ を除外し忘れること。粗い評価 $\mathrm{f} < 3/x$ で片づくのは $x \geq 4$ だけである。
- 「$ab = 4$」で止まって解を列挙しないこと、あるいは $(1,4)$ だけを挙げて $(4,1)$ と $(2,2)$ を忘れること。

STEP のその先へ

多項式 D の根を r_i（重根は重複度を込めて数える）とするとき、恒等式 $D'/D = \sum 1/(x - r_i)$ は非常に役に立つ道具である。これは根のべき乗和に関するニュートンの恒等式（Newton's identities）の基礎となり、複素解析では偏角の原理（argument principle）の基礎となる。偏角の原理とは、曲線に沿って f'/f を積分することで、その曲線の内部にある関数の零点の個数を数えるものである。$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ のような方程式を正の整数で解く問題はエジプト分数（Egyptian fraction）の問題と呼ばれ、ディオファントス方程式（Diophantine equation）の古典的な一分野である。そこでは、ここで用いたような評価による議論がすべてを決める。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）は偏角の原理を幾何学的に美しく解説しており、Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）はディオファントス方程式を学び始めるのによい一冊である。

解答例

STEP II 見本問題、第 2 問

純粋数学 ・ 対称な連立方程式

STEP II 見本問題、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q2

鍵となる考え方

3 つの方程式は巡回的（cyclic）であるから、2 つずつ引き算するのが自然であり、それぞれの差は $x+y+z$ を共通因数として因数分解（factorise）できる。差の 2 乗の和は、2 通りの意味で役に立つ。x, y, z で表すとそれは $a+b+c$ の定数倍であり、一方、最初の結果を使うとそれを $a-b, b-c, c-a$ と $x+y+z$ で表すことができる。$x+y+z$ と 2 つずつの差がわかれば、あとは 3 つの 1 次方程式で片がつく。

解答

等しい比

第 1 式から第 2 式を引くと、

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

まったく同様にして（あるいは $x \to y \to z \to x, a \to b \to c \to a$ と巡回的に置き換えて）、

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

$S=x+y+z$ とおく。$a \neq b$ であるから積 $(x-y)S$ は 0 でなく、したがって $S \neq 0$ である（同様に x, y, z は相異なる）。a, b, c は相異なるので $a-b, b-c, c-a$ および S で割ることができ、

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z},$$

となって、示すべき式が得られる。

$x+y+z$ を求める

問題文で示唆されている和を展開すると、

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2\bigl(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\bigr)\\ &= 2\bigl[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\bigr]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

一方、前半の結果から $y-z=(b-c)/S$ などが成り立つので、同じ和は

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2\bigl(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\bigr)}{S^2}.$$

に等しい。2つの式を等しいとおき、a, b, c が正であることから正である $2(a+b+c)$ で両辺を割ると、

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

よって、$\triangle^2$ をこの量とすると $x+y+z=\triangle$ となり、示すべきことが得られた。なお $\triangle^2>0$ である。実際、その分子は $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ の半分であり、これは a, b, c が相異なるとき正である。したがって $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$ という2つの可能性があり、ここまでの議論ではそのどちらかに決まることはない。

方程式を解く

ここまでで次のことがわかっている。

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

3つをすべて足すと、

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

これはきれいに簡単になる。$s=a+b+c$, $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ とおくと $\triangle^2=Q/s$ である。すると

$$\begin{aligned}s\bigl(\triangle^2+2a-b-c\bigr) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= \bigl(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\bigr)+\bigl(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc\bigr)\\ &= 3\bigl(a^2-bc\bigr).\end{aligned}$$

ゆえに $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$ であり、y, z も巡回的な置き換えによって得られる。ここで $(s\triangle)^2=sQ=a^3+b^3+c^3-3abc$ が成り立つ。これはよく知られた因数分解

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\bigl(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\bigr).$$

による。$K=\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}>0$ とおくと $s\triangle=\pm K$ であり、解は

$$(x,y,z)=\pm\frac{1}{K}\left(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab\right),$$

である。ただし、符号はすべての成分で同じものをとる。

考えてみよう 示したのは、解があるとすれば必ずこの形になる、ということだけである。この 2 つは本当にどちらも解なのだろうか。

どちらも解である。上の議論はすべて結論を順に導いただけのものなので、元の式に代入して確かめる必要がある。未知数の 2 乗と 2 つの未知数の積しか現れないので、全体の符号は関係なく、

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)&=a^4-2a^2bc+b^2c^2-\left(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc\right)\\&=a\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)=aK^2.\end{aligned}$$

K^2 で割ると $x^2-yz=a$ が得られる。残りの 2 式も巡回的な置き換えから従う。したがって解はちょうど 2 つあり、一方は他方の符号を反転させたものである。

検算

- $a=1,b=2,c=3$ とする。このとき $a^3+b^3+c^3-3abc=18$, $K=3\sqrt{2}$ であり、正の符号をとった解は $(x,y,z)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$ である。たとえば $x^2-yz=\frac{25-7}{18}=1$ であり、また $x+y+z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で、その 2 乗は $\frac{1}{2}=\frac{14-11}{6}=\triangle^2$ となる。
- 相異なる正の数 a,b,c の組を無作為に 20,000 個とり、両方の符号についてコンピュータで確かめた。公式は 3 つの方程式と等しい比のすべてを、相対誤差 10^{-11} 未満で満たしていた。

よくある間違い

- $\triangle$ として正の平方根だけをとってしまうこと。問題の $\triangle$ は $\triangle^2$ を通してしか定義されておらず、どちらの符号も実際に解を与える。
- $x+y+z$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまうこと。ここでは $a\neq b$ からそれが従う。

STEP のその先へ

恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ は、行が (a,b,c), (c,a,b), (b,c,a) である巡回行列（circulant matrix）の行列式（determinant）であり、

複素数の範囲では $\omega = e^{2\pi i/3}$ を用いて $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ と完全に因数分解される。実は、写像 $(x,y,z) \mapsto (x^2-yz,\, y^2-zx,\, z^2-xy)$ はある巡回行列の余因子行列（adjugate）になっており、これがこの写像をたやすく逆に解ける理由である。巡回行列とその固有ベクトル（eigenvector）は、離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）への穏やかな入門となる。さらに学ぶには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP II 見本問題、第 3 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理

> **STEP II 見本問題、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q3

鍵となる考え方

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）は、帰納法（induction）で自然に示せる。加法定理（compound-angle formulae）により、$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ をもう一つ掛けると偏角に θ が加わるからである。方程式のほうでは、x^k の隣に $\cos ky$、$\sin ky$ が並ぶ形が、「実部と虚部」を強く示唆している。第 1 式を実部（real part）、第 2 式を虚部（imaginary part）とみなし、$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ についての一つの複素数の方程式として扱えば、二つの式は容易に根が見つかる z の 3 次方程式（cubic）にまとまる。

解答

ド・モアブルの定理

n についての帰納法を用いる。$n = 1$ のとき、両辺はともに $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ であるから、主張は成り立つ。

ある $n = k \geq 1$ で成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta,\end{aligned}$$

となる。ここで、1 行目では帰納法の仮定を、2 行目では $\mathrm{i}^2 = -1$ を、3 行目では $\cos(A+B)$ と $\sin(A+B)$ の加法定理を用いた。よって $n = k+1$ でも主張は成り立ち、帰納法によりすべての正の整数 n について成り立つ。

方程式を解く

x、y を実数とし、

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

とおく。ド・モアブルの定理により、$n = 1, 2, 3$ に対して

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

が成り立つ（これは x の符号によらず成り立つ。実数の因数 x は単に x^n として外に出るだけである）。x と y は実数であるから、二つの方程式の左辺はちょうど $z^3 + 2z^2 + 2z$ の実部と虚部である。したがって、二つの実数の方程式の組は、一つの複素数の方程式

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{すなわち} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

と同値である。

考えてみよう なぜ一つの複素数の方程式が二つの実数の方程式と同じになるのか？

二つの複素数が等しいのは、実部どうしが等しく、かつ虚部どうしが等しいとき、またそのときに限る。右辺 -1 の実部は -1、虚部は 0 であり、これは与えられた二つの方程式の右辺そのものである。よって (x, y) が二つの実数の方程式をともに満たすことと、z がこの3次方程式を満たすことは同値である。

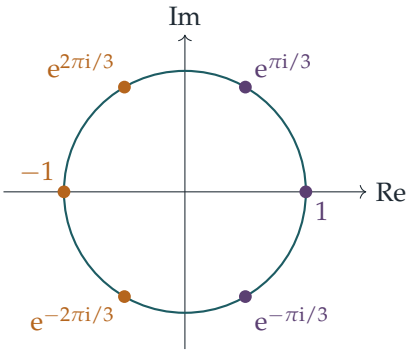
さて、$-1 + 2 - 2 + 1 = 0$ であるから $z = -1$ は根であり、因数で割ると

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

を得る。2次方程式の根は $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$ である。よって三つの根は

$$z = -1 = \cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi, \qquad z = \cos \tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin \tfrac{2\pi}{3},$$

であり、すべて単位円（unit circle）上にある。



残るは、各根を実数の組 (x,y) に戻すことである。$|z|=|x|$ であるから、どの解でも $|x|=1$ である。特に $x=0$ はありえない（$0=-1$ となってしまう）。

- $x=1$ のとき、$\cos y+\mathrm{i}\sin y=z$ であるから、y は三つの根のいずれかの偏角（argument）である。すなわち $y=\pi$、$\frac{2\pi}{3}$、$-\frac{2\pi}{3}$ のいずれかに 2π の任意の整数倍を加えたものである。
- $x=-1$ のとき、$\cos y+\mathrm{i}\sin y=-z$ であり、これは 1、$\cos\frac{\pi}{3}\mp\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ のいずれかである（図のプラム色の点）。よって $y=0$、$-\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{3}$ のいずれかに 2π の任意の整数倍を加えたものである。

これらはいずれも 3 次方程式の根を与えるので、すべて解である。k を任意の整数として、解は

$$x=1,\quad y=\pi+2k\pi \text{ または} y=\pm\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\qquad x=-1,\quad y=2k\pi \text{ または} y=\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi.$$

である。$[0,2\pi)$ の範囲では、$(1,\frac{2\pi}{3})$、$(1,\pi)$、$(1,\frac{4\pi}{3})$、$(-1,0)$、$(-1,\frac{\pi}{3})$、$(-1,\frac{5\pi}{3})$ の 6 組となる。

検算

$x=-1$、$y=0$ を試すと、第 1 式は $-1+2-2=-1$、第 2 式は $0=0$ となる。$x=1$、$y=\frac{2\pi}{3}$ を試すと、余弦は $1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ で $1-1-1=-1$ を与え、正弦は $0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$ で $0-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$ を与える。$x\in[-3,3]$、$y\in[0,2\pi)$ の細かい格子上でコンピュータ探索を行うと、近似解は（丸め誤差の範囲で）上の 6 点にしか見つからないので、見落としはない。

よくある間違い

- x を絶対値（modulus）とみなして $x\geq 0$ と仮定してしまうこと。問題は任意の実数 x を許しており、$x=-1$ の解もまったく同様に正しい。これらは同じ点 z を、y を π だけずらして表したものである。
- $+2k\pi$ を忘れること。y は 2π を法としてしか定まらないので、組 (x,y) は無数に存在する。

STEP のその先へ

二つの実数の方程式を一つの複素数の方程式にまとめるのは定石である。$z=re^{\mathrm{i}\theta}$ の多項式の実部と虚部は、まさにこの種の三角関数の連立方程式を満たし、因数分解

（factorisation）$z^3+2z^2+2z+1=(z+1)(z^2+z+1)$ によって根が単位円上に位置づけられる。大学の最初の講義では、$e^{i\theta}$ を冪級数（power series）で定義する方法に出会うだろう。これによりド・モアブルの定理はすべての整数について成り立ち、さらに（分枝（branches）に注意すれば）整数でない冪にも意味を与えられる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を図形的に解説した書）は、これらすべてを美しく幾何学的に描いている。

解答例

STEP II 見本問題、第 4 問

純粋数学 ・ 双曲線関数

STEP II 見本問題、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q4

鍵となる考え方

これらの恒等式（identity）はどれも、ただ一つの角（あるいはただ一つの双曲的な「角」）についての主張である。右辺に名前を付け、そこから一つの関数の値を読み取り、ピタゴラスの関係式（Pythagorean identities）$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ と $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$ を用いてもう一つの値を求めればよい。本当に注意が必要なのは平方根の符号だけであり、まさにそこで主値（principal value）の範囲が効いてくる。そして最後の小問では、そこで恒等式が成り立たなくなる。

解答

小問 (i)

$\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$ とおく。すると $\tan\theta=\sinh x$ であり、θ は主値なので $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。このとき

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

$(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上では $\cos\theta>0$ なので $\sec\theta>0$ である。また $\cosh x>0$ はつねに成り立つ。正の平方根をとって $\sec\theta=\cosh x$ となり、したがって

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

θ は $\sin^{-1}$ の主値の範囲 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ に属するので、これはまさに $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$ であることを意味する。よって、すべての実数 x について $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$ が成り立ち、示すべきことが示された。

考えてみよう なぜ $\sin\theta = \tanh x$ が得られた時点で議論は終わりにならないのか？

$\sin\theta = \tanh x$ を満たす θ は無数に存在するからである。θ が主値 $\sin^{-1}(\tanh x)$ であると結論できるのは、ここでの θ が、sin が一対一（one-to-one）となる区間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属しているからにほかならない。$\sec\theta$ の符号を決めたのも、この同じ範囲である。

小問 (ii)

$u = \sinh^{-1}(\tan y)$ とおく。$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ では $\tan y$ は有限なので、これは定義される。すると $\sinh u = \tan y$ であり、小問 (i) を $x = u$ として用いると

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

を得る。ここで最後の等号には、$\tan^{-1}$ の主値の範囲である $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ を用いた。両辺の sin をとると $\tanh u = \sin y$ となる。この区間では $|\sin y| < 1$ なので $\tanh^{-1}(\sin y)$ は定義され、さらに tanh は一対一であるから $u = \tanh^{-1}(\sin y)$ である。すなわち

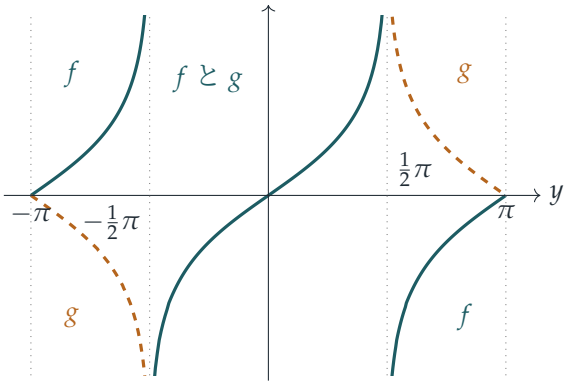
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

（直接示すこともできる。$\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ であり、$\cos y > 0$ なのでこれは正である。よって $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$ となる。）

概形 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$、$g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ とおく。どちらも $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ では定義されない。そこでは $\tan y$ が無限大となり、$\sin y = \pm 1$ となるからである。それ以外での振る舞いは、tan と sin の対称性から分かる。

- どちらも奇関数（odd function）であり、どちらも $y = 0$ と $y = \pm\pi$ で 0 になる。
- tan が周期（period）π をもつので、f も周期 π をもつ。よって $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上では $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 上と同じ値をとり、$-\infty$ から 0 まで増加する。
- $\sin(\pi - y) = \sin y$ なので、g は $y = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上では $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上の値を鏡に映したようにくり返し、$+\infty$ から 0 まで減少する。
- 微分すると $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$、$g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$ である。したがって f は定義されているどの区間でも増加し、一方 g は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ で増加し、その外側では減少する。原点ではどちらも傾き 1 をもつ。$y = \pi$ では、f の傾きは 1、g の傾きは -1 である。

$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上では二つのグラフは同じ曲線であり、外側の区間ではそれぞれが他方を横軸に関して折り返したものになっている。



実線：$f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$。破線：$f$ と異なる部分の $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$。点線 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ は漸近線（asymptote）である。

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ における関係 概形からは、そこで $f = -g$ となることが予想され、実際にこれは証明できる。$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ ならば $y - \pi$ は $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ に属するので、いま証明した恒等式を $y - \pi$ に適用できる：

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

ここで $\tan(y-\pi) = \tan y$、$\sin(y-\pi) = -\sin y$、および $\tanh^{-1}$ が奇関数であることを用いた。よって $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ に対して

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

（奇関数であることから、同じ関係は $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$ でも成り立つ。）

考えてみよう $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ では、小問 (ii) の議論はどこで破綻するのか？

$\tan^{-1}(\tan y) = y$ の段階である。$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ の外にある y については、主値は y ではなく $y - \pi$ になる。同じことだが、直接の議論では、そこでは $\cos y < 0$ なので $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$ となり、このマイナス符号こそが答えに現れる符号である。

検算

- $y = 1$ のとき：$\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$。$y = 2$ のとき：$\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$ であるのに対し $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$ であり、符号が反転することが確かめられる。

- 符号：$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ では $\tan y < 0$ だが $\sin y > 0$ なので、二つの式は逆の符号をもたなければならず、等しくはなり得ない。
- 小問 (i) で x が大きいとき：両辺とも $\frac{1}{2}\pi$ に近づき、期待どおりである。

両方の恒等式と、$\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$ における関係 $f = -g$ を、10^5 個の無作為な点で数値的に確かめた。

よくある間違い

- $\sec y$ の符号を確かめずに $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ と書いてしまう。これこそが最後の小問の要点である。
- θ が主値である理由を述べずに、$\sin\theta = \tanh x$ から $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$ と結論してしまう。
- $\frac{1}{2}\pi$ より先で g を f と同じ形に描いてしまう。g が受け継ぐのは tan の周期性ではなく、$\frac{1}{2}\pi$ に関する sin の対称性である。

STEP のその先へ

関数 $\mathrm{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$ は**グーデルマン関数**（Gudermannian function）と呼ばれる。これは複素数を使わずに三角関数と双曲線関数（hyperbolic function）を結びつけるものであり、小問 (ii) はその逆関数が $\sinh^{-1}(\tan y)$ であることを示している。この関数はメルカトル（Mercator）図法に現れ、地図上の縦方向の座標を緯度に変換する役割を果たす。ここで恒等式をつまずかせた逆関数とその分枝（branch）は、複素数 z に対する $\log z$ や $z^{1/2}$ を学ぶときに中心的な話題となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）は、これを見るのにうってつけの美しい本である。

解答例

STEP II 見本問題、第 5 問

純粋数学 ・ 級数と積分による評価

> **STEP II 見本問題、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q5

鍵となる考え方

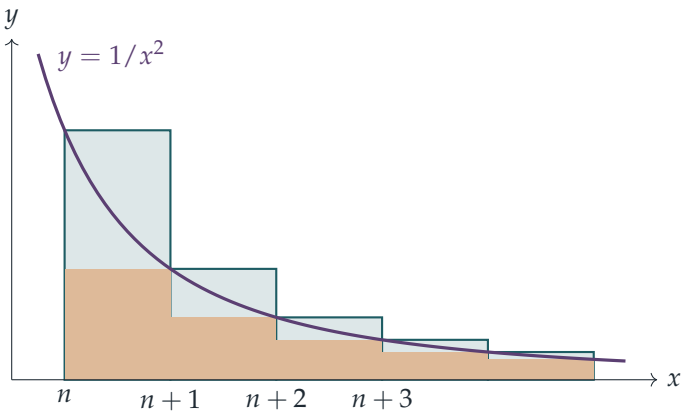
減少関数（decreasing function）の値の和は幅 1 の長方形の列として、積分は曲線の下の面積として図示できる。各標本点の右側に長方形を置くと長方形は曲線の上にはみ出し、左側に置くと曲線の下に収まる。これによって挟み撃ち（sandwich）が得られ、その後はすべて帳簿付けのような作業にすぎない。級数（series）の末尾部分（tail）は二つの簡単な分数の間に閉じ込められるので、末尾部分の推定値を加えることで近似は劇的に改善される。

解答

挟み撃ち

$f(x) = 1/x^2$ とおく。これは $x > 0$ において正であり、狭義単調減少（strictly decreasing）である。また次も必要になる。

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$



上側の長方形（ティール色の枠線）。$[r, r+1]$ の上に高さ $f(r) = 1/r^2$ の長方形を置く。f は減少関数なので $r < x \leq r+1$ に対して $f(x) < f(r)$ であり、この長方形の面積 $1/r^2$ は $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ より真に大きい。これらを $r = n, n+1, \ldots$ について足し合わせると

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

を得る。

下側の長方形（琥珀色）。$[r-1, r]$ の上に高さ $f(r) = 1/r^2$ の長方形を置く。今度は $r-1 \leq x < r$ に対して $f(x) > f(r)$ なので、この長方形は曲線の下にあり、その面積 $1/r^2$ は $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ より真に小さい。区間が $[n, \infty)$ を埋め尽くす $r = n+1, n+2, \ldots$ について足し合わせると

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

となる。（三つの量はいずれも有限である。積分は $1/n$ であり、二つの和はそれで上から抑えられる。）これが求める二つの不等式であり、念のため書いておくと次のようになる。

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

末尾部分を閉じ込める

$S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$ とおく。すると $A - S_n$ はちょうど末尾部分 $T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$ に等しい。

$(*)$ の右側の不等式から、直ちに $T < 1/n$ が得られる。

考えてみよう $(*)$ の左側の不等式は和が $r = n$ から始まっているが、末尾部分は $r = n+1$ から始まる。T の下界はどうすれば得られるだろうか。

不等式 $(*)$ はすべての正の整数について成り立つので、その左半分を n の代わりに $n+1$ として適用すればよい。

$$T=\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}>\int_{n+1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n+1}.$$

二つを合わせると

$$\frac{1}{n}>A-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}>\frac{1}{n+1},$$

となり、示すべきことが示された。

最小の n

すべての項は正なので $S_n<A$ であり、誤差は $A-S_n$ である。

- $n\le 9999$ ならば $n+1\le 10^4$ なので、$A-S_n>\dfrac{1}{n+1}\ge 10^{-4}$ となり、誤差が大きすぎる。
- $n=10^4$ ならば $A-S_n<\dfrac{1}{n}=10^{-4}$ となり、誤差は十分小さい。

したがって最小値は $n=10\,000$ である。ここでは両方の不等式が狭義であることが重要である点に注意しよう。$n=9999$ のとき下界はちょうど 10^{-4} であり、$n=10^4$ のとき上界はちょうど 10^{-4} である。

改良された近似値

閉じ込めの不等式の各辺から $\frac{1}{n+1}$ を引くと

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>A-\left(\frac{1}{n+1}+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}\right)>0.$$

となる。よって $\frac{1}{n+1}+S_n$ は依然として A を下回るが、その差は

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

より小さい。$n=10^4$ のとき、これは $\dfrac{1}{10^4\times 10\,001}<\dfrac{1}{10^4\times 10^4}=10^{-8}$ であるから、改良された近似値は 10^{-8} 未満の誤差で A を近似しており、示すべきことが示された。

追加した項 $1/(n+1)$ は末尾部分の推定値であり、末尾部分は幅わずか $1/(n(n+1))$ の区間に押し込められているので、この推定が大きく外れることはありえない。

検算

- 小さな場合：$n=1$ のとき $S_1=1$、$A=\pi^2/6\approx 1.6449$ なので $A-S_1\approx 0.645$ であり、確かに $\frac{1}{2}$ と 1 の間にある。

- $A = \pi^2/6$ を用いて数値的に和を計算すると、$A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$（わずかに大きすぎる）、$A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$（ぎりぎり十分小さい）となり、$n = 10\,000$ が確認できる。
- $n = 10^4$ のとき、改良された近似値の誤差は約 5.0×10^{-9} であり、上界 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$ を下回る。図から予想されるとおり、誤差は上界のおよそ半分である（曲線は各長方形のはみ出し部分をほぼ半分に切る）。

よくある間違い

- 左側の不等式を $n+1$ ではなく n で用いてしまうこと。これでは末尾部分 $A - S_n$ ではなく $\sum_{r=n}^{\infty}$ の下界が得られるだけである。
- 狭義の不等式を広義の不等式として扱ったり、二つの評価の一方しか使わなかったりして、$n = 9999$ や $n = 10\,001$ と答えてしまうこと。$n \le 9999$ を除外するには下界が、$n = 10^4$ を採用するには上界が必要である。
- 長方形を各標本点の逆側に描いてしまい、不等式の向きが逆になること。

STEP のその先へ

これは収束（convergence）の積分判定法（integral test）であり、さらに定量的な副産物も伴っている。級数が収束することを証明するのと同じ長方形が、その末尾部分の評価も与えるのである。和と積分を比較し、両端での導関数によって補正するという形でこの考えを精密化すると、オイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）に至る。この公式は今の場合 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$ を予測するものであり、オイラー（Euler）は $\sum 1/r^2$ が $\pi^2/6$ に等しいことを証明する前に、この方法でその値を小数点以下何桁にもわたって計算した。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、級数とその収束判定法を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 見本問題、第 6 問

純粋数学 ・ 微分方程式から導く加法定理

> **STEP II 見本問題、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

鍵となる考え方

「f は e^x である」と言うことは許されていないので、すべては微分方程式（differential equation）そのものから導かなければならない。使ってよい道具はただ一つ、導関数（derivative）がいたるところで 0 である関数は定数である、という事実である。そこで、導関数が打ち消し合って 0 になるような式を作り、$x = 0$ を代入してその定数を決定するのが要点である。$a - x$ における値と x における値を組にするのは自然な発想である。二つの引数の和はつねに a であり、これはまさに加法定理（addition formula）の形だからである。

解答

指数関数の加法法則

a を固定し、$p(x) = \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x)$ とおく。合成関数の微分法（chain rule）により、$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ を用いると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a-x)] = -\mathrm{f}'(a-x) = -\mathrm{f}(a-x)$ である。よって積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

となり、これが最初の結果である。

すべての x に対して $p'(x) = 0$ であるから、関数 p は定数である。$\mathrm{f}(0) = 1$ であるから、$x = 0$ における値は $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$ である。したがって

$$\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{すべての } x \text{ とすべての } a \text{ について.}$$

ここで任意の x と y をとり、$a = x + y$ と選ぶ。すると $a - x = y$ となり、この恒等式は

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+y),$$

となって、示すべき式が得られる。

余弦の加法定理

同じ方針をなぞる。すなわち、$a - x$ と x で評価した c と s の組合せで、導関数が 0 になるものが必要である。

> **考えてみよう** どの組合せを微分すればよいだろうか？

答えの形を手がかりにしよう。$a = x + y$ のとき欲しいのは $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$、すなわち $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$ である。そこで、これを試すべき関数とする。

a を固定し、

$$g(x) = \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

とおく。合成関数の微分法と与えられた導関数により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)] = -\mathrm{c}'(a-x) = \mathrm{s}(a-x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)] = -\mathrm{s}'(a-x) = -\mathrm{c}(a-x).$$

である。よって積の微分法により、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \bigl[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\bigr] - \bigl[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x) + \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\bigr] \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって g は定数であり、その値は

$$g(0) = \mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0) - \mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0) = \mathrm{c}(a)\cdot 1 - \mathrm{s}(a)\cdot 0 = \mathrm{c}(a).$$

である。ゆえに、すべての x と a について $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x) = \mathrm{c}(a)$ が成り立つ。任意の x と y に対して $a = x + y$ とおけば $a - x = y$ となるから、

$$\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

となり、これが示すべき結果である。

$h(x) = \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) + \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$ に同じ方法を用いると $h' = 0$ かつ $h(0) = \mathrm{s}(a)$ が得られるので、$\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ も成り立つ。

検算

- $y = 0$ とおく。$\mathrm{f}(0) = \mathrm{c}(0) = 1$ と $\mathrm{s}(0) = 0$ を用いると、結果は $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{c}(x) = \mathrm{c}(x)$ に帰着する。

- 余弦の結果に $y = -x$ を代入すると $1 = \mathrm{c}(0) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$ となる。これは姿を変えた $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ にほかならない。
- 微分方程式を数値的に解き（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用い、組み込みの指数関数や三角関数は一切使わない）、$[-3, 3]$ 内の無作為な 60 組で両方の恒等式を検証した。たとえば $x = 0.7$, $y = 1.1$ のとき、余弦の結果の両辺はいずれも小数第 4 位まで -0.2272 である。差はすべて 10^{-11} 未満であった。

よくある間違い

- $\mathrm{f}(a - x)$、$\mathrm{c}(a - x)$ または $\mathrm{s}(a - x)$ を微分するとき、合成関数の微分法から出てくるマイナス符号を忘れる。
- 「導関数が 0 である」で止まってしまい、$x = 0$ で定数を求めたうえで $a = x + y$ と選ぶところまで進まない。
- $\cos(x + y)$ の公式や $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ を引用してしまう。これは問題文で明確に禁じられている。

STEP のその先へ

大学では、これこそが指数関数と三角関数を誠実に定義する方法である。すなわち、これらを微分方程式の解として（あるいはべき級数（power series）として）定義し、よく知られた性質はすべてその定義から導くのである。ここで用いた事実、つまり導関数がいたるところで 0 ならばその関数は定数であるということは、平均値の定理（Mean Value Theorem）の帰結であり、これらの解が一意であることもこの事実から示される。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、この理論を丁寧に組み立てている。

解答例

STEP II 見本問題、第 7 問

純粋数学 ・ 階段関数の積分

STEP II 見本問題、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q7

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$[\mathrm{e}^x]$ は階段関数（step function）である。すなわち、e^x が連続する二つの整数の間にとどまる各区間の上で一定である。そこで、それらの区間を求め、各区間で定数を積分し、それらを足し合わせる。得られる和は扱いにくそうに見えるが、等しい項をそろえて並べると、対数の大部分は二つずつ打ち消し合う。

解答

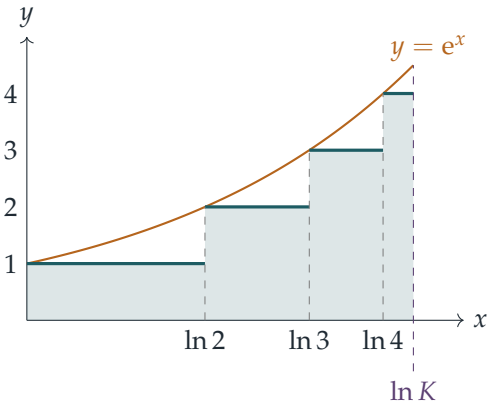
被積分関数が一定となる区間

$K \geq 1$ とする。このとき $\ln K \geq 0$ かつ $N = [K] \geq 1$ である。（$0 < K < 1$ の場合、x が $\ln K$ と 0 の間にあるとき $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$ であり、ただ一点 $x = 0$ を除いて $[\mathrm{e}^x] = 0$ となるので $I = 0$ である。また $N = 0$ であり $N \ln K - \ln 0! = 0$ となる。よってこの場合も結果は成り立つ。）

整数 $k \geq 1$ に対して、ln は増加関数であるから

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

が成り立つ。したがって $[\ln k, \ln(k+1))$ 上で $[\mathrm{e}^x] = k$ である。積分区間 $0 \leq x \leq \ln K$ では $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$ であるから、$[\mathrm{e}^x]$ は値 $1, 2, \ldots, N$ をとり、最後の値 N は $[\ln N, \ln K]$ 上でとられる。そこでは $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$ だからである。



網掛け部分の面積が I である（$K = 4.5$ として描いてあるので $N = 4$ である）。

各部分を足し合わせる

各区間で定数を積分すると、

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) + N\big(\ln K - \ln N\big).$$

となる。（$N = 1$ のときは和は空であり、$K = N$ のときは最後の項は 0 である。どちらの場合も別に扱う必要はない。）

> **考えてみよう** $\sum k\big(\ln(k+1) - \ln k\big)$ はどう簡単にすればよいだろうか。このままでは望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合わない。

これを二つの和に分け、一つ目の和で $j = k+1$ とおいて添字をずらす：

$$\sum_{k=1}^{N-1} k\ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j.$$

これで二つの和はどちらも $\ln j$ の定数倍の和となり、各 $\ln j$ の係数をまとめることができる。$\ln 1 = 0$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) &= \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j\ln j \\ &= (N-1)\ln N + \sum_{j=2}^{N-1}\big((j-1) - j\big)\ln j \\ &= (N-1)\ln N - \sum_{j=2}^{N-1}\ln j.\end{aligned}$$

最後の部分 $N\ln K - N\ln N$ を加えると、

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

より鮮やかな見方

網掛け部分を縦の帯に切り分ける代わりに、横の層に切り分けてみる。$1 \le k \le N$ に対して、高さ $k-1$ と k の間の層が存在するのは、ちょうど $[\mathrm{e}^x] \ge k$ となるところ、すなわち $\mathrm{e}^x \ge k$ となるところ、つまり $\ln k \le x \le \ln K$ の範囲である。この層の面積は $\ln K - \ln k$ であるから、ただちに

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

が得られる。形式的には、$1 \le y < N+1$ に対して $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$ が成り立つことを用い、項別に積分しているのである。これは上で行った添字のずらしと同じ並べ替えを、幾何的に行ったものである。

検算

- $K = 1$：積分区間の長さは 0 であり、公式は $1\cdot 0 - \ln 1 = 0$ を与える。
- $K = \mathrm{e}$：このとき $N = 2$ であり、直接計算すると $I = \ln 2 + 2(1-\ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$ となって、$2\ln \mathrm{e} - \ln 2$ と一致する。
- $K = 10$ のとき公式は $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$ を与え、$[0, \ln 10]$ 上での $[\mathrm{e}^x]$ の中点則による数値積分（midpoint quadrature）と 5×10^{-6} の精度で一致する。$[1, 40]$ 内のランダムな K の値についても一致する。

よくある間違い

- 区間 $[\ln N, \ln(N+1)]$ を使って和を N まで取ってしまうこと。積分範囲の上端は $\ln(N+1)$ ではなく $\ln K$ であるから、最後の部分は別に扱わなければならない。
- 添字を付け替えるときに端の項を間違えること。$N = 3$ の場合に和を書き出して確かめるとよい。

STEP のその先へ

$\sum k(a_{k+1}-a_k)$ を $-\sum a_k$ と境界項の和に置き換える操作は**部分和分**（summation by parts）（アーベル（Abel）の総和法）と呼ばれ、部分積分の離散版である。$K=N$ とし、$\mathrm{e}^x-1<[\mathrm{e}^x]\le \mathrm{e}^x$ を用いると $N\ln N-N+1\le \ln(N!)\le N\ln N-N+1+\ln N$ が得られ、これはスターリング（Stirling）の近似（Stirling's approximation）への第一歩となる。同じ考え方をリーマン（Riemann）–スティルチェス（Stieltjes）積分（Riemann–Stieltjes integral）$\int f\,\mathrm{d}[t]$ の形で書くと、解析的整数論（analytic number theory）の至るところで和を積分に変換する道具となる。Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*（解析的整数論入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 見本問題、第 8 問

純粋数学 • 剰余群における位数

> **STEP II 見本問題、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q8

鍵となる考え方

N を法として（modulo）考えると、数 $N-1$ は -1 にほかならず、$m+n=N$ は $n\equiv -m$ を意味する。したがって n のどの累乗も、符号を除けば m の累乗であり、$n^k\equiv(-1)^k m^k$ となる。この符号が効くかどうかは k が偶数か奇数かで決まり、三つの小問は位数（order）の偶奇の三通りの組み合わせ方に対応している。最後の部分では、これらの事実を用いて、すべての累乗を計算することなく位数を求める。

解答

以下、$\equiv$ は N を法とする合同（congruent）を表す。問題の意図に従い、G の単位元（identity）を 1 とする。（実際、$N-1\in G$ であれば必ずそうなる。e が単位元ならば $e(N-1)\equiv N-1$、すなわち $-e\equiv -1$ であるから $e=1$ である。）

$N-1$ の位数

次が成り立つ。

$$(N-1)^2=N^2-2N+1\equiv 1,$$

また $N-1\neq 1$ である。$N\geq 3$ だからである。よって $(N-1)^1$ は単位元ではないが $(N-1)^2$ は単位元である。すなわち $N-1$ の位数は 2 である。

小問の準備

$m+n=N$ より $n\equiv -m$ であるから、すべての正の整数 k に対して

$$n^k\equiv(-1)^k m^k,\qquad \text{同値な形で}\qquad m^k\equiv(-1)^k n^k.$$

が成り立つ。また $N-1 \equiv -1 \equiv n\,m^{-1}$ は G に属する。G は n と m^{-1} を含む群（group）だからである。よって -1 は G の元であり、しかも $-1 \neq 1$ である（$N \geq 3$ による）。さらに、x の位数が r で $x^k = 1$ ならば $r \mid k$ であるという標準的な事実も用いる（$k = ar + b$、$0 \leq b < r$ と書くと $x^b = 1$ となり、r の最小性より $b = 0$ である）。

小問 (i)

p と q がともに偶数であるとする。このとき

$$n^p \equiv (-1)^p m^p = m^p \equiv 1,$$

であるから $q \mid p$ である。同様に $m^q \equiv (-1)^q n^q = n^q \equiv 1$ であるから $p \mid q$ である。互いに他を割り切る二つの正の整数は等しいので、$p = q$ である。

小問 (ii)

p が偶数、q が奇数であるとする。p は偶数なので $n^p \equiv m^p \equiv 1$ であり、$q \mid p$ である。また $2q$ は偶数なので

$$m^{2q} \equiv n^{2q} = (n^q)^2 \equiv 1,$$

となり、$p \mid 2q$ を得る。$p = kq$ と書くと $kq \mid 2q$ であるから $k \mid 2$ であり、$k = 1$ または 2 である。しかし $k = 1$ とすると $p = q$ が奇数となってしまうが、そうではない。ゆえに $k = 2$ であり、$p = 2q$ である。

> ? **考えてみよう** なぜ単純に $m^q \equiv -n^q \equiv -1$ だから「p は $2q$ でなければならない」と論じることはできないのか？

この計算は正しく、$m^q \neq 1$ かつ $m^{2q} \equiv 1$ であることを示している。しかしそれだけでは $p \mid 2q$ と $p \nmid q$ がわかるにすぎず、p は確定しない（たとえば先験的には、p が 2 で $q = 3$ ということもありうる）。追加の整除関係 $q \mid p$ は p が偶数であることから従い、これこそがこの隙間を埋めるのである。

小問 (iii)

背理法（proof by contradiction）のため、p と q がともに奇数であると仮定し、$r = pq$ とおく。これは奇数である。このとき

$$n^r = (n^q)^p \equiv 1, \qquad \text{しかし一方で} \qquad n^r \equiv (-1)^r m^r = -(m^p)^q \equiv -1.$$

よって $1 \equiv -1$、すなわち $N \mid 2$ となるが、これは $N \geq 3$ なので不可能である。ゆえに p と q がともに奇数であることはない。

（対称性により、小問 (ii) からは $q = 2p$ も得られる。ただし q が偶数で p が奇数のときである。したがってどの場合も、m と $N - m$ の位数は、等しくかつ偶数であるか、一方が他方の二倍で、その他方が奇数であるかのいずれかである。）

21 を法とする群

2 と 5 の累乗を順に 21 を法として簡約すると、次のようになる。

k	1	2	3	4	5	6
2^k	2	4	8	16	11	1
5^k	5	4	20	16	17	1

（たとえば $2^5 = 32 \equiv 11$、$5^2 = 25 \equiv 4$、$5^4 \equiv 4^2 = 16$、$5^5 \equiv 80 \equiv 17$ である。）両方の行で最初に 1 が現れるのは $k = 6$ であるから、2 と 5 はともに位数 6 をもつ。

では表から位数を読み取ろう。x の位数が 6 ならば、x^k の位数は $6/\gcd(k, 6)$ である。よって

- $11 = 2^5$ と $17 = 5^5$ の位数は 6 である。
- $4 = 2^2$ と $16 = 2^4$ の位数は 3 である。
- $8 = 2^3$ と $20 = 5^3$ の位数は 2 である（$20 = N - 1$ であるから、これは最初の部分からすでにわかっている）。
- 1 の位数は 1 である。

残るのは 10、13、19 であり、いずれも既知の元と組になって和が 21 となる。

- $13 = 21 - 8$ であり、8 は偶数の位数 2 をもつ。(iii) とその後の注意により、13 の位数は 2（等しく偶数）か 1（2 の半分）のいずれかである。位数は 1 ではない。$13 \neq 1$ だからである。よって 13 の位数は 2 である。（検算：$13^2 = 169 = 8 \cdot 21 + 1$。）
- $19 = 21 - 2$、$10 = 21 - 11$ であり、2 と 11 の位数は 6 である。よって 19 と 10 の位数はそれぞれ 6 または 3 である。

したがって G のすべての元の位数は高々 6 である。位数 12 の巡回群（cyclic group）には生成元（generator）、すなわち位数 12 の元が存在し、同型写像（isomorphism）は元の位数を保つ。G には位数 12 の元が存在しないので、位数 12 の巡回群とは同型でない。

別の締めくくり方もある。G には位数 2 の元が三つ、すなわち 8、13、20 があるが、位数 12 の巡回群にはちょうど一つしかない（g が生成元ならば、g^k の位数が 2 となるのは $k = 6$ のときに限る）。

検算

コンピュータで確認すると、G における位数の完全な一覧は次のとおりである。1 の位数は 1、8, 13, 20 の位数は 2、4, 16 の位数は 3、2, 5, 10, 11, 17, 19 の位数は 6 である。（直接計算すると $10^3 = 1000 \equiv 13$、$19^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv 13$ であるから、どちらも位数 3 ではない。）個数 $1+3+2+6 = 12$ は G の大きさに一致する。さらに小問 (i)–(iii) を、すべての組 m、$N-m$ について検証した。対象は、高々二つの元で生成される単元群（group of units）のあらゆる部分群であり、$N < 60$ のすべてにわたる。約 1900 組を調べ、例外はなかった。

よくある間違い

- 理由を述べずに $N-1 \in G$ を仮定すること。これは与えられていないが、$m, n \in G$ から従う。$N-1 \equiv n\,m^{-1}$ だからである。
- (ii) において $p \mid 2q$ だけを示すこと。等号を得るには、もう一つの整除関係が必要である。
- 奇妙な場合に単位元を当然視すること。たとえば部分集合 $\{3\}$ は、6 を法として乗法について閉じており、その単位元は 3 である。そして $m = n = 3$ とすると (iii) に反してしまう。議論は単位元が 1 であることに依拠しているが、意図されているのは明らかにそちらである。

STEP のその先へ

G は 21 を法とする単元群であり、中国剰余定理（Chinese remainder theorem）により、3 を法とする単元群と 7 を法とする単元群の直積、すなわち $C_2 \times C_6$ と同型である。これが、位数 2 の元が三つあり、位数 12 の元が存在しない理由である。N を法とする単元群がどのようなときに巡回群になるかを正確に決定すること（答えはちょうど $N = 2, 4, p^k, 2p^k$ の場合であり、ここで p は奇素数である。これは「原始根（primitive root）」が存在する場合にあたる）は、大学一年次の整数論の古典的な結果である。Davenport の *The Higher Arithmetic* は原始根を扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups* は群論を扱っている。

解答例

STEP II 見本問題、第 9 問

純粋数学 ・ 球、平面と鏡映

> **STEP II 見本問題、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q9

鍵となる考え方

どちらの小問も、ひとつの図に帰着する。平面と、その平面に下ろした垂線である。(i) では球面（sphere）の中心が原点にあるので、すべては原点から平面（plane）に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）で決まる。その点と O との距離によって両者が交わるかどうかが定まり、さらに三平方の定理（Pythagoras）から円が得られる。(ii) では、$\mathbf{x}$ を $\mathbf{c}$ に沿う部分と $\mathbf{c}$ に垂直な部分とに分け、与えられた式がそれぞれをどう変えるかを見ればよい。

解答

小問 (i)

平面 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$ は点 $\mathbf{a}$ を通り、法線ベクトル（normal）$\mathbf{b}$ をもつ。原点 O からこの平面に下ろした垂線の足を N とする。ON は法線方向なので、あるスカラー λ を用いて $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$ と書ける。また N は平面上にあるから、

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

となる。$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ なので、この割り算は許される。よって

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

である。ここで d は O から平面までの距離である。

次に、平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ をとる。ベクトル $\mathbf{x}-\mathbf{n}$ は平面内にあるので $\mathbf{b}$ に垂直であ

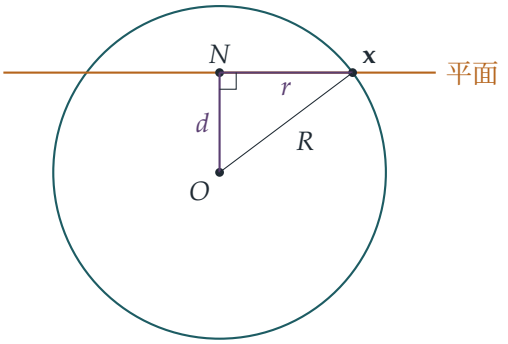
り、したがって $\mathbf{n}$ にも垂直である。三平方の定理より

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = d^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

したがって平面上の点は $|\mathbf{x}| \geq d$ を満たし、しかも $|\mathbf{x}| \geq d$ となるすべての値が実際に現れる（平面内で N から遠ざかればよい）。ゆえに球面 $|\mathbf{x}| = R$ が平面と交わるための必要十分条件は $R \geq d$、すなわち

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{同値な形で書けば} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

である。等号が成り立つ場合、平面は接平面（tangent plane）であり、「円」は一点 N に縮退する。



条件が成り立つとき、両方の曲面上にある点は $|\mathbf{x}| = R$ を満たし、$(*)$ より

$$|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

となる。よってこれらの点は、平面内で、平面上の点 N から一定の距離にある。すなわち N を中心とする円をなす。その中心と半径は

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

である。

小問 (ii)

単位ベクトル（unit vector）$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$ をとる（$\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ なので問題ない）。すると与えられた関係式は

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

となる。

考えてみよう $(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$ は幾何学的には何を表すか。

これは $\mathbf{x}$ の $\mathbf{c}$ 方向の成分（component）、すなわち O を通り方向 $\mathbf{c}$ をもつ直線への $\mathbf{x}$ の射影（projection）である。そこで

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel},$$

と分解する。ここで $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}) = 0$ である。関係式は

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

となる。O を通り $\mathbf{c}$ に垂直な平面 Π（平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$）内の成分は変わらず、$\Pi$ に垂直な成分は向きが反転する。これはまさに鏡の働きである。**$\mathbf{x}'$ は、原点を通り法線ベクトル $\mathbf{c}$ をもつ平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$ に関する $\mathbf{x}$ の鏡映（reflection）である。**

これを鏡映の定義に照らして確かめておく。

- $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = -2\mathbf{x}_{\parallel}$ は $\mathbf{c}$ のスカラー倍なので、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を結ぶ線分は Π に垂直である。
- 中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathbf{x}_{\perp}$ は $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = 0$ を満たすので、Π 上にある。

いくつかの帰結を見ると、様子がより具体的になる。Π 上の点（$\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$ となる点）は動かない。$\mathbf{c}$ 自身は $-\mathbf{c}$ に移る。$|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{x}_{\perp}|^2 + |\mathbf{x}_{\parallel}|^2$ なので $|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|$ である。そして、二度鏡映すれば元に戻るはずのとおり、この写像を二回施すと $\mathbf{x}$ に戻る。また、$\mathbf{c}$ を任意の 0 でないスカラー倍 $k\mathbf{c}$ に置き換えても関係式は変わらない。これは理にかなっている。意味をもつのは平面だけであり、その法線ベクトルの長さや向きは関係ないからである。

検算

(i) で $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (0,0,1)$、$R = 2$ とすると、平面は $z = 1$ であり、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ と円 $x^2 + y^2 = 3$、$z = 1$ で交わる。公式からは中心 $(0,0,1)$、半径 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ が得られ、確かに一致する。(ii) で $\mathbf{c} = (0,0,1)$ とすると、式は (x,y,z) を $(x,y,-z)$ に移す。これは $z = 0$ に関する鏡映である。さらに、$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、R および $\mathbf{x}$、$\mathbf{c}$ を無作為に 20,000 通り選んで両小問を数値的に検証した。予測された円の上に構成した点は、10^{-9} の誤差の範囲で球面と平面の両方の上にあった。また (ii) の写像は Π 内のベクトルを動かさず、長さと内積（dot product）を保ち、それ自身が逆写像（inverse）になっていた。

よくある間違い

- 絶対値を忘れる。条件は $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le R|\mathbf{b}|$ であって、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le R|\mathbf{b}|$ ではない。O に関して反対側にある平面では $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$ となる。

- 円の中心を $\mathbf{a}$ と答える。点 $\mathbf{a}$ は平面上のある一点にすぎない。中心は O から下ろした垂線の足である。
- (ii) で「$\mathbf{c}$ に関する鏡映」あるいは「$\mathbf{c}$ 方向の直線に関する鏡映」と答える。その直線に関する鏡映は $\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}$ であり、これは $-\mathbf{x}'$ である。

STEP のその先へ

(ii) の写像は**ハウスホルダー変換**（Householder reflection）$\mathbf{x} \mapsto (I - 2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$ であり、直交（orthogonal）かつ対称（symmetric）で、行列式（determinant）が -1 の線形写像である。空間のあらゆる回転（rotation）は、このような鏡映二つの積として表される。また数値解析の研究者は、行列を安定に分解するためにこれを用いる（QR 分解（QR decomposition））。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）は、射影、鏡映、直交行列をまさにこの観点から扱っている。

解答例

STEP II 見本問題、第 10 問

純粋数学 ・ 論理パズル

> **STEP II 見本問題、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q10

鍵となる考え方

すべては一つの言い換えに基づいている。すなわち、話し手がヒキガエルであるのは、その話し手の発言が真であるとき、かつそのときに限る。そこで各登場人物について「ヒキガエルでありうるか」「カエルでありうるか」を問い、その発言の真理値（truth value）が合わなくなる選び方をすべて除外する。特に、話し手自身についての発言に注意せよ。そのような発言の中には、一方の種類の生き物には決して言えないものがあり、たいていそこが突破口となる。

解答

以下を通じて、「ヒキガエル」は正直者（truth-teller）、「カエル」は嘘つき（liar）を意味する。したがって

$$\text{話し手はヒキガエル} \iff \text{その発言は真.}$$

各場面について、この規則と矛盾しない割り当てをすべて求め、ちょうど一つだけが残ることを確かめる。

小問 (i)

A がヒキガエルであったと仮定する。すると A の発言は真となり、特に A はカエルであることになって矛盾する。よって A はカエルである。

したがって A の発言は偽である。つまり、A と B がともにカエルであるということは成り立たない。A はカエルなので、これが成り立たないためには B がヒキガエルであるしかない。

検算：A がカエル、B がヒキガエルのとき、「私たちは二人ともカエルだ」は偽であり、カエルの発言として当然そうでなければならない。よって **A はカエル、B はヒキガエルである**。

小問 (ii)

これは小問 (i) の鏡像である。C がカエルであったと仮定する。すると「D と私の少なくとも一方はカエルだ」は（C だけで）真となるが、カエルは真のことを言えない。よって C はヒキガエルである。

したがって C の発言は真である。つまり C, D の少なくとも一方はカエルである。C はヒキガエルなので、D がカエルでなければならない。

検算：C がヒキガエル、D がカエルのとき、発言は真であり、ヒキガエルの発言として当然そうでなければならない。よって **C はヒキガエル、D はカエルである**。

小問 (iii)

E の発言「G と H はともにヒキガエルだ」を S とおく。すると G は S が真であると主張し、H は S が偽であると主張している。

> **考えてみよう** まだ誰についても何もわかっていない。いったいどこから手をつければよいだろうか。

E ではなく、G と H をまとめて見よ。二人の発言は互いにちょうど正反対なので、ちょうど一方が真である。よって S がどうであれ、G, H のちょうど一方がヒキガエルで、もう一方がカエルである。

これで S が決まる。G, H の一方はカエルなので、二人がともにヒキガエルということはなく、S は偽である。したがって次のようになる。

- E は偽のことを言ったので、E はカエルである。
- G は S が真であると主張したが、それは偽なので、G はカエルである。
- H は S が偽であると主張し、それは真なので、H はヒキガエルである。

検算：G はカエルなので、「G と H はともにヒキガエルだ」は確かに偽であり、すべての判定と矛盾しない。よって **E と G はカエル、H はヒキガエルである**。

小問 (iv)

ここで「私たち」とは I, J, K の三人を指す。

I はカエルである。I がヒキガエルであったとすると、「私たちは全員カエルだ」は真

となり、I はカエルであることになって矛盾する。よって I はカエルであり、I の発言は偽である。つまり三人全員がカエルではないので、

$$\text{つまり} J, K \text{ の少なくとも一方はヒキガエル.} \qquad (*)$$

J はヒキガエルである。 逆に J がカエルであったと仮定する。すると $(*)$ より K はヒキガエルであり、I はカエル、J はカエル、K はヒキガエルとなる。すなわちヒキガエルはちょうど一匹である。これは J の発言を真にするが、カエルはそれを言えない。よって J はヒキガエルである。

K はカエルである。 J はヒキガエルなので、J の発言は真である。つまり三人のうちヒキガエルはちょうど一匹である。そのヒキガエルは J なので、K はカエルである。

> ? **考えてみよう** K がカエルとわかった今でも、$(*)$ は成り立っているだろうか。

成り立っている。$(*)$ が要求するのは J, K の一方がヒキガエルであることだけであり、J がそうである。よって全体の検算は次のとおりである。I の「私たちは全員カエルだ」は偽であり（J がヒキガエル）、J の「私たちのうちちょうど一匹がヒキガエルだ」は真である（J のみ）。どちらの発言も正しい真理値をもつので、**I と K はカエル、J はヒキガエルである。**

検算

各場面の割り当ては 2^2 通りまたは 2^3 通りしかないので、完全な検算は短い真理値表（truth table）で済む。各割り当てについて、すべての話し手の発言が、その話し手がヒキガエルであるとき、かつそのときに限り真であるかを調べればよい。四つの場面すべてについてこの全数探索を行ったところ、いずれの場面でもちょうど一つの割り当て、すなわち上で求めたものだけが残った。（一意性は重要である。問題は**判定せよ**と求めているので、うまくいくものを一つ見つけるだけでなく、ほかのものを除外する必要がある。）

よくある間違い

- 矛盾のない割り当てを一つ見つけたところで終えてしまう。ほかのどの割り当てもうまくいかないことも示さなければならず、それを担っているのが「……であったと仮定する」による矛盾の議論である。
- 小問 (iii) で、G の「それは真だ」を、E の主張についてではなく G 自身についての発言として扱ってしまう。

- 小問 (iv) で、何も言わない K も「私たち全員」や「私たちのうちちょうど一匹」に含まれることを忘れてしまう。

STEP のその先へ

このようなパズルは命題論理（propositional logic）の練習問題である。各生き物はブール変数（Boolean variable）t、各発言は論理式 P であり、それぞれの話し手は制約 $t \iff P$ を課す。このような制約の系が解をもつかどうかを判定する問題は**充足可能性問題**（satisfiability problem）と呼ばれ、理論計算機科学の中心的な問題である。また、小問 (i) の自己否定的な発言は、嘘つきのパラドックス（liar paradox）の穏やかな親戚にあたる。レイモンド・スマリヤン（Raymond Smullyan）の *What Is the Name of This Book?*（邦題『この本の名は?』）は、騎士と悪漢（knights and knaves）のパズルを集めた楽しい本で、最後にはゲーデル（Gödel）の不完全性定理へと至る。

解答例

STEP II 見本問題、第 11 問

力学 ・ 放物運動と衝突

STEP II 見本問題、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

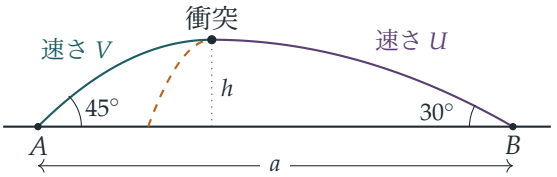
step.maths.org/questions/spec-s2-q11

鍵となる考え方

「衝突するとき、各粒子はそれぞれ最高点にある」という条件は、実は二つの条件を含んでいる。両方の粒子が最高点に達するまでに**同じ時間**がかかり、しかもそのとき**同じ位置**にいなければならない。時間の条件から U と V の関係が得られ、次に水平距離を足し合わせると a になる。衝突後に決定的なのは、両方の粒子が最高点では水平に運動しているという観察である。したがって、合体した粒子は鉛直方向の速度をまったくもたずに運動を始める。

解答

両方の粒子を、AB を含む鉛直面内で重力のみを受けて運動する放物運動（projectile motion）の物体としてモデル化する（空気抵抗は無視する）。水平方向は A から B へ向かう向きを正、鉛直方向は上向きを正とする。



$U^2 = 2V^2$ を示す

A から投げた粒子の初速度の成分は、水平方向が $\frac{V}{\sqrt{2}}$、鉛直方向が $\frac{V}{\sqrt{2}}$ である。B から投げた粒子の成分は、水平方向（A に向かう向き）が $\frac{\sqrt{3}}{2}U$、鉛直方向が $\frac{1}{2}U$ である。

放物運動する物体は、鉛直方向の速度が 0 になるとき最高点にある。鉛直方向の初速さが w のとき、これは時刻 w/g に起こる。両方の粒子は同時に投げ出されるので、衝突の瞬間に両方が最高点にあるならば、これらの時刻は等しくなければならない：

$$\frac{V}{\sqrt{2}\,g} = \frac{U}{2g} \quad \Longrightarrow \quad U = \sqrt{2}\,V \quad \Longrightarrow \quad U^2 = 2V^2,$$

これで示された。この共通の時刻を $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}\,g}$ とおく。

考えてみよう 二つの最高点が同じ高さにあることも確かめるべきではないか？

その通りである。時刻が等しいことは必要条件だが、粒子が実際に出会わなければならない。鉛直方向の初速さが w の物体は高さ $w^2/(2g)$ まで上がる。A の粒子についてはこれは $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$ であり、B の粒子については $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$ である。両者は一致するので、$U^2 = 2V^2$ が成り立てば高さは自動的に等しくなる。（実際、これは必然である。両者は同じ加速度のもとで同じ時刻 T に鉛直方向の速度が 0 になるので、高さはどちらも $\frac{1}{2}gT^2$ となる。）衝突の高さを

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

とおく。

a を求める

時刻 T において水平方向の位置も一致しなければならない。水平方向の速度は一定なので、時間 T の間に A の粒子は B に向かって $\frac{V}{\sqrt{2}}T$ だけ進み、B の粒子は A に向かって $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$ だけ進む。二つは出会うので、これらの距離の和が a になる：

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}\,g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

これが求める結果である。

衝突の後

衝突の瞬間、各粒子は最高点にあるので、どちらも**水平に**運動している。A の粒子の速度は $+\frac{V}{\sqrt{2}}$、B の粒子の速度は $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}}$ である。

考えてみよう どの運動量が、どの向きに保存されるか？

ごく短い衝突の間に働く大きな力は、粒子どうしが及ぼし合う大きさが等しく向きが反対の力だけである。重力は有限の大きさで、無視できるほど短い時間しか働かない。したがって全運動量は保存される（conservation of momentum）。水平方向について、質量 $2m$ の合体した粒子の速度を v とすると、

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

負の符号は、合体した粒子が速さ $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$ で A の側へ戻るように運動することを表している。鉛直方向については、両方の粒子の鉛直方向の速度が 0 だったので、合体した粒子も鉛直方向の速度 0 で運動を始める。

合体した粒子は、いまや高さ $h = \frac{V^2}{4g}$ から水平に投げ出された物体である。水平方向の速度は $|v|$ のままである。平面に達したときの鉛直方向の速さ w は $w^2 = 0 + 2gh$ から求まる：

$$w^2 = 2g\cdot\frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

したがって、速度が水平となす角 ϕ は次を満たす：

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

ここで 2 行目では分母を有理化した。以上で問題は解けた。

検算

- **単位。** V^2/g の単位は $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$ であり、距離として正しい。また $\tan\phi$ は速さの比なので無次元である。$\tan\phi$ が V にも g にもまったく依存しないことに注意しよう。これはよい兆候である。
- **幾何的な妥当性。** A の粒子は A から水平距離 $\frac{V^2}{2g}$ の地点で最高点に達し、B の粒子は B から $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$ の地点で最高点に達する。より大きな速さで、より浅い 30° の角で投げた方が長い距離を進み、二つの距離の和は a になる。
- **数値。** $V = 7.3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ として二つの軌道を時間について逐次計算したところ、$t = T$ において両者はメートル単位で同じ点 $(2.719, 1.359)$ にあり、鉛直方向の速度はどちらも 0 であった。合体した粒子を平面まで逐次計算すると $\tan\phi \approx 2.73205$ となり、$1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$ と一致した。

よくある間違い

- 鉛直方向の速度が 0 でないとして、鉛直方向の運動量保存を立ててしまう。各軌道の最高点では鉛直方向の速度は 0 であり、まさにこのことが衝突をこれほど単純にしている。
- 水平方向の運動量を引くべきところで足してしまう。粒子は互いに反対向きに運動している。
- $w/|v|$ ではなく $\tan\phi = |v|/w$（鉛直方向となす角）を使ってしまう。

STEP のその先へ

合体する粒子は、完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）の最も簡単な例である。運動量は保存されるが、運動エネルギーは保存されない（ここでは粒子が反対向きに運動していたので、かなりの量が失われる）。大学では、これは重心系（centre-of-mass frame）における衝突の研究になる。重心系では全運動量が 0 であり、失われるエネルギーは重心に対する相対運動の運動エネルギーのすべてである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量と衝突をこのような方法で扱っており、優れた問題が数多く収められている。

解答例

STEP II 見本問題、第 12 問

力学 ・ 針金上の振動

STEP II 見本問題、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

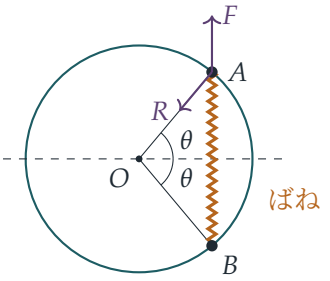
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

鍵となる考え方

針金はなめらかなので、仕事をする力はばねの力だけであり、力学的エネルギー（mechanical energy）が保存される。必要なのは、θ を用いて表したばねの長さ（円の弦（chord）である）と、各ビーズの速さだけである。少し考えておくべき点が二つある。角 AOB を二等分する直線はなぜ動かないのか。また小問 (ii) で、ビーズが直径の両端に達するだけのエネルギーをもつ場合には何が起こるのか。

解答

ビーズを、水平面内に置かれたなめらかな円形の針金上の質点とみなし、それらはフックの法則（Hooke's law）に従う軽いばねでつながれているとする。重力は鉛直方向にはたらき、針金からの抗力の鉛直成分とつり合うので、水平面内の運動には関与しない。



図において、F はばねが A を押す力（ばねは最初縮んでいるので BA の向き）であり、R は針金が A に及ぼす抗力の水平成分である。

エネルギーの式を立てる

各ビーズの位置を円周上の角で表す。A は角 ϕ_A、B は角 ϕ_B の位置にあるとする。

> **考えてみよう** 両方のビーズが、固定された直線に関して対称に、同じ速さで動くと仮定してよいのはなぜか。

O を通る鉛直軸のまわりのモーメント（moment）を考える。A と B にはたらくばねの力は大きさが等しく向きが逆で、同一直線 AB 上にはたらくので、それらのモーメントは打ち消し合う。各ビーズにはたらく針金の抗力の水平成分 R は針金に垂直なので、O を通る半径の方向を向き、モーメントをもたない。鉛直な力は鉛直軸のまわりのモーメントをもたない。したがって角運動量（angular momentum）$ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B)$ は保存される。ビーズは静止状態から放されるので角運動量は初めゼロであり、よって $\phi_A + \phi_B$ は一定に保たれる。すなわち、角 AOB の二等分線（bisector）は動かない。これを図の破線にとれば、$\phi_A = \theta$、$\phi_B = -\theta$ となる。このとき各ビーズは速さ $a\dot{\theta}$ で動く。

ばねは弦 AB であり、その長さは $2a\sin\theta$ である。自然長（natural length）は $2a\sin\alpha$ なので、伸びは $x = 2a(\sin\theta - \sin\alpha)$ であり、弾性エネルギー（elastic energy）は

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha} = \frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$$

である。x は 2 乗されているので、この式は $x<0$（縮み）のときにも成り立つ。運動エネルギー（kinetic energy）は $2\cdot\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 = ma^2\dot{\theta}^2$ である。針金はなめらかで、その抗力は常に運動の向きに垂直なので仕事をせず、エネルギーは保存される。放した瞬間は $\theta=\beta$ かつ $\dot{\theta}=0$ なので

$$ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

両辺に $\sin\alpha/a$ を掛けると

$$ma\dot{\theta}^2\sin\alpha + \lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2 = \lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

となり、示すべき式が得られた。ばねは最初縮んでいるので、$\beta<\alpha$ であることに注意する。

小問 (i)

エネルギーの式を t で微分すると

$$2ma\sin\alpha\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot{\theta} = 0.$$

$2\dot\theta$ で割ると（これはビーズが動いている間は正当であり、結果は連続性によりすべての t に拡張される）、運動方程式（equation of motion）

$$ma\sin\alpha\,\ddot\theta = -\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta$$

が得られる。釣り合いの位置（equilibrium）は $\theta=\alpha$ であり、そこでばねは自然長になる。$\beta-\alpha$ が小さければ θ は α の近くにとどまる（エネルギーの式から $|\sin\theta-\sin\alpha|\le|\sin\beta-\sin\alpha|$ が得られる）ので、ε を小さい量として $\theta=\alpha+\varepsilon$ とおく。1 次の近似で $\sin\theta-\sin\alpha\approx\varepsilon\cos\alpha$ であり、また $\cos\theta\approx\cos\alpha$ である。後者はすでに小さい量に掛かっている。よって

$$\ddot\varepsilon \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

であり、これは $\omega^2=\lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$ の単振動（simple harmonic motion）である。したがって周期は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

小問 (ii)

$k=\sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$ とおく。エネルギーの式より

$$\dot\theta^2=\frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2\Big].$$

ビーズが止まるのは $\sin\theta-\sin\alpha=\pm(\sin\alpha-\sin\beta)$ のとき、すなわち $\sin\theta=\sin\beta$ または $\sin\theta=2\sin\alpha-\sin\beta$ のときである。$\theta=\beta$ から出発すると θ は増加し（縮んだばねがビーズを押し広げる）、$\sin\beta<\sin\theta<2\sin\alpha-\sin\beta$ である限り $\dot\theta^2>0$ である。

考えてみよう 二つの場合のどちらになるかは、何によって決まるか。

$2\theta=\pi$、すなわち A と B が直径の両端にきて $\sin\theta$ が最大値 1 をとるより前に、θ が二つ目の停止点に達しうるかどうかである。それは $2\sin\alpha-\sin\beta$ が 1 より小さいか大きいかによる。

(a) $\sin\beta>2\sin\alpha-1$ の場合。このとき $2\sin\alpha-\sin\beta<1$ なので、$\sin\gamma=2\sin\alpha-\sin\beta$ となる鋭角 γ が存在し、$\gamma>\alpha$ である。ビーズは $\theta=\gamma$ で静止し（このときばねは、最初に縮んでいたのと同じだけ伸びている）、θ は β と γ の間で振動する。行きと帰りの運動にかかる時間は等しいので

$$T=2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2}},\qquad \gamma=\arcsin(2\sin\alpha-\sin\beta).$$

(b) $\sin\beta<2\sin\alpha-1$ の場合。このとき $2\sin\alpha-\sin\beta>1\ge\sin\theta$ なので、θ が β と $\frac12\pi$ の間にある限り $\dot\theta$ は決してゼロにならない。すなわち、ビーズは動いたまま直径の

両端を通過する。その後、弦は再び短くなる。エネルギーの式は θ を $\sin\theta$ を通してのみ含み、これは $\frac{1}{2}\pi$ に関して対称であるから、$\frac{1}{2}\pi$ から $\pi-\beta$ までの運動は β から $\frac{1}{2}\pi$ までの運動を鏡に映したものになる。ビーズは $\theta=\pi-\beta$ で止まり、そこでばねは再び元の長さまで縮んでいる。その後ばねはビーズを来た道へ押し戻す。（$\theta=\pi-\beta$ では、運動方程式から $\ddot{\theta}<0$ となる。$\sin\theta-\sin\alpha<0$ かつ $\cos\theta<0$ だからである。）1 回の完全な振動は $\beta\to\pi-\beta\to\beta$ であり、これは β から $\frac{1}{2}\pi$ までの 4 分の 1 の部分の 4 つ分である：

$$T=4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_{\beta}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2}}.$$

$\sin\alpha<1$ なので $2\sin\alpha-1<\sin\alpha$ であり、どちらの場合も $\beta<\alpha$ と矛盾しない。場合 (b) が起こりうるのは $2\sin\alpha-1>0$、すなわち $\frac{1}{6}\pi<\alpha<\frac{1}{4}\pi$ のときに限る。

検算

- 場合 (a) では、置換 $\sin\theta=\sin\alpha-(\sin\alpha-\sin\beta)\cos u$ により、積分は $\int_0^{\pi}\mathrm{d}u/\cos\theta$ となる。$\beta\to\alpha$ のときこれは $\pi/\cos\alpha$ に近づき、小問 (i) の周期が再び得られる。
- $m=1.3$、$a=0.7$、$\lambda=2.1$ として、二つのビーズが針金上で独立に動く様子をシミュレーションした。エネルギーの式は丸め誤差の範囲で成り立ち、二等分線は動かなかった。$\alpha=0.6$、$\beta=0.59$ では周期は 3.766 であり、小問 (i) による値は 3.7657 である。$\alpha=0.7$、$\beta=0.4$（場合 (a)）では 4.8847 であり、積分による値は 4.8846 である。$\alpha=0.75$、$\beta=0.1$（場合 (b)）では 7.0553 であり、これに対する値は 7.0553 で、θ は予測どおり $\pi-\beta$ で最大となった。

よくある間違い

- 弾性エネルギーとして $\lambda x^2/(2a)$ を用いてしまう。分母は**自然長**の 2 倍、すなわち $2\cdot 2a\sin\alpha$ である。
- 場合 (b) で、積分を $\theta=\frac{1}{2}\pi$ で打ち切ったり、ビーズがそこで止まると主張したりする。ビーズはゼロでない速さで直径の両端を通過するので、周期は $2\int_{\beta}^{\pi/2}$ ではなく $4\int_{\beta}^{\pi/2}$ である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の周期を表す積分は、初等関数の範囲では計算できない。これらは、単振り子の正確な周期を与える**楕円積分**（elliptic integrals）の仲間である。小問 (i) の微小

振動の周期は振幅によらないが、正確な周期は振幅によることに注目しよう。このような線形化した振動子と非線形振動子の対比は、古典力学の最初の講義の中心的なテーマである。内力をもつ系における角運動量の保存は、ここでは二等分線が動かないことを導いたが、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で丁寧に扱われている。

解答例

STEP II 見本問題、第 13 問

力学 ・ つり合いとモーメント

> **STEP II 見本問題、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q13

鍵となる考え方

オレンジが崩れるとすれば、それは房が外側へ倒れることによってであり、各房は球がテーブルに接するただ一点を支点として回転する。そこで、オレンジをその切り分け面の一つに沿って二つに切り、一方の半分について、その最下点を通る水平な直線のまわりの力のモーメント（moment）を考える。半分にはたらく重力はそれを倒そうとし、それを引き止められるのはリボンだけであって、ほかには何もない。もう一方の半分から受ける力は状況を悪くすることしかできず、これが「少なくとも」の由来である。

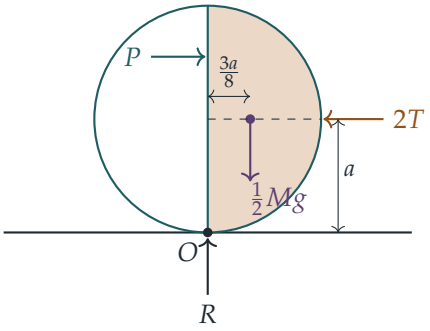
解答

モデル

チョコレートを一様な剛体（rigid body）とみなし、リボンは軽く、一周にわたって同じ張力（tension）T をもつとする。また、房は合同で、その数は偶数である（実際のチョコレートオレンジには 20 個ある）とする。すると、軸を通る一つの切り分け面によってオレンジは二つの半分に分かれ、それぞれは角 π の半球形のくさびとなる。最後に、切り口の面がなめらかであれば、この議論は房をどのようにまとめても成り立つことを見る。

球はテーブルとただ一点 O、すなわち軸の下端で接する。O を原点とし、z 軸を鉛直上向き、x 軸を水平で、軸から考察する半分の側（図の右半分）へ向かう向きにとる。分割面は $x = 0$ である。ℓ をこの面内にあって O を通る水平な直線（y 軸）とする。ℓ のまわりのモーメントを考え、半分を軸から離れる外向きに倒そうとするモーメント

を正とする。



一方の半分にはたらく力

右半分の質量は $\frac{1}{2}M$ であり、それにはたらく外力は次のとおりである。

- **重力** $\frac{1}{2}Mg$。重心（centre of mass）にはたらく。与えられた結果に $2\theta = \pi$ を代入すると、重心は軸から
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
の距離にあり、$x > 0$ の側にある。ℓ のまわりのそのモーメントは $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$ で、倒す向きである。

- **テーブル**：垂直抗力（normal reaction）と、場合によっては摩擦力（friction）。これらはすべて O にはたらく。O は ℓ 上にあるので、これらの ℓ のまわりのモーメントは o である。

- **リボン**。赤道の半分に巻きついている。幅の狭いリボンは表面を垂直に押し、その力は単位長さあたり T/a である（なめらかな曲線にかけた糸と同様である）。角 $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ までの弧において、x 成分を合計すると、軸へ向かう向きに
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \, a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
となり、y 成分は対称性により打ち消し合う。（同じことであるが、リボンを分割面と交わるところで切ってもよい。切った両端はそれぞれ $-x$ 方向に張力 T で引くので、やはり $2T$ となる。）この力はすべて水平で高さ a にはたらくので、ℓ のまわりのモーメントは $2T \cdot a$ で、元に戻す向きである。

- **もう一方の半分**。平らな面 $x = 0$ を通してはたらく。これだけが厄介な力であるが、その分布を知る必要はない。

考えてみよう もう一方の半分からの力が、半分が倒れるのを助けることしかできないのはなぜか。

面の各微小部分にはたらく力を、面に垂直な成分と面に沿った成分（切り口の面が粗い場合の摩擦力）に分ける。

- 垂直な成分は x 方向である。二つの半分は押し合っているだけで、接着されてはいないので、この成分は押す力であり、$+x$ 方向を向く。これはある高さ $z \geq 0$ にはたらくので、ℓ のまわりのモーメントはその大きさの z 倍であり、決して負にならない。つまり、半分を外向きに倒そうとする。
- 面に沿った成分はすべて平面 $x = 0$ 内にあり、この平面は ℓ も含む。作用線（line of action）が ℓ と同じ平面内にある力は、ℓ と交わるか ℓ に平行であるかのどちらかなので、ℓ のまわりのモーメントは 0 である。

したがって、接触の詳細がどうであれ、もう一方の半分は倒す向きに合計 $P_{\text{mom}} \geq 0$ のモーメントを与える。

ℓ のまわりのモーメント

半分はつり合っているので、ℓ のまわりのモーメントの総和は 0 である：

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

$P_{\text{mom}} \geq 0$ であるから、

$$2Ta \geq \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{よって} \qquad T \geq \tfrac{3}{32}Mg,$$

となり、示すべきことが得られた。等号が成り立つのは、二つの半分が互いにまったく力を及ぼし合わず、かろうじてまとまっているときに限る。

房の数が偶数でない場合

代わりに切り口の面がなめらかであるとすれば、いくつかの房を丸ごと集めてできる角 2θ の任意のくさびについて同じ計算ができる。x をその対称面に沿ってとり、ℓ を O を通りその対称面に垂直な水平な直線とする。くさびの重力は $\frac{\theta}{\pi}Mg$ で、距離 $\frac{3\pi a \sin\theta}{16\theta}$ のところにはたらくので、倒すモーメントは $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$ となる。その弧の上のリボンは高さ a で内向きに $2T\sin\theta$ の力で引く。なめらかな面は面に垂直な水平の押す力しか与えず、これらの $+x$ 方向の成分は負でないので、やはり倒すモーメントを増やすだけである。よって $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$ であり、$\sin\theta$ が約分されて再び $T \geq \frac{3}{32}Mg$ が得られる。どのように房をまとめても、限界は同じである。

検算

- 与えられた重心の結果で $2\theta = \pi$ とすると $\frac{3a}{8}$ となり、これはよく知られた、平らな面から測った中身の詰まった半球の重心である。モンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定では、半分について $0.376a$ が得られ、ほかのくさびの角についても公式と一致する。
- 角 2θ の弧にわたってリボンの垂直な力を数値的に合計すると $2T\sin\theta$ となり、たとえば半分では $2T$ である。
- 限界 $\frac{3}{32}Mg \approx 0.094Mg$ は、調べたすべてのくさびの角（$2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$）で同じになる。オレンジ全体だけで決まり、どう切り分けるかによらない限界が得られるのは心強い。
- 単位：モーメントは力と長さの積であり、a が約分されて力が残る。

よくある間違い

- 球の中心や赤道上の点のまわりのモーメントを考えること。そうすると、テーブルからの、あるいはもう一方の半分からの未知の力が式に入ってしまう。点 O を選ぶのは、まさに O を通る直線のまわりではテーブルからの力のモーメントが 0 になるからである。
- リボンが半分に及ぼす力を T とすること。リボンは半分の弧の両端を引くので、合力（resultant）は $2T$ である。
- 根拠なしに二つの半分の間の力を 0 とおくこと。そうすると等号が得られてしまう。「少なくとも」は、この力が押すことしかできないと気づくことから生じる。

STEP のその先へ

これは未知の内力を含む静力学（statics）の問題であり、求められない未知量を消すような軸を選び、残りは不等式（接触力は押すだけで引くことはない）を使って処理している。同じ考え方は石造りのアーチやドームの解析の背後にもあり、そこでは、構造物が立っていられるのは、材料の内部にとどまる推力線が見つかる場合に限られる。重心の結果そのものは球面極座標（spherical polar coordinates）による標準的な三重積分であり、ぜひ自分で導いてみる価値がある。剛体のつり合いについてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 見本問題、第 14 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP II 見本問題、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q14

鍵となる考え方

円板と質点はどちらも同じ固定された鉛直軸のまわりを回転するので、自然な道具は回転の運動方程式、すなわちトルク（torque）＝慣性モーメント（moment of inertia）× 角加速度（angular acceleration）であり、これをそれぞれの物体に別々に適用する。両者の間にはたらく摩擦は内力の対である。摩擦は一方を加速させるのと（角運動量で測って）ちょうど同じだけ、もう一方を減速させる。このことからただちに保存される組合せが得られ、二つの方程式の差をとると**相対**角速度についての一階の微分方程式が得られる。その解は指数関数的に減衰する。

解答

モデル

円板は一様な薄板であり、その中心 O を通るなめらかな固定軸のまわりを回転するので、軸のまわりの慣性モーメントは

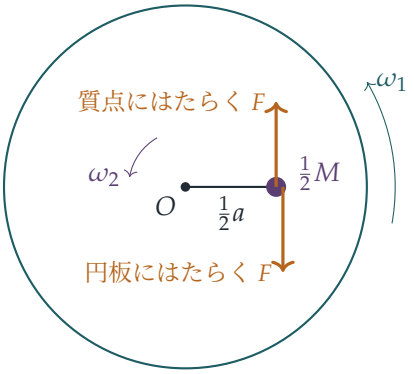
$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

である。質量 $\frac{1}{2}M$ の質点は軽い剛体の針金によって軸から一定の距離 $\frac{1}{2}a$ に保たれているので、半径 $\frac{1}{2}a$ の円周上を動き、軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

である。はじめ $\omega_1 = \Omega$、$\omega_2 = 0$ であるから、接触点において円板は質点より速く動いている。したがって摩擦は質点に対してその運動の向きに（半径 $\frac{1}{2}a$ の位置で接線

方向に）はたらき、ニュートン（Newton）の第三法則により、同じ点で大きさが等しく逆向きの力が円板にはたらく。



（上から見た図。$F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ である。針金の張力は動径方向なので、軸のまわりのモーメントをもたない。）

運動方程式

摩擦力 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ は軸から距離 $\frac{1}{2}a$ の位置で動径に垂直にはたらくので、軸のまわりのモーメントは

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

である。質点の重力と垂直抗力は鉛直方向なので鉛直軸のまわりのモーメントをもたず、軸そのものはなめらかである。円板については、摩擦は回転を妨げる向きにはたらく：

$$\tfrac{1}{2}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

質点については、摩擦は回転を促す向きにはたらく：

$$\tfrac{1}{8}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

（質点については、接線方向にニュートンの第二法則を用いてもよい。$\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\dot{\omega}_2 = F$ となり、同じ方程式である。）

保存される組合せ

第一の方程式を 4 倍して第二の方程式に加えると、

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

となるので、$4\omega_1 + \omega_2$ は一定である。$t = 0$ においてこれは $4\Omega + 0$ に等しいから、

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

となり、示すべきことが得られた。これは軸のまわりの角運動量保存（conservation of angular momentum）にほかならない。実際 $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$ であり、外力（軸における反力、重力、鉛直方向の抗力）はいずれも軸のまわりのモーメントをもたない。

ω_1 を求める

考えてみよう 連立した二つの方程式がある。単独で一つの方程式を満たす量はどれか？

どちらの変化率も差 $u = \omega_1 - \omega_2$ のみに依存するので、これに注目する。二つの方程式の差をとると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

であり、$u(0) = \Omega - 0 = \Omega$ である。変数分離（separation of variables）により（あるいは指数関数的減衰であると見抜いて）、

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}.$$

を得る。これを $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$ に加えると ω_2 が消去される：

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{よって} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

となり、示すべきことが得られた。これから $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$ も従う。別解として、$\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$ を円板の方程式に代入すると $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$ という線形微分方程式が得られ、$\omega_1(0) = \Omega$ を満たすその解は同じものになる。

検算

- $t = 0$ のとき：$\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$、$\omega_2 = 0$ である。正しい。
- $t \to \infty$ のとき：$\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$ となり、共通の角速度になる。摩擦があれば最終的にこうなるはずである。最終的な運動エネルギーは $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}Ma^2\cdot\frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$ であり、はじめの $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$ と比べると、エネルギーの 5 分の 1 が摩擦によって失われている。これは「完全非弾性」的な結合で予想されるとおりである。
- 数値的には、$M = a = k = \Omega = 1$ として二つの運動方程式を $t = 1$ まで数値的に解き進めると $\omega_1 = 0.80135$、$\omega_2 = 0.79461$ となり、$\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ および $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$ と一致する。また $4\omega_1 + \omega_2$ は終始 4 のままである。

よくある間違い

- 質点の慣性モーメントを $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$ ではなく、（縁にあるかのように）$\frac{1}{2}Ma^2$ としてしまう。
- 回転の方程式に、摩擦力のモーメント $F \cdot \frac{1}{2}a$ ではなく摩擦力そのものを用いてしまう。
- 二つの方程式で摩擦に同じ符号をつけてしまう。摩擦は円板を減速させ、質点を加速させる。

STEP のその先へ

ここでの摩擦は内力であり、$4\omega_1 + \omega_2$ の保存は衝突における運動量保存の回転版である。また、共通の速さへの指数関数的な接近は、粘性抵抗によって結合された二つの物体と同じ数学である。より一般に、線形系 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ は A の固有ベクトル（eigenvector）を用いて表すと分離される。ここではそれらは組合せ $4\omega_1 + \omega_2$（固有値（eigenvalue）0）と $\omega_1 - \omega_2$（固有値 $-5k$）である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は剛体の回転と角運動量を丁寧に展開しており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は固有ベクトルによる線形系の扱いを解説している。

解答例

STEP II 見本問題、第 15 問

確率・統計 ・ 期待値と標本平均

STEP II 見本問題、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q15

鍵となる考え方

王は毎日膨大な数の商人に罰金を科すので、大数の法則（law of large numbers）により、商人 1 人 1 日あたりの王の収入は事実上、罰金の**期待値**（expected value）に等しい。したがって、各方式における罰金の期待値を求めればよい。最初の二つの方式は正規分布に従う確率変数の標本の平均に関するものであり、その分布はまた正規分布（normal distribution）で、分散（variance）はより小さくなる。三つ目は待ち時間の問題なので、幾何分布（geometric distribution）を用いる。

解答

選ばれた箱に入っているキッパー（燻製ニシン）の重さ（グラム単位）を $W_1, W_2, \ldots$ とする。箱には実質的に無作為に選ばれたキッパーが入っているので、W_i は独立（independent）であり、それぞれ $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$ に従う。箱からキッパーを無作為に選ぶことはその重さに依存しないので、どのキッパーをどの順に取り出しても、それらはやはり独立な $\mathrm{N}(200, 10^2)$ に従う確率変数である。

$W_1, \ldots, W_m$ が独立に $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うならば、その平均は

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

を満たす、という標準的な事実を用いる。

小問 (i)

ここでは $m = 625$ なので $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$ であり、標準偏差（standard deviation）は $\frac{10}{25} = 0.4$ である。すると

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

罰金の期待値は

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ クラウン}.$$

小問 (ii)

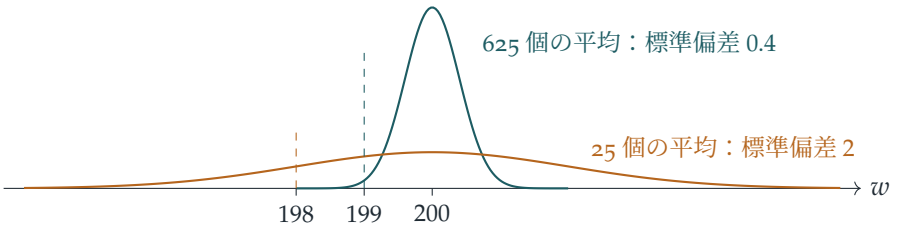
今度は $m = 25$ なので $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$ であり、標準偏差は 2 である。すると

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

であり、罰金の期待値は

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ クラウン}.$$

小さい罰金のほうが有利になる理由は図を見ればわかる。平均より 1 グラム低い閾値は、625 個のキッパーの平均にとっては標準偏差の 2.5 倍だけ離れているが、2 グラム低い閾値は、25 個の平均にとっては標準偏差の 1 倍しか離れていない。



小問 (iii)

取り出されるキッパーの個数を N とする。200 は対称な分布の平均であり、$\mathrm{P}(W = 200) = 0$ であるから、各キッパーが 200 g より重い確率は $\frac{1}{2}$ である。取り出されるキッパーは独立なので、N は成功確率 $\frac{1}{2}$ の独立な試行において、最初の成功までの（最初の成功を含む）試行回数である。言い換えれば、N は幾何分布に従う：

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

（厳密には箱のキッパーは 625 個で尽きるが、そのどれも 200 g を超えない確率は 2^{-625} であり、まったく無視できる。）

考えてみよう 先に $\mathrm{E}[N^2]$ を計算せずに、$\mathrm{E}[N(N-1)]$ を求めるにはどうすればよいか。

等比級数（geometric series）を 2 回微分する。$|x|<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

両辺に x^2 を掛けて $x=\frac{1}{2}$ とおくと（$n=1$ の項はいずれにせよ 0 である）

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

（同じことだが、$p=\frac{1}{2}$ として $\mathrm{E}[N]=2$、$\mathrm{Var}(N)=\frac{1-p}{p^2}=2$ であるから、$\mathrm{E}[N^2]=6$ となり、$\mathrm{E}[N^2]-\mathrm{E}[N]=4$ である。）よって罰金の期待値は

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3\times 4 = 12 \text{ クラウン}.$$

結論

商人 1 人 1 日あたりの罰金の期待値は、方式 (i)、(ii)、(iii) についてそれぞれ約 9.3、15.9、12 クラウンである。膨大な数の箱が検査されるので、王の総収入は検査回数に罰金の期待値を掛けたものに非常に近い。したがって王は**方式 (ii)** を選ぶべきである。この方式は方式 (i) よりおよそ 70% 多く、方式 (iii) よりおよそ 3 分の 1 多くの収入をもたらす。

検算

- 方式 (iii) は数表と照らし合わせることはできないが、級数を足し上げるのは簡単である：$\frac{3\cdot 2}{4}+\frac{3\cdot 6}{8}+\frac{3\cdot 12}{16}+\cdots = 1.5+2.25+2.25+1.875+\cdots$。部分和は速やかに 12 に近づいていく。
- 正規分布に従うキッパー 625 個入りの箱 10^5 個をシミュレーションし、三つの方式すべてに通したところ、平均罰金はおよそ 10.2（2×10^4 箱分なのでばらつきが大きい）、15.9、11.9 クラウンとなった。これらは 9.31、15.87、12 に近い。

よくある間違い

- 標本平均の標準偏差として $\frac{10}{625}$ や $\frac{100}{25}$ を用いてしまう。m で割られるのは**分散**であり、標準偏差は $\sqrt{m}$ で割られる。

- N が 0 から始まるものとして扱ってしまう（失敗の回数だけを数える）。ここでの n は重いキッパーを含むので、$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{2}$ であり、そのとき罰金は 0 である。
- 罰金の期待値ではなく、罰金を科される確率を比較してしまう。方式 (iii) では半分の確率で商人に罰金が科される（$n \geq 2$ のとき）が、たいていは 6 クラウンにすぎない。

STEP のその先へ

「量が膨大なので期待値を用いる」という正当化は大数の法則であり、$\overline{W}$ が分散 σ^2/m の正規分布に従うという事実は中心極限定理（central limit theorem）と関連している。中心極限定理により、個々の重さが正規分布に従わない場合でも、これは近似的に成り立つ。慎重な王であれば、ばらつきも考慮するかもしれない。まれに大きな罰金が科される方式 (i) は、分散が群を抜いて大きい。$\mathrm{E}[N(N-1)]$ のような階乗モーメント（factorial moments）を級数の微分によって求めるという考え方は、確率母関数（probability generating functions）につながる。これは大学 1 年次の確率論における中心的な道具である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてを明快に扱っている。

解答例

STEP II 見本問題、第 16 問

確率・統計 ・ トーナメント戦の確率

> **STEP II 見本問題、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.7 節「勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/knockout.html

鍵となる考え方

選ばれた 2 人のプレイヤー A と B を、1 回戦ずつ追いかけていく。2 人がともに勝ち残っていて、まだ対戦していない回戦では、問題になるのは次の 2 点だけである。A の対戦相手が B になるかどうか、そしてそうでない場合に 2 人とも勝つかどうかである。どちらも単純な確率であり、現れる積は見事に次々と打ち消し合う（telescope）。最後の小問には、対称性（symmetry）を用いた鮮やかな議論もある。トーナメント全体の試合数を数えるのである。

解答

$N = 2^n$ とおく。選ばれた 2 人のプレイヤーを A、B とする。$r-1$ 回戦が終わった時点で残っているプレイヤーは 2^{n-r+1} 人なので、第 r 回戦のプレイヤー数は $M_r = 2^{n-r+1}$ であり、第 n 回戦（$M_n = 2$）が決勝戦である。

繰り返し用いる事実は次のとおりである。A と B がともに、無作為に組み合わせられる M 人のプレイヤーの中にいるならば、A の対戦相手は他の $M-1$ 人のうちの誰であるのも同様に確からしいので、

$$\mathrm{P}(A \text{ の対戦相手が } B \text{ になる}) = \frac{1}{M-1}.$$

（決勝戦では組み合わせの抽選はないが、$M = 2$ のときこの式は 1 を与え、これは正しい。）

小問 (i)

1 回戦では $M_1 = N$ なので、

$$\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が } 1 \text{ 回戦で対戦する}) = \frac{1}{2^n - 1}.$$

小問 (ii)

S_r を、第 r 回戦の開始時点で A と B がともにまだトーナメントに残っているという事象とする（試合に負けた者は敗退するので、このとき 2 人はまだ対戦していないことになる）。S_r のもとで、2 人がそろって第 $r+1$ 回戦に進むのは、第 r 回戦で 2 人が対戦相手にならず、しかもそれぞれの（別々の）試合に 2 人とも勝つときであり、かつそのときに限る。2 つの試合の結果は独立（independent）で、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ なので、

$$\mathrm{P}(S_{r+1} \mid S_r) = \frac{M_r - 2}{M_r - 1} \cdot \frac{1}{4}.$$

考えてみよう これを実際に計算できる積の形にするには、どうすればよいだろうか？

$M = 2^k$ とおくと、$M - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$ であることに気づく。したがって

$$\frac{M-2}{M-1} = \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1}.$$

ある回戦の分子は（因数 2 を除けば）次の回戦の分母になっている。S_1 は確実に起こるので、$k = n, n-1, \ldots, n-r+2$ の各回戦にわたって掛け合わせると、次々と打ち消し合う積が得られる。

$$\mathrm{P}(S_r) = \frac{1}{4^{r-1}} \prod_{k=n-r+2}^{n} \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1} = \frac{2^{r-1}}{4^{r-1}} \cdot \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

S_r のもとで、2 人が第 r 回戦で対戦する確率は $1/(M_r - 1) = 1/(2^{n-r+1} - 1)$ なので、

$$\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が第 } r \text{ 回戦で対戦する}) = \frac{1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

これは気持ちのよいほど簡単な式である。回戦が 1 つ進むごとに、その回戦で対戦する確率は半分になる。$r = 1$ とおけば小問 (i) の結果が再び得られる。決勝戦は $r = n$ なので、

$$\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が決勝戦で対戦する}) = \frac{1}{2^{n-1}\,(2^n - 1)}.$$

対称性による妥当性の確認をしておこう。ルールはすべてのプレイヤーを同等に扱うので、決勝進出者の組は $\binom{N}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ 通りあるプレイヤーの組のどれであるのも同様に確からしい。これにより同じ答えが得られる。

小問 (iii)

$r = 1, \ldots, n$ に対する事象「第 r 回戦で対戦する」は互いに排反（mutually exclusive）である（負けた者は去るので、2 人のプレイヤーが対戦するのは高々 1 回である）。そこで、等比級数（geometric series）を用いてこれらを足し合わせる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が対戦する}) &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^n - 1} \cdot 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{2}{2^n} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n - 1} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

考えてみよう 和を一切計算せずに、この答えを見抜く方法はあるだろうか？

ある。どの試合でもちょうど 1 人のプレイヤーが敗退し、優勝者以外は全員敗退するので、試合数は常にちょうど $2^n - 1$ である。各試合は 1 組のプレイヤーによって行われ、対称性により $\binom{N}{2}$ 組のどの組も対戦する確率は同じ値 p である。試合数の期待値は、すべての組にわたるこれらの確率の和なので、

$$\binom{2^n}{2} p = 2^n - 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{2(2^n - 1)}{2^n(2^n - 1)} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

となり、和による計算と一致する。

検算

- $n = 1$：プレイヤーは 2 人で、2 人は必ず 1 回戦で対戦し、それが決勝戦である。3 つの式はいずれも 1 を与える。
- $n = 2$：プレイヤーは 4 人。小問 (i) は $\frac{1}{3}$、決勝戦は $\frac{1}{6}$ を与え、合計は $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ となって、小問 (iii) の結果と一致する。
- $n = 3$：すべての組み合わせとすべての結果を厳密に数え上げると、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{28}$、$\frac{1}{4}$ が得られる。16 人のプレイヤーによるトーナメントを 2×10^5 回シミュレーションしたところ、0.0664、0.0085、0.1247 となった。厳密な値は $\frac{1}{15} \approx 0.0667$、$\frac{1}{120} \approx 0.0083$、$\frac{1}{8}$ である。

よくある間違い

- 後の回戦で対戦するためには、2 人のプレイヤーはまずそれ以前のすべての回戦で互いを**避け**なければならないことを忘れる。因数 $\frac{M-2}{M-1}$ は落としやすい。
- 小問 (ii) の答えを $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$ とする。これは 2 人が**独立**であるとした場合に 2 人とも

決勝に進む確率である。実際には独立ではない。早い段階で 2 人が対戦相手になれば、勝ち進めるのは高々 1 人である。

STEP のその先へ

小問 (iii) の議論は、指示変数（indicator variables）を用いた**期待値の線形性**（linearity of expectation）である。試合数の期待値は、事象が独立であるかどうかにかかわらず、すべての組にわたってその組が対戦する確率を足し合わせたものに等しい。これは確率論と組合せ論（combinatorics）において最も強力な道具の一つであり、与えられた性質をもつ対象が存在することを証明する「確率論的手法」（probabilistic method）の土台となっている。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、指示変数を用いた議論の素晴らしい例を集めた章が丸ごと一つある。

解答例

STEP III 見本問題、第 1 問

純粋数学 ・ 数学的帰納法

STEP III 見本問題、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q1

鍵となる考え方

(i) では、最初のいくつかの積を計算し、それを正しい見方で眺めることである。各値を分母 $2n$ の形に書き直すと、規則性がはっきりと見えてくる。$1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$ と因数分解すると、その理由がわかり、帰納法の段階も 1 行の計算で済む。(ii) では、n を固定して k についての数学的帰納法（induction）を用いる。和に項を 1 つ加える操作は、実はパスカルの法則（Pascal's rule）を形を変えて述べたものにほかならない。

解答

小問 (i)

$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ とおく。最初のいくつかの値は

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

である。分母 $4, 8$ を見ると、すべてを分母 $2n$ で書くことを思いつく：$P_2=\frac{3}{4}$, $P_3=\frac{4}{6}$, $P_4=\frac{5}{8}$, $P_5=\frac{6}{10}$。そこで次のように予想する。

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{ただし} n\geq 2.$$

数学的帰納法による証明。$S(n)$ を命題 $P_n=\dfrac{n+1}{2n}$ とする。

初期段階。$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$ であるから、$S(2)$ は成り立つ。

帰納段階。ある $n\geq 2$ について $S(n)$ が成り立つと仮定する。$P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

であり、$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{2(n+1)},\end{aligned}$$

となり、これは $S(n+1)$ である。数学的帰納法により、すべての $n\geq 2$ について $S(n)$ が成り立つ。

（この因数分解は予想の根拠も説明する：$P_n=\prod_{m=2}^{n}\frac{m-1}{m}\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{m+1}{m}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$ であり、どちらの積も項が次々に打ち消し合う（telescoping）。）

小問 (ii)

正の整数 n を固定し、$T(k)$ を次の命題とする。

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

$k=0,1,\ldots,n-1$ について、k に関する数学的帰納法で $T(k)$ を証明する。

初期段階。 $k=0$ のとき、両辺はともに $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}=1$ に等しい。

帰納段階。 $0\leq k\leq n-2$ を満たすある k について $T(k)$ が成り立つと仮定する（こうしておけば $k+1$ もまだ範囲内にある）。次の項を加えると、

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}&=(-1)^k\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\\&=(-1)^{k+1}\left[\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}\right].\end{aligned}$$

考えてみよう $\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}$ は何か？

パスカルの法則によれば $\binom{n}{k+1}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$ である。n 個のものから $k+1$ 個を選ぶとき、ある特定の 1 個が選ばれる（残りの k 個は他の $n-1$ 個から選ぶ）か、選ばれない（$k+1$ 個すべてを他の $n-1$ 個から選ぶ）かのどちらかだからである。したがって括弧の中は $\binom{n-1}{k+1}$ であり、

$$\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1},$$

となる。これは $T(k+1)$ である。数学的帰納法により、$k=0,1,\ldots,n-1$ について $T(k)$ が成り立ち、示すべきことが示された。

$n=1$ の場合は $k=0$ しかなく、これは初期段階で扱われているので、特別な扱いは必要ない。

検算

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$ である。また、コンピュータで分数を用いて各因数を厳密に掛け合わせたところ、2 から 300 までのすべての n について $\frac{n+1}{2n}$ と一致した。$n \to \infty$ のとき、この積は $\frac{1}{2}$ に収束する。
- $n = 4$ のとき、部分和（partial sum）$1, 1-4 = -3, -3+6 = 3, 3-4 = -1$ は $\binom{3}{0}, -\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, -\binom{3}{3}$ と一致する。コンピュータで、すべての $n \leq 79$ とすべての $k \leq n-1$ について (ii) を厳密に確かめた。
- $k = n-1$ とし、最後の項 $(-1)^n\binom{n}{n}$ を加えると $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$ となる。これはよく知られた事実 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$ である。

よくある間違い

- 完全に約分した分数（$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$）から予想しようとして、規則性を見落とすこと。約分を戻して共通の形にそろえるのがこつである。
- (ii) で k ではなく n について帰納法を用いること（可能ではあるが、より煩雑になる）。あるいは、k から $k+1$ への段階は $k+1 \leq n-1$ である間だけ行えばよいことを忘れること。

STEP のその先へ

小問 (i) は、無限積（infinite product）$\prod_{m\geq 2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$ の出発点である。これはオイラー（Euler）の積公式 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$ の特別な場合である：両辺を $m = 1$ の因数 $1 - x^2$ で割り、$x \to 1$ とすればよい。無限積に意味を与え、それがいつ収束するかを調べることは、大学 1 年次の解析学（analysis）で扱う話題である。小問 (ii) は、パスカルの法則や母関数（generating function）から導かれる数多くの二項係数の恒等式（binomial identity）の 1 つであり、$(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$ における x^k の係数にあたる。無限級数や無限積の収束について学ぶには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

STEP III 見本問題、第 2 問

純粋数学 ・ 二項係数の不等式と極限

> **STEP III 見本問題、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

鍵となる考え方

$x > 0$ として $y = 1 + x$ と書くと、y のべき乗は二項展開（binomial expansion）に変わり、その展開のどの項も非負である。したがって、1 つの項だけを残して他をすべて捨てても、なお下界（lower bound）が得られる。x の項を残すと n のように増大する下界が得られ、これはどんな固定された K よりも大きくなる。n で割った後でも K を上回るには n^2 のように増大する下界が必要なので、今度は代わりに x^2 の項を残す。

解答

不等式

$x \geq 0$ とし、n を正の整数とする。二項定理（binomial theorem）より

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

$x \geq 0$ であるから、最初の 2 項より後の項はすべて非負であり、したがって

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

最後の不等式が狭義（strict）の不等式になるのは 1 があるためであり、そのおかげで $x = 0$ のときにも結果が成り立つ（このときは $1 > 0$ となる）。

y^n がいずれ K を超えることを導く

$y > 1$ とし、$x = y - 1$ とおくと $x > 0$ である。前半の結果より、すべての正の整数 n に対して

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

$K \leq 0$ ならば示すことは何もない。すべての n に対して $y^n > 0 \geq K$ であるから、$N = 1$ とすればよい。$K > 0$ ならば、次を満たす整数 N を選ぶ。

$$N > \frac{K}{y-1},$$

これは、$y - 1 > 0$ より右辺が定まった数であるから可能である。すると、すべての整数 $n \geq N$ に対して

$$y^n > n(y-1) \geq N(y-1) > K,$$

となる。ここで中央の不等号には $y - 1 > 0$ を用いた。これがまさに示すべきことであった。同じ N が、$n = N$ のときだけでなく**すべての** $n \geq N$ に対して有効であることに注意しよう。下界 $n(y-1)$ が n とともに増加するからである。

y^n/n がいずれ K を超えることを示す

評価 $y^n > n(y-1)$ からは $y^n/n > y - 1$ しか得られず、これは定まった数なので、大きな K に対しては役に立たない。n より速く増大する y^n の下界が必要である。

考えてみよう 今度は二項展開のどの項を残すべきだろうか？

x^2 の項を残す。$x = y - 1 > 0$ のとき展開のすべての項は正であるから、すべての正の整数 n に対して

$$y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

（$n = 1$ のときは x^2 の項は存在しないが、最後の不等式の右辺は 0 になるので、やはり成り立つ。）$n > 0$ で割ると

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

今度は右辺が n の増加とともに限りなく大きくなり、これこそ必要なものである。$K \leq 0$ ならば、$y^n/n > 0$ であるから $N = 1$ とすればよい。$K > 0$ ならば、次を満たす整数 N を選ぶ。

$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

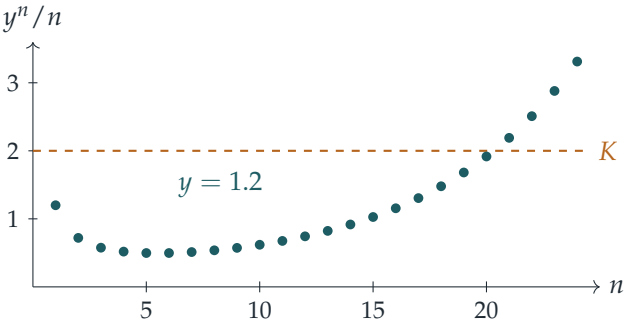
すると、すべての整数 $n \geq N$ に対して $n - 1 \geq N - 1 > 2K/(y-1)^2$ であり、したがって

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

となり、求める結果が得られる。

ここでも下界は n とともに増加するので、この議論はすべての $n \geq N$ に対して成り立つ。このことはここで重要である。y^n/n 自身は常に増加するとは**限らない**からである。$y = 1.2$ の場合の図からわかるように、y が 1 に近いときは最初のうち減少する

（たとえば、$y < 2$ ならば常に $y^2/2 < y$ である）。したがって、$y^n/n > K$ となる n を1つ見つけて、それ以降の項はより大きいと論じるだけでは済まないのである。



検算

$y = 1.01$、$K = 1000$ として試してみよう。上の方法では、$y^n > K$ に対して $N = 100\,001$、$y^n/n > K$ に対して $N = 20\,000\,002$ が得られる。直接計算すると、$1.01^n/n > 1000$ はすべての $n \geq 1424$ に対して既に成り立つことがわかる。我々の N は可能な最小値からはほど遠いが、問題が求めているのは**何らかの** N にすぎない。また、無作為に選んだ数千組の x と n について、有理数の x を用いて両方の不等式を厳密に検証し、さらに無作為に選んだ数千組の $y > 1$ と K について、選んだ N（およびそれより大きい多くの n）を検証した。

よくある間違い

- 1つの N について $y^N > K$ を示すだけで、なぜ**すべての** $n \geq N$ に対して $y^n > K$ となるのかを説明しない。
- 最後の部分で $y^n > n(y-1)$ を用いる。n で割ると定数しか残らず、任意の K を上回ることはできない。
- K が負またはゼロである可能性を忘れる。その場合、$K/(y-1)$ はそれだけでは意味のある下界にならない（ただし、そのときはどんな N でもよい）。

STEP のその先へ

これは、多くの学生が初めて出会う厳密な「ε–N」型の論法であり、$y > 1$ のとき $y^n \to \infty$ かつ $y^n/n \to \infty$ であることを証明している。同じ工夫で x^{k+1} の項を残せば、任意の固定された k に対して $y^n/n^k \to \infty$ であることが示され、指数関数（exponential

function）はどんな多項式（polynomial）よりも速く増大することがわかる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、まさにこの種の推論から数列（sequence）と極限（limit）の理論を築き上げている。

解答例

STEP III 見本問題、第 3 問

純粋数学 • 複素数の三角不等式

STEP III 見本問題、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q3

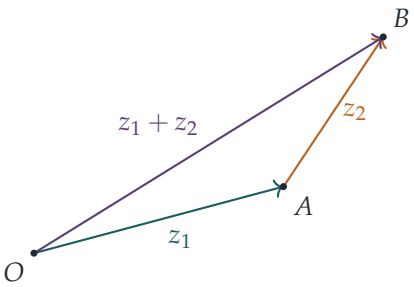
鍵となる考え方

この不等式は三角不等式（triangle inequality）である。すなわち、三角形のどの辺も、他の二辺の長さの和より長くはならない。これを繰り返し用いると、和全体の絶対値（modulus）を各項の絶対値の和で上から評価できる。$|z| \leq \frac{1}{3}$ のとき方程式の左辺の絶対値が常に 1 より真に小さいならば、左辺が 1 に等しくなることはありえない。そしてその評価を与えるのが等比級数（geometric series）である。

解答

幾何学的な意味

複素平面（Argand diagram）において、z_1 を原点 O から点 A への変位、z_2 を A から点 B への変位と考える。すると $z_1 + z_2$ は O から B へまっすぐ向かう変位である。



三角形 OAB の辺の長さは $|z_1|$、$|z_2|$、$|z_1 + z_2|$ である。この不等式は、O から B へまっすぐ進む道のりが、A を経由する道のりより長くなることはない、ということを述べ

ている。つまり、三角形の一辺の長さは他の二辺の長さの和以下である。等号が成り立つのは、三角形がつぶれて A が線分 OB 上にあるとき、すなわち z_1 と z_2 が同じ向きを指すとき（一方が他方の非負実数倍であるか、どちらかが 0 であるとき）に限る。

数学的帰納法（induction）により、有限個の項についても同じことが成り立つ：

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \leq |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

なぜなら $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \leq |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$ だからである。幾何学的には、n 本の線分をつないだ道のりは、その始点から終点までの直線距離以上の長さをもつ、ということである。

$|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす解は存在しない

$|z| \leq \frac{1}{3}$ であり、すべての i について $|a_i| \leq 2$ であるとする。拡張した三角不等式と $|ab| = |a||b|$ を用いると、

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\leq |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\leq 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

となる。ここで二つ目の不等号では、各 k について $|a_i| \leq 2$ および $|z|^k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$ を用いた（現れる量はすべて非負なので、項ごとに評価してよい）。

括弧の中は初項 $\frac{1}{3}$、公比 $\frac{1}{3}$ の有限等比級数である：

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

考えてみよう 上の各段階では $\leq$ しか用いていないのに、なぜ不等号が真の不等号になるのか？

真の不等号は三角不等式からではなく、級数から生じる。和が n 項で止まっているため、無限和の値 1 にちょうど $3^{-n} > 0$ だけ届かないのである。したがって、a_i がどのようなものであっても、また $|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす z がどのようなものであっても、

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \leq 1 - 3^{-n} < 1.$$

が成り立つ。しかし z が解であれば、左辺は $|1| = 1$ となるはずである。これは矛盾であり、よって方程式は $|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす解をもたない。これが示すべきことであった。

検算

- 最悪の場合は $a_1 = \cdots = a_n = 2$ かつ $z = \frac{1}{3}$ のときであり、このときすべての不等式が等式となって、左辺は $1 - 3^{-n}$ となる。$n = 10$ ならこれは $0.99998\ldots$ であり、1 にわずかに届かない。
- 定数 $\frac{1}{3}$ はこれ以上改良できない。すべての $a_i = 2$ とすると、実関数 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$ は $x = \frac{1}{3}$ で負であり、n が大きければ $\frac{1}{3}$ をわずかに超えたところで正になる。したがって、$\frac{1}{3}$ にいくらでも近い実数解が存在する。
- $n \le 30$、$|a_i| \le 2$ を満たす a_i、$|z| \le \frac{1}{3}$ を満たす z を 200 000 通り無作為に選んで数値的に試したところ、左辺の絶対値が 1 以上になることは一度もなかった。

よくある間違い

- 無限級数で評価して ≤ 1 を得てしまうこと。これでは等号の可能性を排除できない。必要なのは真の不等号であり、それは級数が有限であることから得られる。
- 理由を述べずに $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \le |a_1 z| + \cdots$ と書くこと。これは n 項に拡張した三角不等式であり、最初の小問が置かれているのはまさにそのためである。

STEP のその先へ

これは**根の存在しない領域**（root-free region）の最も簡単な例である。すなわち、多項式の係数に対する評価によって、その根が円板の中に入らないことが保証される。同じ評価を逆向きに用いると、$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$ のすべての根の絶対値は $1 + \max|c_k|$ より小さいというコーシー（Cauchy）の評価が得られる。また複素解析では、ルーシェ（Rouché）の定理によって、このような議論が円の内部にある根の個数を正確に数える方法へと発展する。美しく幾何学的な解説としては、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）を読むとよい。

解答例

STEP III 見本問題、第 4 問

純粋数学 ・ 放物線の接線

STEP III 見本問題、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q4

鍵となる考え方

直線が放物線（parabola）に接するのは、直線の式を放物線の方程式に代入して得られる二次方程式（quadratic）が重解（repeated root）をもつときであり、またそのときに限る。したがって前半は判別式（discriminant）を用いた一行の計算で済み、その結果として t で番号づけられた接線（tangent）の族が得られる。後半では、与えられた点から引いた接線を、ある二次方程式を満たす t の値として捉えるとよい。そうすれば L と M に関することはすべて解の和と積で表すことができ、それらは係数から直ちに求まる。

解答

接線

直線の式から $x = ty - at^2$ である。これを $y^2 = 4ax$ に代入すると

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

となる。この y についての二次方程式は重解 $y = 2at$ をもつので、直線は放物線とちょうど一点で、しかも重複度（multiplicity）2 で交わる。すなわち直線は放物線に接する。（放物線の軸に平行な直線も放物線と一度しか交わらないが、この直線は水平ではないので、そのような直線ではない。$t = 0$ のときは直線 $x = 0$ となり、これは頂点（vertex）における接線である。）対応する x は $x = t(2at) - at^2 = at^2$ なので、接点は

$$(at^2,\ 2at).$$

である。検証として、$y^2 = 4ax$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると、この点で $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$ となり、これは $ty = x + at^2$ の傾きに一致する。

軌跡

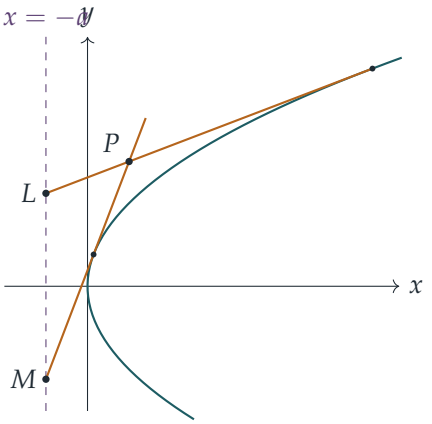
放物線上の各点は、ただ一つの t によって $(at^2, 2at)$ と表されるので、接線はすべて直線 $ty = x + at^2$ のいずれかである。与えられた点を $P = (h, k)$ とする。パラメータ t の接線が P を通るための必要十分条件は

$$at^2 - kt + h = 0.$$

である。接線が二本引けるためには、異なる二つの実数解 t_1, t_2 が必要であり、それは $k^2 > 4ah$（P が放物線の外側にあること）と同値である。このとき

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$

が成り立つ。



パラメータ t の接線は、$ty = -a + at^2$ となる点で準線（directrix）$x = -a$ と交わる。$t \neq 0$ ならば

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

である。（$t = 0$ のとき接線は $x = 0$ であり、準線と平行なので交点は存在しない。これが起こるのは $h = t_1 t_2\, a = 0$ のときに限られるから、L と M が存在するためには $h \neq 0$ が必要であり、このとき $t_1, t_2 \neq 0$ となる。）よって L と M は $\left(-a,\, a(t_1 - \frac{1}{t_1})\right)$ と $\left(-a,\, a(t_2 - \frac{1}{t_2})\right)$ であり、両者は同じ鉛直線上にあるので

$$\begin{aligned} LM &= \left|a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\right| = \left|a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2|\left|\frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2}\right|. \end{aligned}$$

となる。

考えてみよう 二次方程式を解かずに $t_1 - t_2$ を求めるにはどうすればよいか。

その二乗は解について対称な式（symmetric function）である：

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

また

$$\frac{t_1t_2 + 1}{t_1t_2} = \frac{h/a + 1}{h/a} = \frac{h + a}{h}.$$

である。LM の式を二乗してこれらを代入すると

$$LM^2 = a^2 \cdot \frac{k^2 - 4ah}{a^2} \cdot \frac{(h + a)^2}{h^2} = \frac{(h + a)^2(k^2 - 4ah)}{h^2}.$$

となる。$LM = \ell$ ならば、両辺に h^2 を掛けて

$$(h + a)^2(k^2 - 4ah) = \ell^2h^2,$$

を得る。したがって $P = (h, k)$ は $(x + a)^2(y^2 - 4ax) = \ell^2x^2$ 上にあり、これが示すべきことであった。

検算

- 図のように $a = 1$、$P = (1, 3)$ とする。パラメータは $t^2 - 3t + 1 = 0$ を満たすので $t = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ であり、$t - \frac{1}{t} = \pm\sqrt{5}$ となる（$t_1t_2 = 1$ より $1/t_1 = t_2$ だからである）。よって $LM = 2\sqrt{5}$、$LM^2 = 20$ であり、一方で公式からも $(1 + 1)^2(9 - 4)/1^2 = 20$ が得られる。
- 準線上の点 $h = -a$ の場合、公式は $LM = 0$ を与える。実際、そのような点から引いた接線は準線とその点自身で交わるので、$L = M$ となる。
- 14,000 組を超えるランダムな a、h、k について接線を別の方法で求め（$hm^2 - km + a = 0$ を満たす直線 $y = k + m(x - h)$ として）、計算した LM^2 はすべての場合で $(h + a)^2(k^2 - 4ah)/h^2$ と一致した。例えば $a = 1$、$P = (2, 5)$ では、どちらの方法でも $LM^2 = 38.25$ となる。

よくある間違い

- 接線のパラメータ方程式を逆向きに使ってしまうこと。P を固定して t を未知数とみると二次方程式 $at^2 - kt + h = 0$ が得られるのであって、h と k についての方程式ではない。

- $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}$ と書いてしまうこと。正しくは $\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}$ であり、この符号のおかげで二つの項は打ち消し合わずに足し合わされるのである。

STEP のその先へ

ある点から円錐曲線（conic）に引いた接線と、その接点どうしを結ぶ直線（その点の**極線**（polar））は、射影幾何学（projective geometry）の出発点である。射影幾何学では、極、極線、そして準線が一つの枠組みに収まる。すなわち、準線は焦点（focus）の極線なのである。また、ここで行ったように解をその対称式を通して扱うことは、方程式論（theory of equations）やガロア理論（Galois theory）への第一歩でもある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の座標幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 見本問題、第 5 問

純粋数学 ・ 方程式の解の個数

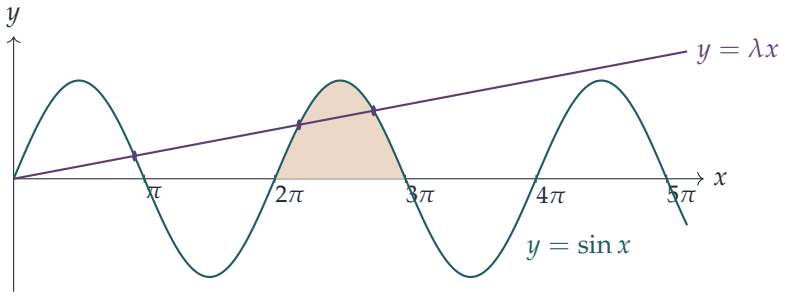
STEP III 見本問題、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

鍵となる考え方

直線 $y = \lambda x$ と曲線 $y = \sin x$ を同じ図に描いてみよう。解とは両者の交点である。直線が曲線と交わりうるのは $\sin x > 0$ となる部分、すなわち正の「山」$\big((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\big)$ の上だけである。さらに各山の上で $\sin x$ は凹（concave）であるから、直線は山と 2 回交わるか、まったく交わらないかのどちらかである（原点から始まる最初の山だけは例外である）。小さい ϵ に対する評価では、マクローリン級数（Maclaurin series）$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ が役に立つ。



（ここでは $\lambda = 0.08$ である。最初の山で 1 回、網掛けした 2 番目の山で 2 回交わり、3 番目の山が頂上に達する前に直線は高さ 1 を超えてしまうので、$N = 3$ となる。）

解答

小問 (i)

$\lambda > 1$ **のとき解は存在しない。**曲線 $y = \sin x$ の傾きは $\cos x \leq 1$ であり、曲線は原点を通り、直線 $y = x$ はそこでの接線（tangent）である。$x > 0$ のとき $\sin x < x$ が成り立つ（関数 $x - \sin x$ は 0 で値が o であり、その導関数（derivative）$1 - \cos x \geq 0$ が o になるのは孤立した点のみであるから、狭義単調増加（strictly increasing）である）。図でいえば、$x > 0$ において曲線は接線 $y = x$ の真下にあり、$\lambda > 1$ ならば直線 $y = \lambda x$ はそこで $y = x$ より上にある。したがって

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{任意の} x > 0,$$

となり、o でない解は存在しない。

$\lambda = 1 - \epsilon^2$ **の場合。**$x > 0$ において、方程式は

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \epsilon^2.$$

と同値である。まず、解が存在してただ一つであることを示す。$(0, \pi]$ 上で関数 $\frac{\sin x}{x}$ は連続（continuous）であり、$x \to 0^+$ のとき 1 に近づき、$x = \pi$ で 0 に等しい。よって $(0, \pi)$ のどこかで値 $1 - \epsilon^2$ をとる。しかもこの区間で狭義単調減少である（原点と凹な山の上の点を結ぶ直線は、点が山に沿って進むにつれて傾きが緩やかになる）から、そのような点はただ一つである。$x \geq \pi$ では解はない。ϵ は小さいので $\lambda x \geq (1 - \epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$ となるからである。

次に解の位置を求める。$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$ を用いると

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1 - \epsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

? **考えてみよう** なぜ x^4 の項を捨ててよいのだろうか。x が小さいことはまだわかっていない。

$\epsilon \to 0$ のとき $\frac{\sin x}{x} \to 1$ であり、$\frac{\sin x}{x}$ は $(0, \pi)$ 上で 1 から狭義単調減少するので、解は 0 に近づかなければならない。したがって ϵ が小さければ解も小さく、そのとき x^4 は x^2 に比べて無視できる。主要項（leading order）までとると $x^2/6 = \epsilon^2$ であるから

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

となる。（次の項まで残すと $x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$ となり、より精密な近似 $x \approx \epsilon\sqrt{6}\left(1 + \frac{3}{20}\epsilon^2\right)$ が得られる。）

小問 (ii)

$g(x) = \sin x - \lambda x$ とおくと、解とは $x > 0$ における g の零点である。$x > 0$ では $\lambda x > 0$ であるから、どの解でも $\sin x > 0$ であり、解は次のいずれかの山の上にある。

$$A_n = \big((2n-2)\pi,\, (2n-1)\pi\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

最初の山。原点において直線の傾きは $\lambda < 1$ であり曲線の傾きより小さいので、直線は曲線の下から出発する。一方 $x = \pi$ では直線のほうが上にある（$\lambda\pi > 0 = \sin\pi$）。$\sin x$ は A_1 上で凹であり直線はまっすぐなので、両者はそこでちょうど 1 回交わる。よって A_1 にはちょうど一つの解があり、それは x_1 でなければならず、$0 < x_1 < \pi$ である。

2 番目以降の山。$n \geq 1$ として $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 上では $g''(x) = -\sin x < 0$ であるから、g は凹であり零点は高々二つである。山の両端では $\sin x = 0 < \lambda x$ であるから、そこで $g < 0$ である。g の最大値は $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$ となる点 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ でとられ、$\lambda > 0$ のとき $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$ であるから $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$ である。よって g は $(2n\pi, c_n)$ で増加し $(c_n, (2n+1)\pi)$ で減少するので、次のことがわかる。

- $g(c_n) < 0$ ならば、直線は山と交わらない。
- $g(c_n) = 0$ ならば、直線は山に 1 点で接する。
- $g(c_n) > 0$ ならば、解はちょうど二つあり、一つは $(2n\pi, c_n)$ に、もう一つは $(c_n, (2n+1)\pi)$ にある。

また、直線がある山と交わらなければ、それ以降のすべての山とも交わらない。実際、$x \in A_{n+2}$ ならば $x - 2\pi \in A_{n+1}$ であるから、$\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$ となる。

したがって直線が交わる山は $A_1, A_2, \ldots$ からある最後の山までであり、それぞれ $1, 2, 2, \ldots$ 個の解を与え、そのあとに接点が一つ続くこともありうる。$N = 2R + 1$ は奇数なので接点はなく、直線はちょうど山 $A_1, \ldots, A_{R+1}$ と交わる。解を小さい順に並べると、山 A_{n+1}（$1 \leq n \leq R$）には x_{2n} と x_{2n+1} が含まれ、

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

が成り立つ。一つ目から、求める不等式の 2 行目が得られる。x_{2n+1} を $x_{2(n+1)-1}$ と書き直せば、二つ目と $0 < x_1 < \pi$ から、$m = 1, \ldots, R+1$ に対して $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$ が得られる。これが求める結果である。

N の評価。λ が小さいとき直線は多くの山と交わるので、$R \geq 1$ である。x_{2R} では

$\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \le 1$ であり、上で示したように $x_{2R} > 2R\pi$ であるから

$$2R\pi\lambda < 1.$$

一方、直線は $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$ とは交わらない。その中点 $(2R+\frac{5}{2})\pi$ では $\sin x = 1$ であるから、$\lambda(2R+\frac{5}{2})\pi > 1$ でなければならない（そうでなければそこで $g \ge 0$ となり、直線は山と交わってしまう）。これらを合わせると

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

λ が非常に小さいとき $\frac{1}{\pi\lambda}$ は非常に大きく、有界な誤差はそれに比べて無視できるので

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

となる。これは納得のいく結果である。直線は $x = 1/\lambda$ で高さ 1 に達し、それより手前には $\sin x$ のおよそ $\frac{1}{2\pi\lambda}$ 個の完全な周期があり、それぞれが 2 個の交点を与えるからである。

検算

- $\epsilon = 0.01$（$\lambda = 0.9999$）のとき、二分法（bisection）により解 0.0244953 が得られ、$\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$ と比べると比は 1.000015 であり、補正 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ にぴったり一致する。
- $\lambda = 0.001$ のとき、計算機は $N = 317$ 個の解を見つける。これに対し $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$ である。$\lambda = 0.01$ のときは 31 個で、31.8 と比べられる。いくつかの λ について見つかった解はすべて (ii) の区間の不等式を満たし、N は上の範囲に収まっている。
- $\lambda = 1.0001$、1.1、2、5 のときは解は見つからなかった。

よくある間違い

- x_1 だけが最初の山にあることを忘れる。原点も交点の一つであり、そのためこの山が与える 0 でない解は二つではなく一つなのである。
- 理由を示さずに x_{2n} を山の前半に置いてしまう。要点は、g が減少し始めるのが $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ より後であり、この点が $\sin x$ の頂上より手前にあることである。

STEP のその先へ

近似 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$ は漸近展開（asymptotic expansion）の第一歩であり、級数を打ち切る前に解が小さくなければならないことを論証する部分は、解析学（analysis）の講義で求められる類の慎重さである。凹性、単調性（monotonicity）、中間値の定理（intermediate value theorem）を用いて解の個数を数えるのは大学 1 年次の解析学の定番であり、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。関連する古典的な例に $\tan x = x$ がある。その解は $(n + \frac{1}{2})\pi$ に近づき、熱伝導（heat conduction）や振動（vibration）の問題に現れる。

解答例

STEP III 見本問題、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の漸化式

STEP III 見本問題、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q6

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$ は、$\sinh u$ と $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$ の積に自然に分けられる。しかも後者は、定数倍を除いて $\operatorname{sech}^{n+1}u$ の導関数（derivative）である。したがって、部分積分（integration by parts）を用いるのが自然な一手である。漸化式（reduction formula）については、恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を使うと、同じ積分を 2 つの I の差として書き直すことができる。

解答

積分の恒等式

まず、後で必要になる導関数を求めておく。$\operatorname{sech} u = (\cosh u)^{-1}$ であるから、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u = -(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u = -(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

そこで、次のようにおいて部分積分を行う。

$$f = \sinh u, \qquad g' = \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u, \qquad \text{よって} \qquad f' = \cosh u, \qquad g = -\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

これより

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u &= \Big[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\Big]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{n+1}\Big[\tanh u\operatorname{sech}^n u\Big]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \operatorname{sech}^n u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

を得る。ここで $\sinh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \tanh u \operatorname{sech}^n u$ および $\cosh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \operatorname{sech}^n u$ を用いた。

考えてみよう 境界項（boundary term）はなぜ 0 になるのか。また、$n > 0$ はどこで使われるのか。

$u = 0$ では $\tanh 0 = 0$ である。$u \to \infty$ のとき $\tanh u \to 1$ であり、一方 $\operatorname{sech} u = 2/(e^u + e^{-u}) \to 0$ であるから、$n > 0$ なので $\operatorname{sech}^n u \to 0$ となる。（$n = 0$ ならば、この項は 0 ではなく 1 に近づく。）同じ事実 $\operatorname{sech}^n u < 2^n e^{-nu}$ から、$n > 0$ のとき I_n が収束（converge）することもわかる。よって境界項は 0 であり、

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} I_n,$$

となって、示すべき式が得られた。

漸化式

次に、同じ積分を別の方法で計算する。$\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$ であるから

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

（$n > 0$ なので）どちらの項も $[0, \infty)$ 上の積分が収束するから、

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = I_n - I_{n+2}.$$

最初の結果と比較すると

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

すなわち $(n+1) I_{n+2} = n I_n$ となり、示すべき式が得られた。

I_6 の値

漸化式は n を 2 ずつ進めるので、n が偶数である初期値が必要である。最も簡単なのは

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, \mathrm{d}u = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

である。（I_0 から始めることはできない。I_0 は発散（diverge）し、$n = 0$ として漸化式を使うと $I_2 = 0$ という誤った式が出てしまう。まさにここで $n > 0$ が重要になる。）すると

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

よって

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



検算

- 数列 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ は減少しており、そうでなければならない。$0 < \operatorname{sech} u \leq 1$ であるから、べきが高いほど値は小さくなる。
- 代わりに $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ から始めると、漸化式より $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$ となり、直接の数値積分の結果と一致する。
- $[0, 60]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると $I_6 \approx 0.5333333$ となり、$\frac{8}{15}$ と一致する。また、積分の恒等式と漸化式はいずれも、$n = 0.5$ や $n = 2.5$ のような整数でない n に対しても数値的に確かめられる。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$ の符号や因子 $n+1$ を間違える。$u > 0$ で $\operatorname{sech} u$ は減少するので、導関数は負でなければならない。
- 無限遠で境界項が 0 になる理由を説明しない。条件 $n > 0$ が必要になるのはまさにこの 1 か所である。
- I_2 の値を求めずに、答えを $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$ のまま書く。

STEP のその先へ

このような漸化式は、ウォリス（Wallis）の公式と同じ構造をもっている。$t = \tanh u$（あるいはグーデルマン置換（Gudermannian substitution）$\sin\theta = \tanh u$）とおくと、I_n は $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta$ となり、漸化式はウォリスのものそのものになる。大学では、これらの積分はベータ関数（Beta function）の値 $I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ として再び登場し、これによって漸化式はすべての実数 $n > 0$ に拡張される。また、境界項について払った注意は、広義積分（improper integral）の理論の出発点である。厳密な扱いについては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を、この種の問題をさらに多く解きた

い場合は Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP III 見本問題、第 7 問

純粋数学 ・ 階数低下法

> **STEP III 見本問題、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q7

鍵となる考え方

2 階線形微分方程式（second-order linear differential equation）に x^2y''、xy'、y が含まれているときは、x のべきを試すのが自然である。そうすると各項は x^α の定数倍となり、方程式は α に関する条件に帰着する。解 y_1 が一つわかれば、$y = y_1 v$ とおくのが**階数低下法**（reduction of order）である。v そのものを含む項は打ち消し合い、v' に関する 1 階の方程式が残る。

解答

べき関数の解

$y = x^\alpha$ を試す（任意の実数 α に対して x^α が意味をもつように $x > 0$ とする）。このとき $y' = \alpha x^{\alpha-1}$、$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ であるから、

$$xy' - y = (\alpha - 1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

これを代入すると、

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = \big[\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)\big]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha + x - 2)\,x^\alpha.$$

これが**すべての** x に対して 0 となるためには、括弧の中が恒等的に 0 でなければならない。因数 $\alpha + x - 2$ は x に依存するので恒等的に 0 にはなりえない。よって $\alpha = 1$ である。

したがって $y = x$ は解であり、このことは直接確かめることもできる。実際、$y'' = 0$ かつ $xy' - y = x - x = 0$ である。さらにその定数倍 $y = Ax$ も解であり、これが「解は x^α に比例する」という意味である。

一般解

ヒントに従い、x の関数 v を用いて $y = xv$ とおく。すると

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

であり、方程式に現れる組合せはきれいに簡単になる：

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

これを方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2\left(xv'' + 2v' + xv' - 2v'\right) \\ &= x^3\left(v'' + v'\right). \end{aligned}$$

考えてみよう　（微分を含まない）v そのものを含む項がすべて消えたのはなぜか？

それは $y = x$ が解だからである。v が定数ならば $y = xv$ は x の定数倍となり、左辺は 0 になる。したがって残りうるのは v' と v'' だけである。これこそが階数低下法がうまくいく理由であり、計算の検算としても役に立つ。

0 を含まない任意の区間では x^3 で割ることができ、

$$v'' + v' = 0.$$

を得る。これは $w = v'$ についての 1 階の方程式 $w' = -w$ であり、定数 B を用いて $w = Be^{-x}$ となる。もう一度積分すると（符号は定数に含めて）、

$$v = A + Be^{-x}.$$

したがって一般解（general solution）は

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

である。ただし A、B は任意定数である。2 階線形微分方程式の一般解がそうでなければならないように、これは 2 つの任意定数を含み、しかも 2 つの部分 x と xe^{-x} は互いに定数倍の関係にない。

新しく得た部分を直接確かめておく。$y = xe^{-x}$ とすると $y' = (1-x)e^{-x}$、$y'' = (x-2)e^{-x}$ であるから、

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}\left[x^2 + x(1-x) - x\right] = 0.$$

$x = 0$ についての注意。 y'' の係数は $x = 0$ で 0 になる。x^3 で割るのを 0 から離れたところに限ったのはこのためである。原理的には $x > 0$ と $x < 0$ で異なる定数をとることもできる。しかし、そのような関数はどれも $y(0) = 0$、$y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$、$y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$ をみたすので、y が 0 で 2 回微分可能であるためには $B_+ = B_-$ が必要であり、そのとき $A_+ = A_-$ となる。よって $y = Ax + Bxe^{-x}$ は実数全体においても一般解である。

検算

- 上で行ったように、$y = x$ と $y = xe^{-x}$ をそれぞれ方程式に代入し直すと、いずれも 0 になる。
- 数値的な確認：$x = 1$ から $y(1) = y_0$、$y'(1) = y_1$ として方程式を一歩ずつ数値的に解く場合、公式からは $A = y_1$、$B = (y_0 - y_1)e$ と予想される。$y_0 = 2$、$y_1 = 1$ とすると $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$ となり、いくつかのランダムな初期値に対して、4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）による数値積分と 10^{-8} より高い精度で一致する。

よくある間違い

- 因数 $(\alpha + x - 2)$ から $\alpha = 2 - x$ と結論してしまう。α は定数でなければならないので、この根は認められない。
- $y = xv$ に対する y'' を誤って計算する（正しくは $2v' + xv''$ であり、$v' + xv''$ ではない）。v を含む項が打ち消し合わなければ、微分の計算が間違っている。
- $v' = Be^{-x}$ で止まってしまい、積分して v を求める際に 2 つ目の定数を忘れる。

STEP のその先へ

階数低下法は任意の 2 階線形微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ に対して有効である。解 y_1 が一つ与えられれば、置換 $y = y_1 v$ によって常に v' に関する 1 階線形微分方程式が得られ、2 つ目の解は y_1 と p を含む積分で表すことができる。これはロンスキアン（Wronskian）やアーベルの公式（Abel's formula）と密接に関係しており、また $x = 0$ のような点で x^{α} を試すことは、級数解を求めるフロベニウス法（Frobenius method）の第一歩である。これらはすべて Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

解答例

STEP III 見本問題、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルとコーシー・シュワルツの不等式

> **STEP III 見本問題、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q8

鍵となる考え方

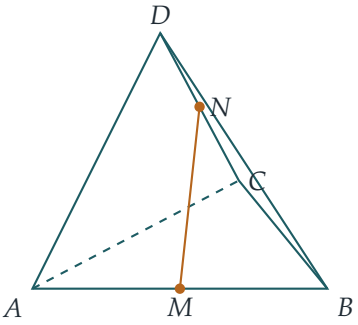
小問 (i) では、4 つの頂点に位置ベクトル（position vector）を与える。必要な長さはすべて、それらの簡単な組合せの大きさ（modulus）であり、長さの 2 乗は展開できる内積（dot product）である。すると両辺は同じ式になり、計算の整理の大部分は対称性が引き受けてくれる。小問 (ii) では、左辺は固定されたベクトル $(3,2,6)$ との内積のように見え、しかもこのベクトルの長さは整数である。これはまさにコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）が活躍する場面である。

解答

小問 (i)

四面体（tetrahedron）を $ABCD$ とし、任意の原点に関する位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ とする。6 本の辺は、対辺（opposite edges、共通の頂点をもたない辺）の 3 組に分かれる：

$$AB \text{ と } CD, \qquad AC \text{ と } BD, \qquad AD \text{ と } BC.$$



組 AB, CD について、中点（midpoint）は $M = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ と $N = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$ であるから

$$MN^2 = \tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

残り 2 本の中点を結ぶ線分も同様に求まるので、3 本の中点連結線分の長さの 2 乗の和の 4 倍は

$$S = |-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

である。$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ を用いて各項を展開する。各項は $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$ と、交差項 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を与える。交差項の符号は、その項の中で $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の符号が同じとき正である。

考えてみよう 3 つの項にわたって、交差項はどのように足し合わされるだろうか？

任意の頂点の組、たとえば $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ をとる。これらは第 1 項では同じ符号、他の 2 項では異なる符号をもつので、交差項の合計は $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ となる。どの組についても同じことが成り立つ。実際、3 つの項はそれぞれ 4 つの頂点を 2 組（ある頂点の組とその反対側の組）に分け、どの頂点の組も 3 つの項のうちちょうど 1 つでだけ符号が一致する。したがって

$$S = 3\big(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2\big) - 2\big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\big).$$

次に辺について考える。たとえば $AB^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ である。6 本の辺すべてについて和をとると、各頂点は 3 本の辺に属するので、各 $|\mathbf{a}|^2$ は 3 回現れ、各組は $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を 1 つずつ与える：

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 3\sum|\mathbf{a}|^2 - 2\sum_{\text{組}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = S.$$

よって、辺の長さの 2 乗の和は、対辺の中点を結ぶ 3 本の線分の長さの 2 乗の和の 4 倍に等しい。これで示された。

小問 (ii)

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix},\qquad \text{よって}\qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3x+2y+6,$$

とおく。このとき $|\mathbf{a}|=\sqrt{9+4+36}=7$、$|\mathbf{b}|=\sqrt{x^2+y^2+1}$ である。任意の実数はその絶対値以下であるから

$$3x+2y+6=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|=7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

となり、これが求める不等式である。

等号成立条件。両方の段階で等号が成り立つ必要がある。

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ であり $|\cos\theta|=1$ が必要なので、$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ が成り立つのは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行なときに限る。$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ であるから、これはある λ に対して $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$ となることを意味する。第 3 成分から $1=6\lambda$ なので $\lambda=\frac{1}{6}$ であり、$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$ となる。
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ には $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ge0$ が必要である。ここでは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\lambda|\mathbf{a}|^2=\frac{49}{6}>0$ なので、これも成り立つ。

直接確かめると、$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$ のとき左辺は $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+6=\frac{49}{6}$、右辺は $7\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+1}=7\cdot\frac{7}{6}=\frac{49}{6}$ である。よって等号が成り立つのは

$$x=\tfrac{1}{2},\qquad y=\tfrac{1}{3}.$$

のとき、かつそのときに限る。

検算

- 1 辺の長さ 1 の正四面体（regular tetrahedron）では、6 本の辺の長さの 2 乗の和は 6 である。これを 1 辺 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の立方体の 1 つおきの頂点に置くと、各中点連結線分は向かい合う面の中心を結ぶので長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、$4\times3\times\frac{1}{2}=6$ となる。
- 10^4 個のランダムな四面体で数値実験を行ったところ、丸め誤差の範囲で恒等式と一致した。(ii) については、$7\sqrt{x^2+y^2+1}-(3x+2y+6)$ は 2×10^5 個のランダムな点で正であり、細かい格子上での最小値は $(0.5,\,0.335)$ でとられた。これは値が 0 となる点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ に近い。

よくある間違い

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ の段階を忘れる、あるいは等号成立条件の議論でこれを無視する。ここでは $\lambda > 0$ なので問題は生じないが、確認は必要である。$\lambda < 0$ であれば両辺の符号が異なってしまう。
- $(3,2,6)$ と $(x,y,1)$ を用いながら、$|\mathbf{a}|$ を 7 以外の値にしてしまう。この問題は $3^2+2^2+6^2$ が平方数になるように作られている。

STEP のその先へ

小問 (i) は、平行四辺形の法則（parallelogram law）$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2$ の 3 次元版の親戚である。実は、3 本の中点連結線分は重心（centroid）で交わり、互いに他を 2 等分する。小問 (ii) はコーシー・シュワルツの不等式そのものであり、これは任意の内積空間（inner-product space）で成り立つ。関数の空間も含まれ、そこでは積分を評価する道具となる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これら 2 つの考え方をより広い枠組みで眺めるのに良い本である。

解答例

STEP III 見本問題、第 9 問

純粋数学 ・ 行列の群

> **STEP III 見本問題、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q9

鍵となる考え方

すべては一つの計算から導かれる。この形をした一般の行列を二つ掛け合わせ、何が得られるかを見ればよい。積は再び同じ形になり、その成分は簡単な式で与えられる。そしてその式から、閉性（closure）、単位元（identity）、逆元（inverse）、整数部分群、可換となる条件が、ほとんど労せずに得られる。次のようにおく。

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

解答

G は群である

積の公式。行と列を掛け合わせると、

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & 1 & 0 \\ b+cx+y & c+z & 1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z). \tag{$*$}$$

である。

閉性。成分 $a+x$、$b+cx+y$、$c+z$ はいずれも実数であるから、積は G に属する。

結合法則（associativity）。行列の積については、これを仮定してよい。

単位元。単位行列は $I = M(0,0,0)$ であり、これは G に属する。また、任意の行列 M に対して $IM = MI = M$ が成り立つ。

逆元。$M(a,b,c)$ が与えられたとき、積が $M(0,0,0)$ となる $M(x,y,z)$ を探す。$(*)$ より $a+x=0$、$c+z=0$、$b+cx+y=0$ が必要であるから、$x=-a$、$z=-c$、$y=-b-cx=ac-b$ となる。行列の積は可換ではないので、逆の順序も確かめておく。

$$M(-a,\, ac-b,\, -c)\,M(a,b,c) = M\big(0,\ (ac-b)+(-c)a+b,\ 0\big) = M(0,0,0).$$

よって $M(a,b,c)^{-1} = M(-a,\, ac-b,\, -c)$ であり、これは G に属する。

群の四つの公理がすべて成り立つので、G は行列の積に関して群（group）である。

整数成分の行列

$x,y,z \in \mathbb{Z}$ である $M(x,y,z)$ 全体の集合を H とする。これは G の部分集合であり、$I = M(0,0,0)$ を含む。a,b,c,x,y,z が整数ならば $a+x$、$b+cx+y$、$c+z$ も整数であるから、$(*)$ より H は積について閉じている。逆元 $M(-a,\, ac-b,\, -c)$ も整数成分をもつので、H は逆元をとる操作についても閉じている。結合法則は G から引き継がれる。したがって答えは**イエス**であり、H は G の部分群（subgroup）である。

> **考えてみよう** 積について閉じていることだけでは、なぜ十分でないのだろうか？

無限部分集合の場合、それだけでは部分群にならないことがある。たとえば x,y,z が**非負**整数である行列 $M(x,y,z)$ 全体は積について閉じているが、$M(1,0,0)$ の逆元は $M(-1,0,0)$ であり、これはその集合に属さない。ここでは逆元の公式によって整数の範囲にとどまることが保証されており、それこそが H を部分群にしているのである。

すべての元と可換な元

$A = M(a,b,c)$ と一般の $B = M(x,y,z)$ をとる。$(*)$ を両方の順序で用いると、

$$AB = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z), \qquad BA = M(x+a,\ y+za+b,\ z+c).$$

第一成分と第三成分は常に一致するので、

$$AB = BA \iff cx = az.$$

である。（特に G は非可換（non-abelian）である。実際、$M(1,0,0)$ と $M(0,0,1)$ は可換でない。）

A が**すべての** B と可換（commute）であるためには、すべての実数 x、z に対して $cx = az$ が成り立つ必要がある。$x=1$、$z=0$ とすると $c=0$ が、$x=0$、$z=1$ とする

と $a=0$ が得られる。逆に $a=c=0$ ならば、すべての x,z に対して $cx=0=az$ となる。よって G のすべての元と可換な元は、ちょうど次の形のものである：

$$A=M(0,b,0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&0&1\end{pmatrix},\qquad b\in\mathbb{R}.$$

したがって答えは**イエス**であり、そのような A は存在する。$b\neq 0$ であれば $A\neq I$ となり、たとえば $A=M(0,1,0)$ がそうである。$(*)$ より、G の任意の $B=M(x,y,z)$ に対して $M(0,1,0)\,M(x,y,z)=M(x,\,1+y,\,z)=M(x,y,z)\,M(0,1,0)$ が成り立つ。

検算

- G の各行列は対角成分がすべて 1 の下三角行列（lower triangular matrix）であるから、その行列式（determinant）は 1 であり、確かに逆行列をもつ。したがって求めた逆元は必ず存在し、しかも再び同じ形をしている。
- 数値による確認：$A=M(2,3,5)$、$B=M(1,0,0)$ とすると、$(*)$ より $AB=M(3,8,5)$ であるが $BA=M(3,3,5)$ となる。よって A は B と可換でなく、これは $cx=5\neq 0=az$ から予想されるとおりである。さらに、積と逆元の公式、および可換となる条件を、数千個のランダムな行列について分数を用いて厳密に確かめた。

よくある間違い

- 逆元を片側からしか確かめないこと。非可換な状況では両方の積を確認しておく価値がある（あるいは、正方行列では片側逆行列は自動的に両側逆行列になることに触れてもよい）。
- 最後の小問に「G は非可換なので、存在しない」と答えること。非可換群であっても、単位元以外にすべての元と可換な元をもつことはあり、この群はまさにそうである。
- 逆の確認を忘れること。$a=c=0$ が必要であることを示したら、そのような A が実際にすべての B と可換であることも確かめなければならない。

STEP のその先へ

これは**ハイゼンベルク群**（Heisenberg group）であり、すべての元と可換な元の全体はその**中心**（centre）$Z(G)$ をなす。ここではそれは行列 $M(0,b,0)$ の全体であり、加法に関する実数全体と同じ構造をもつ。整数版の H は離散ハイゼンベルク群であり、

群論（group theory）や幾何学で好んで用いられる例である。また、ハイゼンベルク群そのものは、位置と運動量の交換関係（commutation relations）を通じて量子力学（quantum mechanics）に現れる。群、部分群、中心については Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照せよ。

解答例

STEP III 見本問題、第 10 問

純粋数学 ・ 合同算術

> **STEP III 見本問題、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q10

鍵となる考え方

どちらの小問も剰余（remainder）に関する問題なので、うまく選んだ数を法（modulo）として考えるとよい。(i) では、平方数（square）は 8 を法としてごく限られた値しかとらず、そのうちの 3 つを足しても決して 7 にはならない。(ii) では、2 つの項が 17 を法として同じ底を含むように累乗を書き直す。すると 2 つの係数の和が 17 の倍数になる。

解答

小問 (i)

奇数の平方。奇数を $2k+1$（k は整数）と表す。すると

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

連続する 2 つの整数 k と $k+1$ のうち一方は偶数であるから、$k(k+1)$ は偶数であり、$4k(k+1)$ は 8 の倍数である。したがって、奇数の平方を 8 で割った余りはつねに 1 である。

偶数の平方。偶数を $2k$ と表す。すると $(2k)^2 = 4k^2$ である。

- k が偶数で $k = 2j$ のとき、$4k^2 = 16j^2$ は 8 の倍数であり、余りは 0 である。
- k が奇数のとき、k^2 は奇数であるから $k^2 = 2j+1$ とおくと、$4k^2 = 8j+4$ となり、余りは 4 である。

よって、偶数の平方を 8 で割った余りは 0 または 4 である。

結論を導く。どの平方数も 8 を法として 0、1、4 のいずれかと合同である（ここには $0^2 = 0$ も含まれるので、3 つの平方数のうちいくつかが 0 であってもよいことになる）。$N = a^2 + b^2 + c^2$ とする。すると $N \bmod 8$ は、それぞれ $\{0,1,4\}$ から選んだ 3 つの数の和の余りである。そのうち 4 に等しいものの個数で場合分けすると、次のようになる。

4 の個数	残りの和として可能な値と、合計の 8 を法とした値
0	$0,1,2,3$
1	$4 + \{0,1,2\} = 4,5,6$
2	$8 + \{0,1\} \equiv 0,1$
3	$12 \equiv 4$

とりうる余りは $0,1,2,3,4,5,6$ であり、7 は決して現れない。$8n + 7$ の形の数は 8 で割ると余りが 7 になるので、3 つの平方数の和にはなりえない。

考えてみよう 7 そのものが 3 つの平方数の和でないことを確かめるだけではいけないのはなぜか？

主張は $7, 15, 23, \ldots$ という無限個の数についてのものであり、1 つずつ確かめていてはいつまでも終わらないからである。8 を法として考えれば、これらすべてを一度に扱える。a、b、c が何であっても重要なのはその余りだけであり、上の表がすべての場合を尽くしている。

小問 (ii)

各項が定数と n 乗の積になるように累乗を分ける。

$$2^{3n+1} = 2 \cdot 8^n, \qquad 3\left(5^{2n+1}\right) = 15 \cdot 25^n.$$

ここで $25 = 17 + 8$ であるから $25 \equiv 8 \pmod{17}$ であり、したがってすべての $n \geq 0$ に対して $25^n \equiv 8^n \pmod{17}$ が成り立つ（合同式（congruence）は辺々掛けてよい）。よって

$$\begin{aligned} 2^{3n+1} + 3\left(5^{2n+1}\right) &= 2 \cdot 8^n + 15 \cdot 25^n \\ &\equiv 2 \cdot 8^n + 15 \cdot 8^n \\ &= 17 \cdot 8^n \equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

ゆえに、すべての整数 $n \geq 0$ に対して 17 は $2^{3n+1} + 3(5^{2n+1})$ を割り切る。これが示すべきことであった。

考えてみよう 合同式をまだ習っていない場合はどうすればよいか？

同じ考え方は数学的帰納法（induction）でも使える。$f(n) = 2\cdot 8^n + 15\cdot 25^n$ とおく。すると $f(0) = 17$ であり、

$$f(n+1) - 8f(n) = 15\cdot 25^{n+1} - 15\cdot 8\cdot 25^n = 15\cdot 25^n(25-8) = 17\cdot 15\cdot 25^n,$$

であるから、$f(n+1) = 8f(n) + 17\cdot 15\cdot 25^n$ となる。$17 \mid f(n)$ ならば $17 \mid f(n+1)$ であり、数学的帰納法により結果が従う。

検算

小さな場合を試してみる。$7 = 4+1+1+1$ は 4 つの平方数を必要とし、$15 = 9+4+1+1$ も 4 つを必要とする。一方、$6 = 4+1+1$ や $14 = 9+4+1$ は問題ない。コンピュータで探索すると、5000 以下の $8n+7$ の形の数で 3 つの平方数の和になるものは 1 つもないことが確かめられる。(ii) については、$n = 0$ のとき $2+15 = 17$、$n = 1$ のとき $16+375 = 391 = 17\times 23$ である。0 から 299 までのすべての n について、この式が 17 で割り切れることを確認した。

よくある間違い

- 0 も平方数であることを忘れること。「3 つの平方数の和」は、実際には 0 でない平方数を 1 つか 2 つしか使わないこともある。上の議論では 0 が剰余の 1 つとして含まれているので、この場合も自動的に扱われている。
- 「$4k^2+4k$ は 4 で割り切れる」という理由で奇数の平方が 1 mod 8 であると述べること。これでは 1 mod 4 しか得られない。$k(k+1)$ から出てくる因数 2 が必要である。

STEP のその先へ

小問 (i) は、ルジャンドル（Legendre）の三平方定理（three-square theorem）のやさしいほうの半分である。この定理は、正の整数が 3 つの平方数の和で表せるのは、それが $4^a(8n+7)$ の形でないとき、そして**そのときに限る**、と主張する。逆向きの証明ははるかに難しく、二次形式（quadratic form）の理論を必要とする。これに対して、ラグランジュ（Lagrange）は**すべての**正の整数が 4 つの平方数の和で表せることを証明した。小問 (ii) は $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ における日常的な計算であり、大学 1 年次の講義ではこれが群（group）や環（ring）の研究へと発展していく。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等整数論）は、合同式と平方数の和を見事に解説している。

解答例

STEP III 見本問題、第 11 問

力学 ・ 一階微分方程式

> **STEP III 見本問題、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.13 節「**除雪車問題**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/snowplough.html

鍵となる考え方

各除雪車の速さは雪の深さで与えられ、その深さは除雪車がある地点に**いつ**到達するかで決まる。そこで、時刻を位置の関数とみなし、速さの逆数（reciprocal）である $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ を書き下すのが自然である。1 台目の除雪車については、深さは元の深さに降り積もった分を加えたものにすぎない。2 台目については、その前方の雪は 1 台目がその地点を除雪した時点から降り始めたものにすぎない、という点に気づくことが鍵である。

解答

各除雪車を道路上を動く点とみなし、共通の出発点からの距離を測る。以下では一貫して、深さの単位はメートル、時間の単位は秒、距離の単位はメートルとする。

小問 (i)

時刻 t において 1 台目の除雪車が出会う雪は、$t = 0$ から乱されることなく降り続けたものであるから、その深さは

$$z = h + kt.$$

である。したがって速さは

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

となる（速さは正なので x は t の狭義単調増加（strictly increasing）関数であり、逆関数をとってよい）。これは t について線形（linear）であり、次のように書くのが最もすっきりする。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(t + \frac{h}{k}\right) = \alpha\left(t + \frac{h}{k}\right).$$

ゆえに、ある定数 C を用いて $t + h/k = C\mathrm{e}^{\alpha x}$ と表される。$x = 0$ のとき $t = 0$ であるから $C = h/k$ であり、x メートル進むのにかかる時間は

$$t_1(x) = \left(\mathrm{e}^{\alpha x} - 1\right)\frac{h}{k} \text{ 秒},$$

となり、求める結果が得られた。

小問 (ii)

方程式を立てる。 時刻 $t > T$ において 2 台目の除雪車が位置 y にあるとする。1 台目の除雪車は小問 (i) で求めた時刻 $t_1(y)$ にこの地点を通過し、そこの雪をすべて取り除いている。

> **考えてみよう** 2 台目の除雪車の前方にある雪の深さはいくらか。

$h + kt$ ではない。1 台目の除雪車の後ろには何もない路面が残されているからである。位置 y では、時刻 $t_1(y)$ から雪が 0 から速さ k で積もり始めているので、深さは

$$z = k\big(t - t_1(y)\big).$$

である（これには $t > t_1(y)$、すなわち 2 台目がまだ 1 台目の後ろにあることが必要であり、これは両者が出会うまでは成り立つ）。したがって 2 台目の除雪車の速さは

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha k\big(t - t_1(y)\big)} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = t - \left(\mathrm{e}^{\alpha y} - 1\right)\frac{h}{k},$$

となり、これが与えられた方程式である。2 台目の除雪車は時刻 T に原点を出発するので、初期条件（initial condition）は「$y = 0$ のとき $t = T$」である。

解の検証。 提示された解を

$$t = t_1(y) + g(y), \qquad g(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}.$$

と書く。すると $t - t_1(y) = g(y)$ であるから、示すべきことは $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y = g(y)$ である。g に積の微分法（product rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} &= \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} \;-\; \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} \;+\; \alpha\Big(T - \frac{\alpha h y}{k}\Big)\mathrm{e}^{\alpha y} \\ &= \alpha\, g(y),\end{aligned}$$

となる。ここで第 1 項が $t_1'(y)$、残りの 2 項が $g'(y)$ である。よって微分方程式（differential equation）は成り立つ。また $y = 0$ のとき $t = 0 + T \cdot 1 = T$ であるから、初期条件も成り立つ。

なぜこれが求める**唯一の**解なのか。この方程式は線形かつ一階（first order）である。t と $\tilde{t}$ がともにこれを満たすならば、その差 u は $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$ を満たすので、$u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$ である。両者とも $t(0) = T$ を満たすので $u(0) = 0$ であり、$u \equiv 0$ となる。ゆえに $(y,t) = (0,T)$ を通る解はちょうど 1 つであり、我々はそれを見つけたことになる。

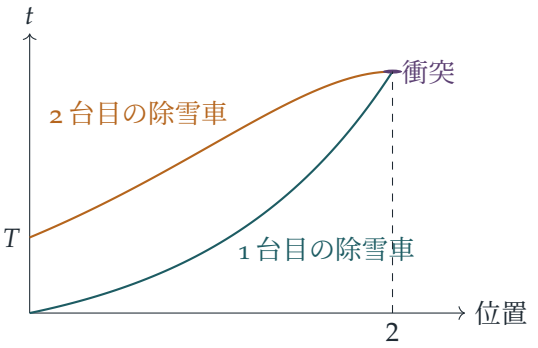
（自分で導きたい場合は、積分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{-\alpha y}$ を掛けると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\big) = -\frac{\alpha h}{k}\big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}\big)$ が得られ、これを 0 から y まで積分すると同じ式が導かれる。）

衝突。 2 台の除雪車がある地点 y で衝突するのは、両者が同じ時刻にそこへ到達するとき、すなわち $t = t_1(y)$ のときであり、これは $g(y) = 0$ を意味する。$\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$ であるから、これが起こるのはちょうど

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

のときである。$0 \le y < kT/(\alpha h)$ に対しては $g(y) > 0$ である（速さは正でなければならないので $\alpha, h, k > 0$ とする）。したがって 2 台目の除雪車はそのような各地点に 1 台目よりも真に遅れて到達し、それより前に両者が出会うことはない。ゆえに、除雪車は $kT/(\alpha h)$ メートル進んだところで衝突する。 ■

下の図は、$h = k = \alpha = 1$、$T = 2$ のときの 2 つの経路を (y,t) 平面に描いたものである。2 曲線の間の時間差 $g(y)$ は $y = 2$ で 0 まで縮む。



検算

- 単位：$k/(\alpha z)$ が速さであることから α の単位は m^{-1} である。よって αx は無次元（dimensionless）であり、h/k は時間、$kT/(\alpha h)$ は長さである。
- $T = 0$ ならば 2 台は同時に出発し、公式は距離 0 での衝突を与える。先行時間 T が大きいほど衝突地点は道路の先へ移る。これは当然そうあるべきである。
- h、k、α、T をさまざまにランダムに選び、各除雪車の運動を時間について数値的に進めてみると（2 台目については $t = T$ で $y = 0$ から $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$ を用いる）、公式と 10^{-8} より高い精度で一致する。図と同じく $h = k = \alpha = 1$、$T = 2$ のとき、2 台はともに時刻 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$ に $y = 2$ に到達する。

よくある間違い

- 2 台目の除雪車についても深さを $h + kt$ としてしまう。2 台目が除雪しているのは時刻 $t_1(y)$ に一度除雪された道路なので、深さは $k(t - t_1(y))$ である。
- 解を確かめる際に、初期条件「$y = 0$ で $t = T$」を忘れる。微分方程式を満たすだけでは不十分である。
- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$ の代わりに $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を書いてしまう。時刻を従属変数とすることで、方程式は線形になり易しくなるのである。

STEP のその先へ

これは古典的な「除雪車問題（snowplough problem）」の一種である。方程式を線形にするために従属変数（dependent variable）と独立変数（independent variable）の役割を入れ替える技法は、大学 1 年の微分方程式で絶えず用いられる。上の一意性（uniqueness）の議論は、初期値問題（initial value problem）に対する存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）のごく簡単な場合である。また、前方の雪が薄くなって 0 に近づくと 2 台目の除雪車の速さが発散することにも注意しよう。これは現実の性質ではなく、モデルの限界を示すものである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、線形一階方程式、積分因子、一意性が扱われている。

解答例

STEP III 見本問題、第 12 問

力学 ・ 棒のつり合い

STEP III 見本問題、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

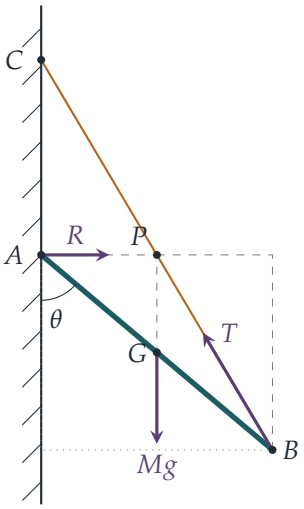
step.maths.org/questions/spec-s3-q12

鍵となる考え方

棒にはたらく力はちょうど 3 つ、すなわち重力、なめらかな壁からの抗力、そして糸の張力である。平行でない 3 力が物体をつり合わせているとき、それらの作用線は 1 点で交わらなければならない（三力のつり合い（three-force principle））。そしてこの問題では、その点の位置は容易に求まる。それによって図形の配置が完全に決まり、あとは 1 回の力の分解で張力が得られる。

解答

モデル化。棒は一様であるから、その重力 Mg は中点 G にはたらく。壁はなめらかであるから、A における抗力 R は水平（壁に垂直）である。糸は軽く伸び縮みしないので、B を BC の向きに張力 T で引く。



棒の傾き

抗力 R は A を通る水平線に沿ってはたらき、重力は G を通る鉛直線に沿ってはたらく。これらは、A と同じ高さで G の真上（または真下）にある点 P で交わる。3 力はつり合っているので、P のまわりの力のモーメント（moment）はつり合っていなければならない。R と Mg は P のまわりにモーメントをもたないから、T もモーメントをもたず、したがって糸の作用線は P を通らなければならない。

? **考えてみよう** 棒は A から上向きに伸びているか、それとも下向きか。

水平距離を壁から測る。棒と鉛直線のなす角を θ とすると、B は壁から距離 $L\sin\theta$ のところにあり、G（したがって P）はその半分の距離 $\frac{1}{2}L\sin\theta$ のところにある。糸は B から壁上の点 C まで一直線に張られているので、水平方向にちょうど半分進んだ点は糸のちょうど中間点である。すなわち P は BC の**中点**である。よって P の高さは B と C の高さの平均である。ところが P は A と同じ高さにあり、C は A より上にあるから、B は A より**下**に、ちょうど距離 AC だけ下になければならない。

したがって棒は A から下向きに垂れている。棒が鉛直下向きとなす角を θ とする。すると B は A より深さ $L\cos\theta$ だけ下にあり、よって $AC = L\cos\theta$ である。B から見ると、点 C は水平距離 $L\sin\theta$ だけ離れ、高さ $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$ だけ上にある。糸の長さは αL であるから、三平方の定理（Pythagoras' theorem）より

$$\alpha^2 L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

となり、

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{すなわち} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{3}},$$

を得る。棒は A から**下向き**に、鉛直線とこの角をなしている。

α のとりうる値

C は A より真に上になければならないので、$\cos\theta > 0$ である。($\cos\theta = 0$ ならば C は A と一致し、棒は水平になる。このとき A、B、C は一直線上に並ぶ。) また A、B、C は一直線上にあってはならないので、棒は鉛直ではない。すなわち $\sin\theta \neq 0$、つまり $\cos^2\theta < 1$ である。したがって、$\alpha > 0$ を用いて

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

となる。逆に、この範囲の任意の α に対して上の角は存在し、上の作図により 3 力が 1 点で交わる配置が得られるのでモーメントはつり合い、さらに以下の力の分解により T と R は正となる。よって、とりうる値の範囲は $1 < \alpha < 2$ である。

張力

鉛直方向に分解する。糸が鉛直線となす角の余弦は (鉛直方向の高さの差) / (糸の長さ) $= 2L\cos\theta/(\alpha L)$ であり、R は水平であるから、

$$T \cdot \frac{2\cos\theta}{\alpha} = Mg \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{Mg\alpha}{2\cos\theta} = \frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

となる。ここで $\cos\theta = \sqrt{(\alpha^2 - 1)/3}$ ($\cos\theta > 0$ より正の根) を代入した。これが求める結果である。

念のため水平方向に分解すると $R = T \cdot \dfrac{L\sin\theta}{\alpha L} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta > 0$ となり、壁は確かに棒を外向きに押している。壁の抗力として当然そうでなければならない。

検算

- $\alpha \to 2^-$ のとき $\cos\theta \to 1$ である。棒は A の真下に鉛直に垂れ、糸は棒に沿って折り返された形になり、$T \to Mg$ となる。このとき糸が重さ全体を支えるからである。$\alpha \to 1^+$ のとき $\theta \to 90^\circ$ かつ $T \to \infty$ である。ほぼ水平な棒を支えるには非常に大きな張力が必要になる。
- $\alpha = 1.5$ とすると、$\cos\theta \approx 0.6455$ ($\theta \approx 49.8^\circ$)、$T \approx 1.162\,Mg$ を得る。$(1,2)$ 内の数千個のランダムな α について、A のまわりのモーメントがちょうど 1 つの角で 0 になり、それが公式と一致すること、張力も一致すること、そして $(1,2)$ の外の α ではつり合いが存在しないことを数値的に確認した。

よくある間違い

- はしごの問題のように、棒を A から**上向き**に傾けて描いてしまう。作用線が 1 点で交わるという議論から B は A より下でなければならず、誤った図のままでは方程式に矛盾のない解が得られない。
- なめらかな壁の抗力が水平であることを忘れ、不要な摩擦力や鉛直成分を持ち込んでしまう。
- $\alpha = 1$ や $\alpha = 2$ を含めてしまう。これらは一直線上に並ぶ（退化した）配置を与え、問題文で除外されている。

STEP のその先へ

三力のつり合いの原理は、静力学（statics）における一般的な事実の特別な場合である。すなわち、力の系がつり合うのは、その合力と、任意の 1 点のまわりの合モーメントがともに 0 になるとき、かつそのときに限る。P について行ったように点をうまく選ぶことが、多くの場合もっとも速い解法となる。同じ考え方は、工学の力学におけるトラス、ケーブル、骨組み構造の解析の基礎にもなっている。力とトルクについての詳しい扱いは、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照せよ。

解答例

STEP III 見本問題、第 13 問

力学 ・ 転がる輪

STEP III 見本問題、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

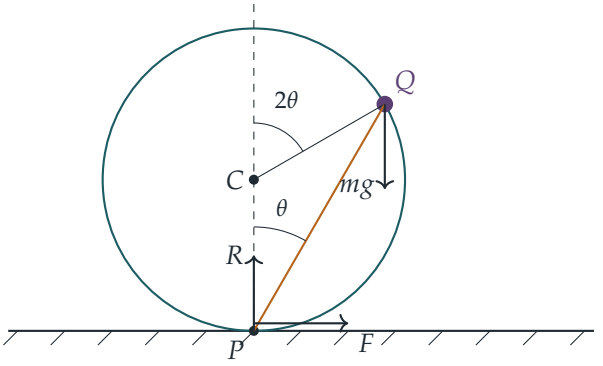
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

鍵となる考え方

輪（hoop）は軽い（light、質量を無視できる）ので、系の運動エネルギー（kinetic energy）は質点（particle）のものだけであり、輪は転がるので摩擦（friction）は仕事をしない。したがって、エネルギー保存（energy conservation）からただちに速さが得られる。また、転がりという条件によって幾何学的な配置も完全に決まる。輪が 2θ だけ回転すると、その中心は距離 $2a\theta$ だけ移動するので、x と y が θ だけで表される。最後に、軽い輪には合力がはたらき得ないので、台からの抗力は質点の加速度が要求するものにほかならず、しかもそれは負にはなり得ない。

解答

輪を滑らずに転がる（rolling without slipping）軽い剛体（rigid body）の円とみなし、質点はその縁に固定された点質量とみなす。台との接触点を P、中心を C、質点を Q とする。輪は x 軸の正の向きに転がるものとし、θ は 0 から増加するとする。



ここで R と F は、点 P において台が輪に及ぼす垂直抗力（normal reaction）と摩擦力であり、弦（chord）PQ は鉛直方向と角 θ をなす（中心角 2θ の半分である）。

速さ

R と F はどちらも P にはたらき、輪は転がっているので P は瞬間的に静止している。よってどちらも仕事をしない。輪は軽いので、運動エネルギーは質点のものだけであり、位置エネルギー（potential energy）の変化も質点のものだけである。質点は高さ $2a$ からほぼ静止した状態で動き始め、半径 CQ が鉛直上向きと角 2θ をなすとき、その高さは $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$ である。エネルギー保存より

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

となるので $v^2 = 4ga\sin^2\theta$ であり、$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta \ge 0$ であるから

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

となり、示すべき結果が得られる。

位置と $\dot\theta$

輪は角 2θ だけ回転しており、滑らずに転がるので、中心は弧の長さ $a\cdot 2\theta$ だけ前進している。C から見ると、質点は $a\sin 2\theta$ だけ前方、$a\cos 2\theta$ だけ上方にある。したがって

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

時間で微分すると

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

であり、よって

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

考えてみよう $v = 4a\dot\theta\cos\theta$ をもっと手早く確かめる方法はないだろうか。

ある。P は瞬間回転中心（instantaneous centre of rotation）であり、輪は角速度 $2\dot\theta$ で回転している。弦 PQ が C において張る角は $\pi - 2\theta$ なので $PQ = 2a\cos\theta$ であり、$v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$ となって、上の計算と一致する。

$\dot\theta > 0$ かつ $\cos\theta > 0$ のもとで、エネルギーから求めた速さと比較すると

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

となり、これが最初に示すべき結果である。（左辺は θ ではなく変化率 $\dot\theta$ でなければならない。右辺の単位が s^{-1} だからである。）

鉛直方向の加速度

$\dot{y}$ に $\dot{\theta}$ を代入すると

$$\dot{y} = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

もう一度微分し、再び $\dot{\theta}$ を用いると

$$\ddot{y} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

となり、示すべき結果が得られる。同様にして $\dot{x} = 4a\cos^2\theta\,\dot{\theta} = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$ であり、

$$\ddot{x} = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot{\theta} = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

転がりが止まる理由

輪は軽いので、輪と質点からなる系にはたらく力の合計は、m と質点の加速度の積に等しい。外力は下向きの mg、上向きの R、水平方向の F である。鉛直方向について考えると

$$R - mg = m\ddot{y} \quad\Longrightarrow\quad R = mg\left(1 - 2\sin^2\theta\right) = mg\cos 2\theta,$$

であり、水平方向については $F = m\ddot{x} = mg\cos 2\theta\tan\theta$ であるから、$R > 0$ である間は $F/R = \tan\theta$ となる。

考えてみよう θ が $\pi/4$ を超えると何がおかしくなるのだろうか。

台は押すことはできても引くことはできないので、$R \geq 0$ である。ところが $R = mg\cos 2\theta$ は、質点が中心と同じ高さになる $\theta = \pi/4$ で 0 になり、それ以上転がり続けるには $R < 0$ が必要になる。言い換えれば、転がり続けるには $\ddot{y} = -2g\sin^2\theta < -g$ でなければならない。つまり質点は自由落下（free fall）よりも速く下向きに加速しなければならないが、重力だけではそれは実現できない。したがって $\theta = \pi/4$ で接触力が消え、輪は台から離れる。その後、質点は前向きに $(ga)^{1/2}$、下向きに $(ga)^{1/2}$ の速度成分をもって放物運動（projectile motion）を始め、軽い輪はそれに引きずられるように運ばれて、その最下点は台から浮き上がる。

それより前に摩擦が影響することもある。転がるためには $|F| \leq \mu R$、すなわち $\tan\theta \leq \mu$ が必要であり、$\tan\theta$ は $\theta \to \pi/4$ のとき 1 まで増加する。したがって摩擦係数（coefficient of friction）が $\mu < 1$ を満たすならば、$\theta = \pi/4$ に達する前の $\tan\theta = \mu$ となる時点で輪は滑り始める。$\mu \geq 1$ の場合に限り、輪は $\theta = \pi/4$ まで転がり続け、そこで跳ね上がる。

検算

- $\theta = 0$ では $\dot{\theta} = 0$ である。最上点の位置は平衡（equilibrium）の位置であり、だからこそ輪をわずかにずらす必要がある。
- $\theta = \pi/4$ では $v = (2ga)^{1/2}$ であり、これは高さ a だけ落下したときの速さである。実際、質点は高さ $2a$ から a まで下がっている。
- コンピュータを用いて、$\phi = 2\theta$ についての運動方程式を（ラグランジアン（Lagrangian）$ma^2(1+\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mga(1+\cos\phi)$ から）独立に数値積分し、差分（finite difference）で求めた速度と加速度を上の公式と比較した。速さ、$\dot{\theta}$、$\ddot{y}$、$R = mg\cos 2\theta$、$F/R = \tan\theta$ はすべて 10^{-6} 以内で一致した。たとえば $\theta = \pi/4$ では $R = 0$ かつ $F/R = 1$ となる。

よくある間違い

- 中心の移動距離を $2a\theta$ ではなく $a\theta$ としてしまう。輪が回転した角は θ ではなく 2θ である。
- エネルギーの式に摩擦を含めてしまう。接触点は静止しているので、輪が転がっている間、摩擦は仕事をしない。
- 単に質点が「落ちる」とだけ述べてしまう。質点は輪に固定されている。台から離れるのは輪のほうであり、その理由は抗力が負にならなければならなくなるからである。

STEP のその先へ

転がる物体の接触点はその瞬間回転中心であり、滑らずに転がるという条件は、仕事をせずに自由度（degree of freedom）を一つ減らす束縛（constraint）である。このような束縛はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）によって体系的に扱われる。そこでは θ のような一つの座標でエネルギーを書き表せば、運動方程式が自動的に導かれる。上の検算で行ったのはまさにこれである。束縛力がいつ消えるかという問題（球面から離れるビーズ、こぶから浮き上がる車など）は、大学 1 年次の力学の典型的な題材である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、転がり運動と束縛力が詳しく扱われている。

解答例

STEP III 見本問題、第 14 問

力学 ・ 回転を伴う衝突

> **STEP III 見本問題、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q14

鍵となる考え方

支点は棒に未知の力積（impulse）を及ぼすので、運動量（linear momentum）は保存**されない**。しかし、その力積は支点のまわりにモーメントをもたないので、中点のまわりの角運動量（angular momentum）は保存される。これと、接触点に適用したニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）（衝突は完全弾性的なので反発係数は 1）を合わせれば、すべてが決まる。後半では、粒子がその後どう動くかを求め、両方の物体を追跡する。棒の反対側の半分が回ってきて、粒子の通る直線に達するのである。

解答

モデル化。粒子は質点とする。台は滑らかなので、どちらの物体にも摩擦ははたらかない。棒は一様で、中点 O で滑らかに軸支されている。棒の O のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

である。衝突の間、力積は粒子の運動方向の直線に沿ってはたらく（棒は滑らかで、粒子は棒に直角に当たる）ので、粒子は同じ直線上を動き続ける。衝突後の粒子の速度を、もとの運動方向を正として v とおく。

角速度

O のまわりの角運動量。系（粒子と棒）にはたらく外部からの力積は O の支点によるものだけであり、それは O のまわりのモーメントが 0 である。衝突前、粒子の O のま

わりの角運動量は mua で、棒は静止しているので、

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

反発。棒の打たれた点は O から距離 a にあるので、衝突直後には粒子のもとの運動方向に速さ $a\omega$ で動く。反発係数（coefficient of restitution）が 1 なので、遠ざかる速さは近づく速さに等しい。

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

> **考えてみよう** 回転する物体に対してニュートンの反発の法則を用いてよいのだろうか。

よい。この法則は、接触している 2 点の速度の共通法線方向の成分に対して成り立つ。代わりにエネルギーを用いてもよい。「完全弾性」（perfectly elastic）とは運動エネルギーが保存されることであり、$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$ となる。これを $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$ と書き直し、(1) より $u - v = \frac{4}{3}a\omega$ を用いると（$\omega \neq 0$ で割って）$u + v = a\omega$ が得られ、これはまさに (2) である。

(1) と (2) を加えると v が消去される。

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

これが示すべきことであった。さらに (2) より

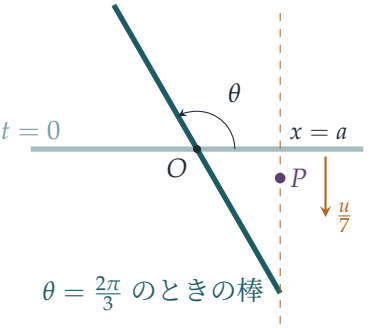
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

となるので、粒子はもとの直線に沿って速さ $u/7$ で跳ね返る。

2 回目の衝突

台の上に O を原点とする座標軸をとり、x 軸を棒の初期位置に沿ってとる。粒子ははじめ直線 $x = a$ 上を y 軸の正の向きに動いており、時刻 $t = 0$ に点 $(a, 0)$ で棒に当たるものとする。このとき $t > 0$ において、

- 粒子は $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$ にあり、y 軸の負の向きに一定の速さで動いている。
- 打たれた点は y 軸の正の向きに動いたので、棒は反時計回りに回転し、時刻 t には x 軸と角 $\theta = \omega t$ をなす。再び衝突するまでどちらの物体にもそれ以上力ははたらかないので、両方の運動は一様である。



棒の長さの半分は $2a$ なので、棒が直線 $x = a$ に達するのは、その直線上にある棒の点（O からの距離 $a/|\cos\theta|$）が O から $2a$ 以内にあるとき、すなわち $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$ のときに限る。そのとき、棒は高さ $y = a\tan\theta$ でこの直線と交わる。

- $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ のとき、棒は x 軸より上の $y = a\tan\theta > 0$ で直線と交わるが、粒子は x 軸より下にある。よって接触しない。
- $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ のとき、棒はそもそも直線に届かない。
- $\frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi$ のとき、棒の**もう一方の**半分が、粒子と同じ側の $y = a\tan\theta < 0$ で直線と交わる。

ここで位置を比較する。$t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$ なので、角 θ のときの粒子の y 座標は $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$ である。次の関数を考える。

$$f(\theta) = (\text{棒の}y\text{座標、直線}x = a) - (\text{粒子の}y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi.$$

- $\theta = \frac{2\pi}{3}$ のとき（棒の端が直線に達する）：$\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$ より $f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$ である。粒子は $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$ にあり、x 軸と $y = -\sqrt{3}a$ にある棒の端との間にある。つまり、棒の端は粒子を**越えて**回り込んでいる。
- $\theta \to \pi^-$ のとき：$\tan\theta \to 0$ なので $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$ である。棒は x 軸に向かって掃き戻ってくるが、粒子はおよそ $-0.52a$ にある。

f は $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$ で連続なので、中間値の定理（intermediate value theorem）により、その間のある θ で $f(\theta) = 0$ となる。その瞬間、棒は粒子の位置にあり、両者は再び衝突する。（上の最初の 2 項目により、それより前に接触することはない。）以上で証明が完了する。

数値的には、衝突は $\tan\theta = -\theta/6$ となる $\theta \approx 2.716$（約 155.6°）、時刻 $t \approx 3.17\,a/u$ で起こり、そのとき粒子は $y \approx -0.45a$、棒に沿って O から約 $1.10a$ の位置にある。

検算

- エネルギー：$a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ のとき、衝突後の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$ であり、ちょうどはじめのエネルギーに等しい。
- 慣性モーメント I の物体を距離 d の点で打つ場合に同じ議論を繰り返すと、$d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$ が得られる。$I \to 0$ のとき、打たれた点は $2u$ で動き出し、非常に軽い物体との弾性衝突と同じになる。$I \to \infty$ のとき、棒はほとんど回らず、粒子は速さ u で跳ね返る。ここでは $I/ma^2 = \frac{4}{3}$ より $\frac{6}{7}u$ となる。
- $a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ が角運動量とエネルギーの両方を保存することを厳密な分数で確かめ、さらに両方の運動を時間に沿って進めてみた。衝突後最初の接触は $\theta \approx 2.7165$ で起こり、$\tan\theta + \theta/6 = 0$ を二分法で解いた結果と一致した。

よくある間違い

- **運動量**を保存させてしまう。支点が力積を与えるので、保存されるのは支点のまわりの角運動量だけである。
- $I = \frac{1}{3}m\ell^2$（端のまわりの値）を用いてしまう、あるいは棒の長さが $2a$ ではなく $4a$ であることを忘れる。
- 2 回目の衝突を、打たれた側の半分の棒で探してしまう。その半分は粒子の直線から遠ざかる。回り込んできて粒子に出会うのは、もう一方の半分である。

STEP のその先へ

定点のまわりの角運動量とエネルギーまたは反発の条件を組み合わせるのは、剛体（rigid body）の撃力による運動を扱う標準的な方法であり、**打撃の中心**（centre of percussion）という考え方につながる。これは、軸支された物体を打っても支点に力積が生じないような点のことである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の衝突と角運動量を丁寧に扱っており、まさにこの種の問題を数多く収めている。

解答例

STEP III 見本問題、第 15 問

確率・統計 ・ ランダムネットワークの連結性

> **STEP III 見本問題、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q15

鍵となる考え方

幾何的な配置は忘れてよい。問題になるのは、6 本の道のうちどれが通行可能かということだけである。どの村からも他のすべての村へ行けるのは、通行可能な道が 4 つの村の上で**連結**（connected）なネットワークをなすとき、かつそのときに限る。そこで、通行可能な道の集合を含まれる道の本数で分類し、各本数について連結なものがいくつあるかを数え、それぞれにその確率を掛けて足し合わせる。村が 4 つしかないので、数え上げは短く見通しがよい。

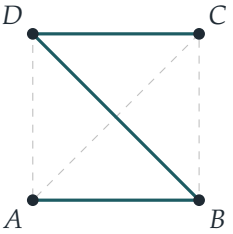
解答

ある道が通行可能である確率を $q = 1 - p$ とおく。雪が降った後、どの村からも他のすべての村へ行けるという事象を K とする。

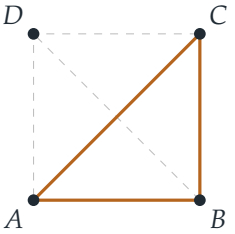
6 本の道は独立にふるまうので、特定の k 本の道が通行可能（残りの $6 - k$ 本は通行止め）である確率は $q^k p^{6-k}$ である。よって

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

となる。ここで N_k は、4 つの村すべてをつなぐ k 本の道の集合の個数である。



道 3 本：全体をつなぐ木



道 3 本：三角形、D が孤立

連結な道の集合を数える

通行可能な道が 2 本以下の場合。各道は 2 つの村を結ぶので、1 つの村から出発すると、道 1 本につき新しい村は高々 1 つしか加わらない。他の 3 つの村すべてに到達するには少なくとも 3 本の道が必要である。よって $N_0 = N_1 = N_2 = 0$ である。

通行可能な道が 3 本の場合。3 本の道の集合は $\binom{6}{3} = 20$ 通りある。そのような集合が村々をつなげないと仮定する。ある村が孤立しているなら、3 本の道はすべて残りの 3 つの村の間にある。しかしその 3 つの村を結ぶ道は 3 本しかないので、その集合はちょうど三角形である。どの村も孤立していないなら、村は 2 組のペアに分かれ、通行可能な道は高々 2 本（各ペアの内部に 1 本ずつ）となり、矛盾する。したがってつながらないのは、孤立する村の選び方に対応する 4 個の三角形だけであり、

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

? **考えてみよう** 通行可能な道が 4 本あれば、ネットワークが連結でなくなることは決してないのはなぜか。

通行可能な道が 4 本以上の場合。先ほどと同じ 2 通りの失敗の仕方を考える。ある村が孤立していれば、通行可能な道はすべて残りの 3 つの村の間になければならないが、そこには道が 3 本しかない。2 組のペアに分かれる場合は、通行可能な道は高々 2 本である。通行可能な道が 4 本以上あれば、どちらも起こりえないので、そのような集合はすべて連結である：

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

確率

以上の個数をまとめると、

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

p のべきで展開すると、同値な形

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

が得られる。

$p = \frac{1}{2}$ の場合

このとき $p = q = \frac{1}{2}$ であるから、道の通行可能・通行止めの $2^6 = 64$ 通りのパターンはすべて同様に確からしく、それぞれの確率は $\frac{1}{64}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- **極端な値。** $p = 0$ のときはすべての道が通行可能で、公式は 1 を与える。$p = 1$ のときはすべての道が通行止めで、公式は $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$ を与える。
- **余事象。** ネットワークが連結でないのは、ある村が孤立しているとき、または村が 2 組のペアに分かれてペア間に道がないとき、かつそのときに限る。ある村が孤立する確率は p^3 である。4 つの村について包除原理（inclusion–exclusion）を用いると（特定の 2 つの村が孤立するには 5 本の道が通行止めである必要があり、3 つの村が孤立するのは 4 つすべてが孤立するときである）、$4p^3 - 6p^5 + 3p^6$ が得られる。ペアへの 3 通りの分け方それぞれについて、両方の内部の道が通行可能である場合が p^4q^2 ずつ加わる。1 からこの合計を引くと上の公式と一致する。実際 $p = \frac{1}{2}$ のとき、連結でない確率は $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$ である。
- **総当たり。** コンピュータで 64 通りの道の集合をすべて列挙すると、個数 $16, 15, 6, 1$ が確かめられる。$p = 0.3$ でのシミュレーションでは 0.893 となり、厳密な値 0.8925 とよく合う。

よくある間違い

- 3 本の道の集合 20 通りすべてを連結と数えてしまい、4 つの三角形を見落とす。
- 4 本の道の集合でも、ある村が孤立しうると思い込む。村が孤立するのは、その村につながる 3 本の道がすべて通行止めのときに限る。
- $q^k p^{6-k}$ を書くときに p（通行止め）と $1 - p$（通行可能）を取り違える。

STEP のその先へ

これは**ランダムグラフ**（random graph）のごく小さな例である。ネットワークの各辺が独立に生き残るとき、結果が連結かどうかを問うのである。p についてのこの多項式はネットワークの**信頼性多項式**（reliability polynomial）と呼ばれ、数 16 はケイリーの公式（Cayley's formula）の一例である。すなわち、ラベル付きの n 個の点を結ぶ木（tree）は n^{n-2} 個ある。大きなネットワークについて、エルデシュ（Erdős）とレーニイ（Rényi）は、道が通行可能である確率がある閾値を超えると、連結性が驚くほど急激に現れることを発見した。独立な事象から作られるランダムな構造についてさらに知りたければ、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 見本問題、第 16 問

確率・統計 ・ 負の二項分布

> **STEP III 見本問題、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q16

鍵となる考え方

r 人の息子を待つことは、まず息子を 1 人待ち、そこからまた改めて次の息子を待つ、ということを r 回繰り返すのと同じである。したがって C は r 個の同じ待ち時間の和に分解でき、あとは期待値の線形性（linearity of expectation）が片づけてくれる。小問 (ii) では、大統領が子どもをもうけるのをやめた後も出生が続くと想像するのがこつである。そうすれば、ある時点までにやめているかどうかは**決まった**人数の子どもについての問題となり、男の子と女の子の間の対称性（symmetry）によって決着がつく。

解答

以下では一貫して、各出生は他のすべての出生とは独立に、確率 $\frac{1}{2}$ で男の子であるとする。

小問 (i)

$i = 1, 2, \ldots, r$ に対して、X_i を $(i-1)$ 番目の息子の後から i 番目の息子までに（i 番目の息子を含めて）生まれた子どもの人数とする（$i = 1$ のときは最初から数える）。すると

$$C = X_1 + X_2 + \cdots + X_r.$$

各 X_i は、新たに始まる独立で公平な出生の列において最初の男の子までの出生数を数えたものであるから、どの X_i も X と同じ分布（distribution）をもつ。ここで

$$\mathrm{P}(X = k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

である。$X = k$ とは、$k-1$ 人の女の子の後に男の子が生まれることを意味するからである。

$\mathrm{E}(X)$ を求めるには、$|x| < 1$ に対する等比級数（geometric series）$\sum_{k\geq 0} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ を微分して $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ を得る。両辺に x を掛けて $x = \frac{1}{2}$ とおくと、

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

これは納得のいく結果である。生まれる赤ちゃんの半数が男の子なら、男の子 1 人を得るまでに平均して 2 回の出生を待つと予想されるからである。

期待値の線形性（これは X_i が独立であってもなくても成り立つが、ここでは実際に独立である）により、

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_r) = 2r.$$

小問 (ii)

限りなく続く赤ちゃんの列の性別があらかじめ独立かつ公平に決められており、大統領はこの列に沿って r 番目の息子に達するまで子どもをもうけると想像する。こう考えても C については何も変わらないが、大統領がそれより早くやめた場合でも「最初の $2r-1$ 人の赤ちゃん」について語ることができるようになる。

考えてみよう 事象 $C < 2r$ を、列の最初の $2r-1$ 人の赤ちゃんだけを用いて表すにはどうすればよいか。

C は整数であるから、$C < 2r$ は $C \leq 2r-1$ を意味する。すなわち、r 番目の息子が $2r-1$ 番目以前に生まれるということである。これが起こるのは、最初の $2r-1$ 人の赤ちゃんの中に男の子が少なくとも r 人いるとき、かつそのときに限る。よって

$$\mathrm{P}(C < 2r) = \mathrm{P}(\text{少なくとも}r\text{ 人の男の子が最初の}2r-1\text{ 人の赤ちゃんの中にいる}).$$

さて、これら $2r-1$ 人の赤ちゃんのうち男の子の人数を B、女の子の人数を G とすると、$B+G = 2r-1$ である。$2r-1$ は奇数なので B と G が等しくなることはなく、ちょうど一方だけが r 以上となる。

- $B \geq r$ ならば $G = 2r-1-B \leq r-1$ である。
- $B \leq r-1$ ならば $G \geq r$ である。

したがって事象 $\{B \geq r\}$ と $\{G \geq r\}$ は互いに排反（mutually exclusive）であり、両者を合わせるとあらゆる場合を尽くす。よって

$$\mathrm{P}(B \geq r) + \mathrm{P}(G \geq r) = 1.$$

ところが、どの出生においても男の子と女の子は等しい確率で生まれるので、「男の子」と「女の子」というラベルを入れ替えてもどの確率も変わらず、$\mathrm{P}(B \geq r) = \mathrm{P}(G \geq r)$ である。ゆえにどちらも $\frac{1}{2}$ であり、

$$\mathrm{P}(C < 2r) = \tfrac{1}{2},$$

となって、示すべきことが示された。

つまり、家族の人数の期待値は $2r$ であるのに、家族の人数が $2r$ より少なくなるのはちょうど半分の場合である。家族の人数の分布は偏っている。$2r$ をわずかに下回る値はよく現れ、ときおり起こる非常に長い女の子の連続が平均を押し上げているのである。

検算

- $r = 1$ のとき：$\mathrm{E}(C) = 2$ であり、$C < 2$ は最初の赤ちゃんが男の子であることを意味し、その確率は $\frac{1}{2}$ である。
- $r = 2$ のとき：$C < 4$ は $C = 2$ または 3 を意味し、その確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$ と $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ で、合計 $\frac{1}{2}$ である。
- $r = 1, \ldots, 8$ について $c\binom{c-1}{r-1}2^{-c}$ を厳密に足し合わせると、いずれの場合も $\mathrm{E}(C) = 2r$ かつ $\mathrm{P}(C < 2r) = \frac{1}{2}$ が得られる。また、$r = 3$ で 200 000 家族のシミュレーションを行うと、平均は 6.00、$\mathrm{P}(C < 6) \approx 0.499$ となった。

よくある間違い

- 「子どもの半分は男の子だから $C = 2r$」と論じること。これは平均としては正しいが、C 自体は確率変数である。小問 (i) では単なる推測ではなく、待ち時間への分解が必要である。
- 小問 (ii) で大統領の実際の子どもだけを考えること。$C < 2r - 1$ のときには $2r - 1$ 人の子どもは**存在しない**。出生の列をやめた時点の先まで延長することによって、はじめてこの数え上げの議論が正当になるのである。
- $2r - 1$ が奇数であることを忘れること。まさにこの事実によって男の子と女の子の同数が排除され、二つの事象が互いに余事象（complementary）となるのである。

STEP のその先へ

C の分布は**負の二項分布**（negative binomial distribution）であり、$c \geq r$ に対して $\mathrm{P}(C = c) = \binom{c-1}{r-1}2^{-c}$ である。確率変数をより単純な部分の和として表し、期待値の線

形性を用いるという手法は、大学 1 年次の確率論において最も強力な道具の一つである。また、小問 (ii) での「待ち時間」を「決まった試行回数の中での個数」に結びつけるこつは、負の二項分布と二項分布を結ぶ双対性（duality）と同じものである（連続時間では、ガンマ分布とポアソン（Poisson）分布を結ぶ双対性にあたる）。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）は、これら両方の考え方を多くの例とともに扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

見本問題解答例. 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

