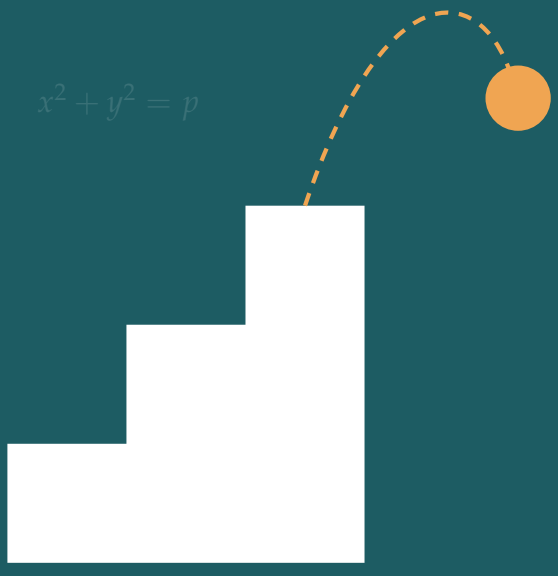
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP II と III

2025 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP II と III

2025 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2025 年解答例

2025 年の STEP 問題（STEP II と III）の全 24 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP II

Q1 区分的に定義された関数 純粋数学 . . . 3
Q2 絶対値を含む複素数の方程式 純粋数学 . . . 8
Q3 累乗の比較 純粋数学 . . . 13
Q4 床関数の恒等式 純粋数学 . . . 18
Q5 置換積分 純粋数学 . . . 22
Q6 放物線に接する円 純粋数学 . . . 26
Q7 非線形微分方程式 純粋数学 . . . 31
Q8 整数の均衡分割 純粋数学 . . . 36
Q9 衝突と放物運動 力学 . . . 40
Q10 剛体棒の静力学 力学 . . . 46
Q11 期待値と二項係数の和 確率・統計 . . . 51
Q12 ポアソン分布 確率・統計 . . . 55

STEP III

Q1 ベータ関数の積分 純粋数学 . . . 60
Q2 関数の反復合成と周期性 純粋数学 . . . 64
Q3 平均の不等式 純粋数学 . . . 70
Q4 曲線の変換 純粋数学 . . . 75
Q5 空間ベクトル 純粋数学 . . . 81
Q6 解の対称式 純粋数学 . . . 85
Q7 逆正接関数 純粋数学 . . . 89
Q8 複素数による三角関数の和 純粋数学 . . . 94
Q9 質量中心 力学 . . . 99
Q10 動く板上の摩擦 力学 . . . 105

Q11 最大値の分布 確率・統計 109
Q12 再帰的に定まる確率変数 確率・統計 113

解答例

STEP II 2025、第 1 問

純粋数学 ・ 区分的に定義された関数

STEP II 2025、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

Min を用いて作られた関数は、区間ごとに異なる式で与えられる普通の関数にすぎない。したがって、まず毎回行うべきことは、二つの引数の大小が入れ替わる点を求め、関数を区分的（piecewise）に書き表し、そのうえで区間ごとに処理を進め、得られた答えのうち、それを導いた式が成り立つ区間に入っているものだけを残すことである。つなぎ目では関数は連続（continuous）であるが、たいていは角（corner）をもつ。そしてこの角こそが、(iv) の点が導関数（derivative）を 0 にすることなく極大（local maximum）となる理由である。

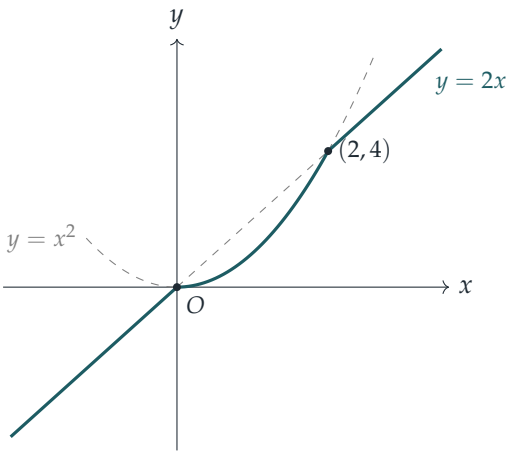
解答

小問 (i)

$x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$ である。よって

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ または } x > 2. \end{cases}$$

グラフは直線 $y = 2x$ に沿っているが、$x = 0$ から $x = 2$ の間だけは放物線（parabola）上に沈み込む。この範囲では放物線はその弦（chord）より下にあるからである。直線部分の二つはいずれも同じ直線上にある。$(0,0)$ では放物線の傾き（gradient）が 0、直線の傾きが 2 であり、$(2,4)$ では傾きがそれぞれ 4 と 2 であるから、これら二点に角がある。



小問 (ii)

(i) で求めた二つの式を用いる。

- $0 \leq x \leq 2$ のとき：$2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$ より $x = 1$ または $x = \frac{3}{2}$ である。どちらも $[0,2]$ に含まれるので、両方とも解である。
- $x < 0$ または $x > 2$ のとき：$4x = 5x - 3 \iff x = 3$ であり、これは $x > 2$ を満たすので解である。

解は $x = 1$、$x = \frac{3}{2}$、$x = 3$ である。

小問 (iii)

二つ目の関数も必要である：$x^3 \leq 4x \iff x(x-2)(x+2) \leq 0 \iff x \leq -2$ または $0 \leq x \leq 2$ である。両者を合わせると

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \leq -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \leq x \leq 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$。

- $x \leq -2$：$x^3 + 2x = 2x$ より $x = 0$ となるが、これは区間に含まれない。
- $-2 < x < 0$ および $x > 2$：$6x = 2x$ より $x = 0$ となるが、これはどちらの区間にも含まれない。

- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$ より $x = 0$ または $x = 1$ である（$x = -2$ は除く）。

よって $m = 2$ のとき、解は $x = 0$ と $x = 1$ である。

考えてみよう 方程式 $6x = 6x$ はどうなるか？

これは**すべての** x について成り立つ。したがって $m = 6$ のときは、孤立した点だけでなく区間全体が解となる。

$m = 6$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$ であり、区間に含まれるのは $x = -2$ のみである。
- $-2 < x < 0$ および $x > 2$：$6x = 6x$ は恒等的に成り立つので、これらの区間のすべての x が解である。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$ より $x = 0$ または $x = 2$ である（$x = -3$ は除く）。

以上をまとめると、$m = 6$ のときの解の集合は

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{または} \quad x \ge 2.$$

小問 (iv)

ここでは $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$ である（因数 x^2 は負にならず、$x = 0$ のときは等号が成り立つ）。よって

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

$x = 1$ ではどちらの式も $y = -3$ を与えるので、曲線はそこで連続であり、点 $(1, -3)$ を通る。

点 $(1, -3)$。 これは停留点（stationary point）ではない。$x = 1$ における左側からの傾きは $6x^2 - 5 = 1$ であり、右側からの傾きは $4x - 5 = -1$ である。より正確に述べると、

- $\sqrt{5/6} < x < 1$ では $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$ であるから、y は -3 まで増加する。
- $1 < x < \frac{5}{4}$ では $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$ であるから、y は -3 から減少する。

したがって $x=1$ の両側の近くのすべての点で $y<-3$ であり、$(1,-3)$ は極大点であって、曲線の角となっている。

その他の極値点。 $x<1$ では、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=6x^2-5=0$ より $x=\pm\sqrt{5/6}=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}$ であり、どちらも 1 より小さい。$2x^2=\frac{5}{3}$ を用いると

$$y=x(2x^2-5)=-\tfrac{10}{3}x=\mp\tfrac{10}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{30}}{6}=\mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=12x$ であるから、$x<0$ の点は極大、$x>0$ の点は極小（minimum）である。$x>1$ では、$4x-5=0$ より $x=\frac{5}{4}$ であり、$y=\frac{25}{8}-\frac{25}{4}=-\frac{25}{8}$ である。放物線は下に凸であるから、これは極小である。よって残りの三つの極値点（turning point）は

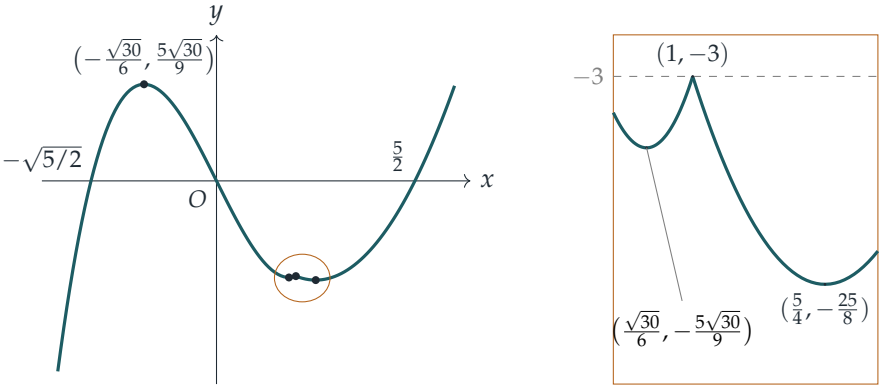
$$\text{極大}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right),\qquad \text{極小}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{ と }\left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

概形。 三次関数 $2x^3-5x$ は奇関数（odd function）であるから、曲線のうち $-1\le x\le 1$ の部分は原点に関して回転対称である。曲線が軸と交わるのは、$x\le 1$ で $x(2x^2-5)=0$ となる点、すなわち $x=0$ と $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$、および $x>1$ で $x(2x-5)=0$ となる点、すなわち $x=\frac{5}{2}$ である。$x\to-\infty$ のとき $y\to-\infty$、$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ である。

$x=1$ の近くにある三点は互いに非常に近いので、その上下関係を確かめておく価値がある。正の数 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ と $\frac{25}{8}$ を二乗すると $\frac{750}{81}\approx 9.26$ と $\frac{625}{64}\approx 9.77$ になるから

$$-\tfrac{25}{8}<-\tfrac{5\sqrt{30}}{9}<-3:$$

すなわち、$x=\frac{5}{4}$ における極小のほうが低く、二つの極小はいずれも角より下にある。適切な縮尺ではこの細部は見えないので、挿入図で拡大して示す。



検算

- (ii)：$x=\frac{3}{2}$ では $\mathrm{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$ であり、$2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$ となる。$x=3$ では $\mathrm{Min}(9,6)=6$ であり、$12=15-3$ となる。
- (iii)、$m=6$：$x=-1$ を試すと $\mathrm{Min}(1,-2)+\mathrm{Min}(-1,-4)=-2-4=-6=6x$ となる。また、解の集合に含まれない $x=1$ では $1+1=2\neq 6$ となる。
- (iv)：$[-3,3]$ 上で 10^{-5} 刻みに y をコンピュータで調べたところ、極値点はちょうど四つ、$x\approx -0.9129$（$y\approx 3.0429$）、0.9129（-3.0429）、1（-3）、1.25（-3.125）に見つかり、上で求めた値と一致した。

よくある間違い

- その式が適用される区間の外にある根を残してしまうこと。たとえば (iii) の $m=2$ における $x=-2$ である。
- $6x=6x$ を、区間全体で成り立つと認識せずに、一つの値を与えるかのように解いてしまうこと。
- (iv) の曲線を $(1,-3)$ で滑らかに描いてしまうこと。そこには本当に角があり、左側の傾きは 1、右側の傾きは -1 である。

STEP のその先へ

$\mathrm{Min}(f,g)=\frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right)$ のような関数は、f と g が連続ならば常に連続であるが、微分可能（differentiable）であるとは限らない。そして (iv) は、極大点が停留点であるとは限らないことを示している。解析学（analysis）の講義では、このことから「**微分可能な**関数の極値（extrema）は導関数が 0 となる点でとられる」という結果の注意深い述べ方や、片側微分係数（one-sided derivatives）へと話が進む。この種の区分的に定義された関数は最適化（optimisation）においても中心的な役割を果たし、そこではいくつかの一次関数の最小値が、線形計画法（linear programming）で調べられる角を生み出す。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、まさにこの種の例を念頭に置いて連続性と微分可能性を扱っている。

解答例

STEP II 2025、第 2 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む複素数の方程式

> **STEP II 2025、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

$z = x + \mathrm{i}y$ とおき、方程式を実部（real part）と虚部（imaginary part）に分ける。絶対値（modulus）は常に実数であるから虚部には何も寄与せず、その結果 z^2（または z^3）の虚部が因数分解（factorisation）できる。この因数分解から、解が複素数平面（Argand diagram）上のどの直線の上になければならないかがわかり、それぞれの直線の上では問題は 1 変数の実数の方程式に帰着する。

解答

小問 (i)

(a) x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とおく。このとき $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$ である。一方、$|z + b|$ は実数であり、a も実数である。$z^2 + |z + b| = a$ の虚部を比較すると

$$2xy = 0,$$

を得る。よって $x = 0$（このとき z は純虚数（purely imaginary））または $y = 0$（このとき z は実数）である。これが示すべきことであった。

(b) y を実数として $z = \mathrm{i}y$ と仮定する。このとき $z^2 = -y^2$、$|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$ であるから、

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

が成り立たなければならない。両辺はともに正であるから、これは両辺を 2 乗した方程式

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

と同値（equivalent）である。左辺はすべての実数 y に対して 6 以上であるから、解は存在しない。すなわち、この方程式は純虚数の解をもたない。

(c) $z = x$ が実数であると仮定すると、$x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$ が成り立たなければならない。$x + \frac{7}{2}$ の符号で場合分けする。

- $x \geq -\frac{7}{2}$ のとき：$x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$、すなわち $x^2 + x + 1 = 0$ であり、その判別式（discriminant）は $1 - 4 = -3 < 0$ である。実数解はない。
- $x < -\frac{7}{2}$ のとき：$x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$、すなわち $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$ である。解 3 と -2 はいずれも条件 $x < -\frac{7}{2}$ を満たさないので、どちらも解ではない。

したがって、実数の解は存在しない。

> **考えてみよう** なぜ $x^2 - x - 6 = 0$ を解いただけで終わりにしてはいけないのだろうか？

それぞれの場合の式は、もとの方程式をその場合の x の範囲においてのみ表している。場合ごとの方程式の解のうちその範囲の外にあるものは、別の方程式（絶対値の中の符号を誤ったもの）の解であるから、捨てなければならない。

(d) ここでは $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ であり、特に $b > 0$ である。

純虚数の解。 $z = \mathrm{i}y$ とおき、$Y = y^2 \geq 0$ と書く。方程式は $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$、すなわち

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

となる。$Y \geq 0$ のとき右辺は正であるから、両辺を 2 乗しても同値な方程式が得られる：

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

$b > \frac{1}{2}$ より $b^2 - \frac{1}{4} > 0$ であるから、$Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$ は確かに正の値であり、

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

は純虚数の解である。

実数の解。 $z = x$ とおき、$|x + b| = x + b$ となる $x \geq -b$ の範囲で解を探す。方程式は

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

となり、その判別式は $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$ である。$b < \frac{3}{4}$ よりこれは正である。大きい方の解

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

をとる。これが範囲 $x \geq -b$ にあることを確かめなければならない。$x_+ \geq -b$ は $\sqrt{3-4b} \geq 1-2b$ と同値であり、$b > \frac{1}{2}$ より右辺は負、左辺は正であるから、これは確かに成り立つ。よって x_+ は実数の解である。

したがって、$\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ のとき、この方程式は少なくとも1つの純虚数の解と少なくとも1つの実数の解をもつ。これが示すべきことであった。(b に関するそれぞれの条件はちょうど一度ずつ使われている。$b > \frac{1}{2}$ は純虚数の解と $x_+ \geq -b$ のために、$b < \frac{3}{4}$ は実数の場合の判別式のために用いた。)

小問 (ii)

$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。このとき

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

である。後者は実数であるから、方程式の虚部は

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

となり、$y = 0$ または $y^2 = 3x^2$ を得る。(幾何学的には、z は実軸上か、直線 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ のいずれかの上にある。これらはちょうど偏角が $\frac{\pi}{3}$ の倍数となる方向であり、z^3 を実数にする方向にほかならない。)

$y = 0$ の場合。 実部から $x^3 + (x+2)^2 = 4$、すなわち

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

を得る。2次式の判別式は $1 - 16 < 0$ であるから、解は $x = 0$ のみであり、$z = 0$ となる。

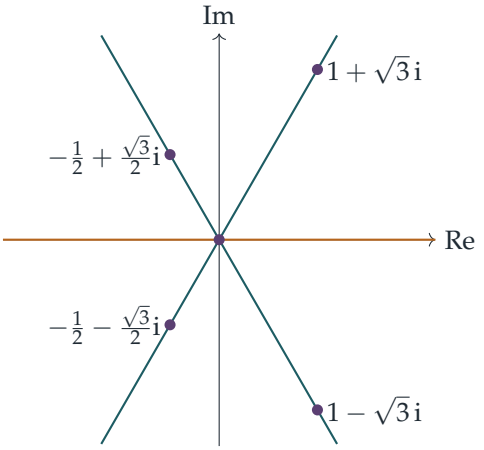
$y^2 = 3x^2$ の場合。 実部の式 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$ に $y^2 = 3x^2$ を代入すると：

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$ のとき $y = 0$ となる。これは再び $z = 0$ である。
- $x = 1$ のとき $y^2 = 3$ であるから、$z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ である。
- $x = -\frac{1}{2}$ のとき $y^2 = \frac{3}{4}$ であるから、$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$ である。

どの段階も同値変形であった(代入と因数分解しか行っていない)から、これらはすべて確かに解である。したがって、この方程式の解はちょうど次の5つである：

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



解は、虚部の条件によって許される 3 本の直線 $y=0$ および $y=\pm\sqrt{3}\,x$ の上にある。

検算

- 極形式（polar form）で表すと $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ であるから $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$ であり、また $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$ である。確かに $-8+12=4$ となる。
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ は 1 の 3 乗根（cube root of unity）であるから $z^3=1$ であり、また $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$ である。確かに $1+3=4$ となる。
- (d) で $b=\frac{5}{8}$ を試すと、$Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$ であり、$-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$ となる。実数の解は $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$ であり、必要どおり $-\frac{5}{8}$ より大きい。
- 小問 (ii) の方程式の解を領域 $|x|,|y|\le 3$ 全体でコンピュータにより探索したところ、上の 5 つの解がちょうど見つかった。

よくある間違い

- $|z+b|$ が虚部をもつかのように扱ったり、$|z+2|^2$ を $(z+2)^2$ として展開したりすること。絶対値の 2 乗は $(x+2)^2+y^2$ であり、実数である。
- (c) や (d) のように、場合ごとの方程式の解が、その場合の適用される範囲にあるかどうかの確認を忘れること。
- (ii) で虚部を y で割ってしまい、実数の解 $z=0$ を見落とすこと。

STEP のその先へ

z と $|z|$（あるいは $\bar{z}$）が混在する方程式は z の多項式ではないので、代数学の基本定理（fundamental theorem of algebra）は解の個数について何も教えてくれない。実際ここでは「3 次方程式」が 5 つの解をもっている。このような方程式は、2 つの実数の未知数に関する 2 つの実数の方程式の組として考えるのが正しい。この見方には大学 1 年次の複素解析（complex analysis）で再び出会うことになる。そこでは、関数が複素数の意味で微分可能であるのは、それが $\bar{z}$ によらず z のみに依存するときに限ることを学ぶ（コーシー・リーマンの方程式（Cauchy–Riemann equations））。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、この幾何学的な描像を生き生きと描き出している。

解答例

STEP II 2025、第 3 問

純粋数学 ・ 累乗の比較

STEP II 2025、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

a^b と b^a（$a, b > 0$）を比べる問題はどれも、対数（logarithm）をとって ab で割れば、$\frac{\ln a}{a}$ と $\frac{\ln b}{b}$ の比較に帰着する。したがって、すべては関数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフに行き着く。このグラフは $x = \mathrm{e}$ でただ一つの山頂まで増加し、その後は減少する。e の同じ側にある二つの数は簡単に比較できるが、反対側にある二つの数を比べるには、$f(2) = f(4)$ という見事な一致のような「踏み石」が必要になる。

解答

以下、$x > 0$ に対して $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ とおく。ln は増加関数であるから、正の a, b に対して

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

が成り立つ。ここで $ab > 0$ で割った。この言い換えをすべての小問で用いる。

小問 (i)

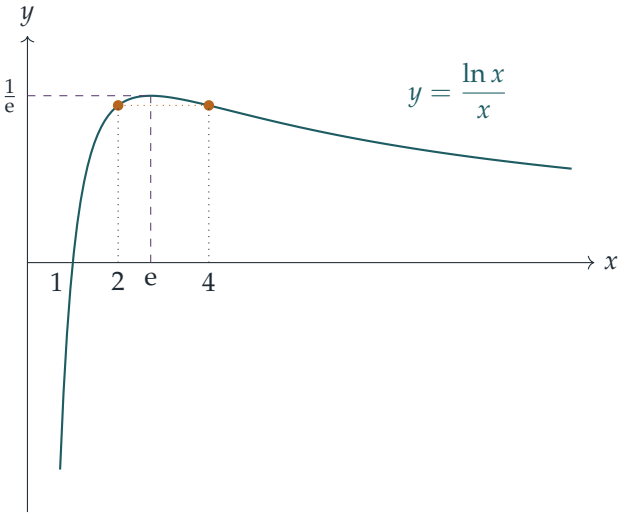
商の微分法（quotient rule）により

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

であり、これは $0 < x < \mathrm{e}$ で正、$x > \mathrm{e}$ で負である。よって f は $(0, \mathrm{e}]$ で狭義単調増加（strictly increasing）、$[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、最大値は $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$ である。

その他の特徴：

- $f(1) = 0$ である。$(0,1)$ で $f < 0$、$(1,\infty)$ で $f > 0$ である。
- $x \to 0^+$ のとき、$\ln x \to -\infty$ かつ $1/x \to +\infty$ であるから $f(x) \to -\infty$ となる。すなわち y 軸は漸近線（asymptote）である。
- $x \to \infty$ のとき、$\ln x$ は x よりゆっくり増加するので $f(x) \to 0^+$ となる。すなわち x 軸は漸近線である。
- もう一度微分すると $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$ となるので、$x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ に変曲点（point of inflection）がある。



琥珀色の点は $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$ を表しており、これを小問 (iii) で用いる。

小問 (ii)

(a) 上の言い換えにより、$3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$ である。3 と π はどちらも e より大きく、f は $[\mathrm{e},\infty)$ で狭義単調減少である。$3 < \pi$ であるから $f(3) > f(\pi)$ となり、したがって $3^\pi > \pi^3$ である。

(b) ここでの不等式は $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{9/4}$ であり、これは $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$ と同値である。今度は二つの数がともに e より小さい。実際 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$ であり、$\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ は $5 < \frac{81}{16}$ からわかる。$(0,\mathrm{e}]$ で f は狭義単調増加であるから、入力が大きいほど値も大きい。よって $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$ となり、示すべきことが得られた。

小問 (iii)

$a = x$、$b = x+2$ とすると、言い換えにより

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

$1 < x < 2$ のとき $x \in (1,2)$、$x+2 \in (3,4)$ であり、二つは e の反対側にあるので、踏み石が必要である。

> **考えてみよう** e の左側の点での f の値と、右側の点での f の値を、どうすれば比べられるだろうか？

二つの琥珀色の点を通る水平線を利用する。$1 < x < 2 < \mathrm{e}$ であり、そこで f は増加するから $f(x) < f(2)$ である。$\mathrm{e} < x+2 < 4$ であり、そこで f は減少するから $f(x+2) > f(4)$ である。さらに $f(2) = f(4)$ であるから

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

よって $f(x) < f(x+2)$ であり、$(x+2)^x$ のほうが大きい。すなわち、$(1,2)$ のすべての x に対して $(x+2)^x > x^{x+2}$ である。

小問 (iv)

最初の不等式の両辺を、3 のべきと $2\sqrt{2}$ のべきに書き直す：

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{\,9} = \left(\sqrt{2}^{\,3}\right)^3 = \left(2\sqrt{2}\right)^3.$$

したがって二つの不等式は左辺どうしも右辺どうしも等しく、同じ主張であるから同値である。

言い換えにより、$3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$ である。$\mathrm{e}^2 < 8$ から（正の平方根をとって）$\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ が得られ、$8 < 9$ から $2\sqrt{2} < 3$ である。よって

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

であり、f は $[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少であるから $f(2\sqrt{2}) > f(3)$ となる。したがって $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$、すなわち

$$\sqrt{2}^{\,9} > 9^{\sqrt{2}}: \quad \text{大きいのは} \sqrt{2}^{\,9}.$$

小問 (v)

$a = \sqrt[3]{3}$ とおく。8^a と a^8、すなわち $f(8)$ と $f(a)$ を比べたい。$a < 2 < \mathrm{e} < 8$ であるから、二つの入力はやはり山頂の反対側にあり、しかも値が近い（$f(a) \approx 0.254$、$f(8) \approx 0.260$）ことがわかるので、小問 (iii) の工夫より精密な方法が必要である。

考えてみよう $f(a)$ と $f(8)$ を、もっと簡単な点での f の値を使って表せないだろうか？

役に立つ恒等式は $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$ である。これにより

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4}f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}f(2).$$

小問 (iv) より $f(3) < f(2\sqrt{2})$ である。$a > 0$ で割ると

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

最後に、両辺を 6 乗すると $9 > 8$ となるので、$a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$ である。よって $2\sqrt{2}\,a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$ であり、$f(2) > 0$ であるから

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

したがって $f(8) > f(a)$ であり、言い換えにより $8^a > a^8$ である。すなわち大きいのは $8^{\sqrt[3]{3}}$ である。

検算

数値的には、$3^\pi \approx 31.54$ に対して $\pi^3 \approx 31.01$、$\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ に対して $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$、$x = 1.5$ のとき $1.5^{3.5} \approx 4.13$ に対して $3.5^{1.5} \approx 6.55$、$9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ に対して $\sqrt{2}^{9} \approx 22.63$、$8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ に対して $\sqrt[3]{3}^{8} \approx 18.72$ である。いずれも上の結論と一致する。(ii) と (iv) では差が小さく、だからこそ大まかな見積もりではなくグラフによる議論が必要なのである。小問 (iii) について、$(1,2)$ 内の 10^5 個の無作為な点でコンピュータによる確認を行ったところ、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- e の反対側にある二点での f の値を、f が単調であるかのように比べてしまう。(iii) と (v) では踏み石が不可欠である。
- $b\ln a > a\ln b$ を ab で割っても不等号の向きが変わらないのは、$ab > 0$ だからこそであることを忘れる。
- (ii)(b) で、$\frac{9}{4}$ と $\sqrt{5}$ のどちらが大きいか、また両方が e より小さいことを正当化しない。

STEP のその先へ

$a \neq b$ のときの方程式 $a^b = b^a$ はちょうど $f(a) = f(b)$ のことであり、$0 < c < 1/\mathrm{e}$ を満たす水平線 $y = c$ はどれもグラフと 2 回交わる。$a < b$ となる解は、$t > 0$ を用いて $a = (1 + \frac{1}{t})^t$、$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$ とパラメータ表示（parametrise）できる。$t = 1$ とすると $(2, 4)$ が得られ、これはこのような正の整数の組としてただ一つのものである。$t \to \infty$ のとき両者はともに e に収束する。これは大学 1 年の解析学における標準的な極限の一つである。このような議論の背後にある単調性と平均値の定理（mean value theorem）の厳密な扱いについては、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照されたい。

解答例

STEP II 2025、第 4 問

純粋数学 ・ 床関数の恒等式

STEP II 2025、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの事実に基づいている。$\lfloor x \rfloor = m$ とは、m が $m \le x < m+1$ を満たす整数であることにほかならない。小問 (i) は、整数のずらしは床関数（floor function）の外へそのまま出せることを述べている。これを用いると、f_n は周期 $\frac{1}{n}$ の周期関数（periodic function）であることがわかるので、短い一つの区間上で考えれば十分であり、そこでは各項を容易に求められる。小問 (iii) は姿を変えた $n = 2$ の場合であり、これによって無限和が打ち消し合って簡単になる（telescope）。

解答

小問 (i)

$m = \lfloor x \rfloor$ とおく。すると m は整数で $m \le x < m+1$ である。整数 n を加えると

$$m + n \le x + n < (m + n) + 1.$$

$m + n$ は整数であるから、$x + n$ を超えない最大の整数である。よって $\lfloor x + n \rfloor = m + n = \lfloor x \rfloor + n$ となり、示された。

小問 (ii)(a)

$\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$ と書く。x を $x + \frac{1}{n}$ に置き換えると、和の各項は一つずつずれる：

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

和の最後の項は $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$ であり、また $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$ である。いずれも $n=1$ とした小問 (i) による。よって

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

小問 (ii)(b)

$0 \le t < \frac{1}{n}$ とする。$0 \le k \le n-1$ に対して

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

であるから $\left\lfloor t+\frac{k}{n}\right\rfloor = 0$ である。また $0 \le nt < 1$ より $\lfloor nt\rfloor = 0$ である。すべての項が 0 であるから、$\mathrm{f}_n(t) = 0$ となる。

小問 (ii)(c)

> **考えてみよう** (a) で許されるのは $\frac{1}{n}$ だけ上へ進むことだけである。$[0, \frac{1}{n})$ より下にある x にはどうやってたどり着けばよいか。

点 $x-\frac{1}{n}$ において (a) を用いると $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(x-\frac{1}{n}\right)$ が得られるので、上だけでなく下へも進める。数学的帰納法（induction）により、正負を問わずすべての整数 m に対して $\mathrm{f}_n\left(x+\frac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(x)$ が成り立つ。

いま任意の実数 x をとり、$m = \lfloor nx\rfloor$ とおくと、$m \le nx < m+1$ である。$t = x - \frac{m}{n}$ とおく。$n > 0$ で割ると $0 \le t < \frac{1}{n}$ を得る。したがって (b) により

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

である。よってすべての x に対して $\mathrm{f}_n(x) = 0$ であり、これは恒等式（identity）

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

にほかならない。

小問 (iii)(a)

(ii)(c) で $n=2$ とし、$\frac{x}{2}$ において値をとると

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

となり、整理すると $\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$ を得る。

小問 (iii)(b)

考えてみよう $+1$ が一つだけ現れる (iii)(a) は、項 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ を扱うのにどう役立つか。

分子と分母を 2^k で割る。$y = x/2^k$ とおくと、x の代わりに y とした (iii)(a) を用いて

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

となる。よって $k = 0, 1, \ldots, K$ の項の和は打ち消し合って

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

となる。$K \to \infty$ のとき $x/2^{K+1} \to 0$ であるが、答えは 0 にどちら側から近づくかによって変わる。

- $x \geq 0$ の場合：$2^{K+1} > x$ となれば $0 \leq x/2^{K+1} < 1$ であるから、最後の床関数の値は 0 であり、それ以降 $S_K = \lfloor x \rfloor$ である。
- $x < 0$ の場合：$2^{K+1} \geq -x$ となれば $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$ であるから、最後の床関数の値は -1 であり、それ以降 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$ である。

いずれの場合も 0 でない項は有限個しかないので、無限和は

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

である。x が非負整数ならば、和は単に x である。

検算

$x = 7$ で試す。各項は $\lfloor 4 \rfloor = 4$、$\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$、$\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$、$\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$ であり、以降の項はすべて 0 である。合計は $7 = \lfloor 7 \rfloor$ となる。$x = -\frac{5}{2}$ で試すと、各項は $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$、$\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$、$\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0$、…となる。和は $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$ であり、負の場合が確かに異なることが確認できる。(ii) については、$n = 3$、$x = 1.5$ とすると $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$ となる。2 万個の無作為な有理数 x と $1 \leq n \leq 30$ の値についてコンピュータで確かめたところ、問題中のすべての恒等式と、打ち消し合った後の部分和が正しいことが確認された。

よくある間違い

- (ii)(c) で (a) を上へ進むためだけに使うこと。これでは $x \geq 0$ は扱えるが、負の x については何も言えない。
- (iii)(b) で、すべての x に対して $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$ と思い込むこと。負の x に対しては 0 ではなく -1 に落ち着く。
- a も b も整数でないのに $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$ と書くこと。小問 (i) は、まさにこれが許される場合を述べている。

STEP のその先へ

(ii)(c) の恒等式はエルミート(Hermite)の恒等式である。これは初等整数論(elementary number theory) の中心をなす床関数に関する一群の結果の一つであり、たとえば $N!$ を割り切る素数 p の最高べきの指数を与えるルジャンドル（Legendre）の公式 $\sum_{k\geq 1} \lfloor N/p^k \rfloor$ もその仲間である。(iii)(b) の和もあるものを数えている。正の整数 x に対して、第 k 項は 1 から x までの整数のうち 2^k で割り切れるが 2^{k+1} では割り切れないものの個数であり、どの整数もちょうど一度ずつ数えられる。これらの考え方が実際に働く様子を見るには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

解答例

STEP II 2025、第 5 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 2025、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで扱う積分はどれも 0 から ∞ までの積分である。$x = u^{-m}$ の形の置換（substitution）は $[0,\infty)$ を自分自身の上に写し、その両端を入れ替える。$\mathrm{d}x$ から出てくるマイナス符号が積分の上端と下端の入れ替わりを打ち消すので、再び $[0,\infty)$ 上の積分にたどり着く。新しい被積分関数（integrand）がもとの被積分関数の符号を反転したものであれば、その積分は自分自身の符号を反転したものに等しくなり、したがって零である。新しい被積分関数が同じ形をした別の被積分関数の定数倍であれば、どちらの積分も計算することなく、二つの積分の間の関係式が得られる。小問 (iii) と (iv) では指数（exponent）を一般のままにしておき、u のべきが打ち消し合うようにそれを選ぶ。

解答

以下を通して、$m > 0$ として $x = u^{-m}$ とおくと、$u \to \infty$ のとき $x \to 0$、$u \to 0$ のとき $x \to \infty$ となるので、

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\left(-mu^{-m-1}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

これを $m = 1$ と $m = 2$ で用い、その後一般の m で用いる。

小問 (i)

求める積分を I とし、$x = u^{-1}$ とおく。積分の上端と下端をもとの順に直すと $\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$ となる。$u > 0$ に対して

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

であり、

$$\sqrt{x}-1 = \frac{1}{\sqrt{u}}-1 = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

したがって

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}}\cdot\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u = -I.$$

積分変数の名前は関係ないので、最後の積分は再び I である。よって $2I = 0$ となり、求めるとおり $I = 0$ が得られる。

これは被積分関数が零であるということではないことに注意しよう。被積分関数は $(0,1)$ 上で負、$(1,\infty)$ 上で正であり、置換によって二つの面積がちょうど対応づけられているのである。

小問 (ii)

今度は $x = u^{-2}$ とおく。積分の上端と下端を並べ直すと $\mathrm{d}x \to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$ となる。$u > 0$ に対して

$$x^3+1 = u^{-6}+1 = \frac{1+u^6}{u^6}, \qquad \sqrt{x^3+1} = \frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}}\cdot\frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

であり、u を x と書き直せば求める結果となる。

小問 (iii)

小問 (i) は $s = 1, p = 3, r = \frac{1}{2}$ の場合であるから、その方法を文字のまま繰り返す。求める積分を J とし、$x = u^{-1}$ とおく。

$$x^s(x^p+1) = u^{-s}\cdot\frac{1+u^p}{u^p} = \frac{u^p+1}{u^{s+p}}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{x^s(x^p+1)} = u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

であり、また $x^r - 1 = (1-u^r)/u^r$ である。よって

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

これを、次のように書いた J そのものと比べる。

$$J = \int_0^\infty \frac{(u^r - 1)\, u^{-s/2}}{\sqrt{u^p + 1}}\, \mathrm{d}u.$$

考えてみよう 何かを計算するのではなく、u のべきを一致させるだけで十分なのはなぜか？

u の二つのべきが一致すれば、置換によって J は $-J$ に変わり、小問 (i) とまったく同様に $J = 0$ となる。よって

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

であればよい。この r の値に対して $J = -J$ が得られるので、$J = 0$ である。（問題文には、p と s は積分が収束（converge）するようなものであると書かれており、$J = -J \Rightarrow J = 0$ という議論に必要なのはそれだけである。）検算として、$s = 1$ と $p = 3$ とすると $r = 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ となり、これは小問 (i) である。

小問 (iv)

小問 (ii) は $k = 2, p = 3, q = 6$ の場合であり、それは $x = u^{-2}$ から得られた。そこで $m > 0$ として $x = u^{-m}$ を試す。このとき $\mathrm{d}x \to m u^{-m-1}\, \mathrm{d}u$ である。$x^p + 1 = (1 + u^{mp})/u^{mp}$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p + 1}} = m \int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\, u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp} + 1}}\, \mathrm{d}u.$$

余分な u のべきは

$$\frac{mp}{2} = m + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 2 + \frac{2}{m},$$

のときに消え、このとき右辺は $q = mp = 2m + 2$ として $m \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q + 1}}$ となる。

ここで $m = k$ とする。任意の $k > 0$ に対して、

$$p = 2 + \frac{2}{k}, \qquad q = 2k + 2$$

と選べば

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p + 1}} = k \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q + 1}}.$$

が成り立つ。$k > 0$ であるから、どちらの指数も 2 より大きい。x が大きいとき被積分関数は $x^{-p/2}$ のようにふるまうので、これはまさにこれらの積分が収束するための条件である。よって、得られた関係式に現れる積分は存在する。$k = 2$ とすると小問 (ii) の $p = 3, q = 6$ が再び得られ、$k = 1$ とすると自明な場合 $p = q = 4$ が得られる。

検算

- 数値的には $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} \approx 2.8044$、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}} \approx 1.4022$ であり、小問 (ii) のとおりちょうど半分になっている。
- 小問 (i) の積分は、負の寄与の大部分が $x = 0$ の近くから来て、正の寄与は $(1,\infty)$ 上に薄く広がっているにもかかわらず、機械精度の範囲で零になる。
- 条件を満たす p と s を無作為に選んでコンピュータで確かめると、$r = s + \frac{p}{2} - 2$ のとき小問 (iii) の積分は零になった。r を 0.3 だけ変えると、明らかに零でない値が得られた。
- $k = \frac{1}{2}$（このとき $p = 6, q = 3$）に対しては、小問 (iv) の関係式は小問 (ii) を逆から読んだものになっており、そうなるべきとおりである。

よくある間違い

- 置換によって積分の上端と下端が入れ替わることを忘れる。$\mathrm{d}x$ から出るマイナス符号と、逆転した積分区間とが打ち消し合うのであり、どちらか一方を落とすと小問 (i) で符号を誤る。
- 小問 (iii) で一般のべきを扱うときに、$u^{-s/2}$ ではなく $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$ と書いてしまう。
- 小問 (iv) で、すべての $k > 0$ の関数として p と q を与えるのではなく、特定の k に対する組 (p,q) を一つ見つけるだけで終わってしまう。

STEP のその先へ

これらの積分はすべて閉じた形（closed form）で計算できる。$t = x^p/(1+x^p)$ と置換すると、$\int_0^\infty (1+x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ は $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ に変わる。ここで B はオイラー（Euler）のベータ関数（Beta function）である。これをガンマ関数（Gamma function）と組み合わせると、小問 (iv) の比が具体的に求められる。積分をその符号を反転したものに写す $x \mapsto 1/x$ という対称性を使う技法は、解析学（analysis）や周回積分（contour integration）において何度も現れる。ここでは省略してよいとされた収束の問題も含め、広義積分（improper integral）の丁寧な扱いについては Abbott の *Understanding Analysis* を参照するとよい。STEP 風の置換の技法をさらに多く知りたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を見るとよい。

解答例

STEP II 2025、第 6 問

純粋数学 • 放物線に接する円

STEP II 2025、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで扱う円はすべて中心が y 軸上にあるので、図形全体が対称（symmetric）であり、「2 点で接する」とは、$x_0 \neq 0$ である鏡像の対 $(\pm x_0, y_0)$ で接することを意味する。接すること（tangency）を最も扱いやすく表すには、法線（normal）が一致すると言えばよい。すなわち、接点へ向かう半径が、もう一方の曲線の法線の方向を向いていなければならない。小問 (i) と (ii) からそれぞれ、中心の高さ a を用いた r^2 の式が得られれば、小問 (iii) は、2 つの根（roots）が a_1 と a_2 である a の二次方程式（quadratic equation）の問題になる。

解答

小問 (i)

円が放物線（parabola）と点 $P = (x_0, y_0)$ で接しているとし、$x_0 \neq 0$ とする。（放物線が $x = 0$ と交わるのは原点のみなので、相異なる 2 つの接点がともに軸上にあることはない。また対称性より、(x_0, y_0) が接点ならば $(-x_0, y_0)$ も接点である。）

P における円の法線は半径の方向 $(x_0,\, y_0 - a)$ を向く。放物線を $2ky - x^2 = 0$ と書くと、その法線は勾配ベクトル $(-2x_0,\, 2k)$ の方向を向く。接するとは、これらが平行であることを意味する：

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

$x_0 \neq 0$ であるから、$y_0 = a - k$ を得る。すると P は放物線上にあるので $x_0^2 = 2ky_0 =$

$2k(a-k)$ であり、P は円上にあるので

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = k(2a-k)$$

となり、示すべき式が得られた。

逆（converse）に、$a > k > 0$ かつ $r^2 = k(2a-k)$ とする。$y_0 = a - k > 0$、$x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$ とおく。作り方から $(\pm x_0, y_0)$ はともに放物線上にあり、また $x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = r^2$ であるから円上にもある。これらの各点において法線 $(\pm x_0, -k)$ と $(\mp 2x_0, 2k)$ は平行であるから、2つの曲線はそこで接線（tangent）を共有する。$x_0 \neq 0$ であるから、円は放物線と相異なる2点で接する。

（確認として、$x^2 = 2ky$ を円の方程式に代入すると $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$、すなわち $(y - (a-k))^2 = 0$ となる。これは重根（repeated root）であり、接することの代数的な目印である。）

小問 (ii)

直線 $y = c + x$、すなわち $x - y + c = 0$ が円に接するのは、中心 $(0, a)$ からこの直線までの距離が r に等しいとき、かつそのときに限る：

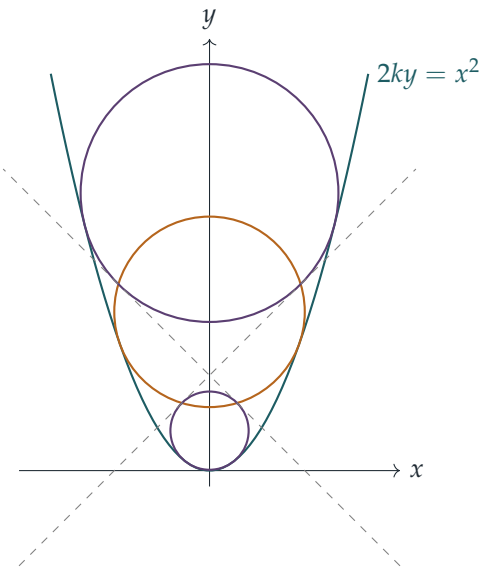
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

直線 $y = c - x$ は y 軸に関する鏡像であるから、同じ条件を与える。

接点は $(0, a)$ から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）である。半径は直線に垂直なので方向 $(1, -1)$ を向く。$(0, a)$ から $t(1, -1)$ だけ移動して $y = c + x$ 上に乗るとすると $a - t = c + t$ となるので、$t = \frac{a-c}{2}$ である。$y = c + x$ との接点は

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

であり、対称性より $y = c - x$ との接点は $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$ である。



$k = 1$、$c = 3$ の場合：放物線、それに接する 2 つの円 C_1、C_2（紫）と直線 $y = 3 \pm x$（破線）、および小問 $(iii)(b)$ の円（琥珀色）。

小問 (iii)(a)

各円は放物線と 2 点で接するので、小問 (i) より $r_i^2 = k(2a_i - k)$ である。また各円は直線 $y = c \pm x$ に接するので、小問 (ii) より $r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$ である。両者を等しいとおくと

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

よって a_1 と a_2 はともに二次方程式 $a^2 - 2(c + 2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$ を満たす。$a_1 \neq a_2$ であるから、これらはこの方程式の 2 つの根であり、したがって

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

すると

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

となり、(a) が示された。

小問 (iii)(b)

小問 (ii) より、C_i 上の接点は $\left(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2}\right)$ である。$u_i = a_i - c$ とおくと見通しがよくなり、接点は $\left(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2}\right)$ となる。

考えてみよう 4点を通る1つの円が必要だが、未知数は d と p の2つしかない。a_1 と a_2 を具体的に求めずに、これらをどう決定すればよいだろうか？

4点は2組の鏡像の対であり、中心が y 軸上にある円はどれも対称であるから、$u = u_1$ と $u = u_2$ に対して円が $\left(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2}\right)$ を通るようにすれば十分である。この条件は

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c-d)\,u + 2(c-d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

である。一方、(a) の二次方程式に $a = u + c$ を代入すると

$$u^2 - 4k\,u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

となり、その根はちょうど u_1 と u_2 であって、$a_1 \neq a_2$ よりこれらは相異なる。円が4点すべてを通るのは、u_1 と u_2 がともに $(*)$ の根であるとき、かつそのときに限る。相異なる同じ2つの根をもつ最高次係数1の二次式（monic quadratic）は一致するので、$(**)$ と係数を比較する（compare coefficients）：

$$2(c-d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

さらに $2(c-d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$ であるから

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

小問 (iii)(c)

小問 (i) の逆を用いる。$d = c + 2k$ のとき

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

であるから、この円は a の代わりに d とした $r^2 = k(2a - k)$ の形にちょうどなっている。あとは $d > k$ を確かめればよい。

考えてみよう (a) でも (b) でも不等式など一切出てこなかったのに、$d > k$ のような不等式はどこから来るのだろうか？

それは、C_1 と C_2 が実際に放物線と2点で接しているという事実から来る。小問 (i) では、2点で接することから、接点は $y_0 = a - k$ かつ（$x_0 \neq 0$ より）$x_0^2 = 2k(a-k) > 0$ を満たさなければならなかった。よって $a_1 > k$ かつ $a_2 > k$ である。これらを加えて (a) を用いると

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

したがって $d > k > 0$ かつ $p^2 = k(2d - k)$ であり、小問 (i) の後半より、円 $x^2 + (y - d)^2 = p^2$ は放物線 $2ky = x^2$ と2点、すなわち $\left(\pm\sqrt{2k(c+k)},\, c + k\right)$ で接する。

検算

$k = 1$、$c = 3$ とする（上の図）。(a) の二次方程式は $a^2 - 10a + 11 = 0$ となるので、$a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$ および 1.258 である。その和は $10 = 2c + 4k$ であり、平方和は $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$ である。小問 (b) より $d = 5$、$p^2 = 9$ となる。円 $x^2 + (y-5)^2 = 9$ と $2y = x^2$ の交点は $2y + (y-5)^2 = 9$、すなわち $(y-4)^2 = 0$ を満たす。これは $y = 4$ における重根なので、(c) の予想どおり $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$ で接する。4 つの接点のそれぞれ、たとえば $\left(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2}\right)$ は、$(0,5)$ から距離 3 のところにある。また、条件を満たす無作為な k と c の数百通りの組について、すべての結果をコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- (i) で、接点が $x_0 \neq 0$ を満たすことを忘れる。これこそが x_0 で割ることを可能にし、また $a > k$ を導くものでもある。
- (iii)(a) で、$r^2 = k(2a - k)$ だけ、あるいは $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$ だけを使う。a の二次方程式は、両方を同時に満たす必要があることから生じる。
- (iii)(c) で、$p^2 = k(2d - k)$ は確かめたが $d > k$ を確かめない。これがないと、その「円」は原点でしか接しないか、まったく接しないかもしれない。

STEP のその先へ

小問 (i) より、中心が y 軸上にあり放物線と 2 回接する円は $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y - k) = 0$ である。これはパラメータ a について 1 次の方程式である。このような族は円束（pencil、あるいは共軸円系（coaxal system））と呼ばれ、C_1、C_2、および (b) の円はすべてこれに属する。法線を一致させることは、曲線どうしの**接触**（contact）という考え方への第一歩である。曲線と 2 次まで接触する円はその曲線の曲率円（circle of curvature）であり、曲線の微分幾何学（differential geometry）の最初の講義で出会うものである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨に沿った STEP 風の座標幾何の問題がさらに多く収められている。

解答例

STEP II 2025、第 7 問

純粋数学 ・ 非線形微分方程式

STEP II 2025、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

右辺 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ はちょうど x^2 の t に関する導関数（derivative）であるから、この方程式はただちに積分できて、一階微分方程式（first-order equation）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$ になる。初期条件によって C が定まり、3 つの小問は C の符号として考えられる 3 通り、すなわち零、正、負に対応している。それぞれの一階方程式は変数分離（separation of variables）でき、粒子のふるまいは得られた式から、あるいは $x^2 + C$ の符号から直接読み取ることができる。

解答

一度積分する

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ であるから、方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right), \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$$

を意味する。ここで C は定数である。$t = 0$ において $x = a$ であるから、C は初速度（initial velocity）から a^2 を引いたものである。3 つの小問ではそれぞれ $C = 0$、$C = p^2$、$C = -q^2$ となる。

小問 (i)

このとき $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$ である。$x \neq 0$ である限り速度は正なので、x は $a > 0$ から増加し、決して 0 に達しない。したがって x^2 で割って変数分離してよい：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{1-at}.$$

t が 0 から $\frac{1}{a}$ に向かって増加するにつれ、粒子は正の向きにどんどん速く動き（速度は x^2 である）、$t \to \frac{1}{a}$ のとき $x \to \infty$ となる。粒子は有限時間 $\frac{1}{a}$ で無限遠へ飛び去り、その時刻より先では解は存在しない。

小問 (ii)

今度は $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$ であり、これは常に正なので変数分離できる：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

$\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$ とおく。$a, p > 0$ であるから、これは $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。すると

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

これは $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$ である間成り立つ。粒子はやはり正の向きに速さを増しながら動き、$pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

のとき $x \to \infty$ となる。ここで $\theta > 0$ に対する $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$ を用いた。したがって粒子は有限時間で無限遠へ飛び去り、その時刻は (i) より早い。初速度が大きいのだから、これは予想どおりである。

小問 (iii)

今度は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

である。$x = \pm q$ で速度は零になるので、この 2 つの位置は平衡点（equilibria）である。$x^2 - q^2$ の符号だけで、すでに話の筋はわかる：粒子は $x > q$ のとき右へ、$-q < x < q$ のとき左へ動く。したがって答えは a と q の大小関係によって決まる。

部分分数分解（partial fractions）$\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$ を用いて変数分離すると

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{定数}.$$

指数をとり、$t=0$ で $x=a$ となるよう定数を定めると、次の形が示唆される：

$$\frac{x-q}{x+q}=Ke^{2qt},\qquad K=\frac{a-q}{a+q},\qquad \text{すなわち}\qquad x=q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

どの場合にも符号が正しいことを確かめるため、これを直接検証する。$E=Ke^{2qt}$ とおくと $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=2qE$ である。このとき

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=q\cdot\frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2}=\frac{4q^2E}{(1-E)^2},\qquad x^2-q^2=q^2\,\frac{(1+E)^2-(1-E)^2}{(1-E)^2}=\frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

となり、両者は一致する。$t=0$ では $1+K=\frac{2a}{a+q}$、$1-K=\frac{2q}{a+q}$ であるから $x=q\cdot\frac{a}{q}=a$ となる。よってこの式は、$1-E\neq 0$ であるところではどこでも解である。なお、$a>0$ であるから $-1<K<1$ であることに注意する。

$a>q$ の場合。 このとき $0<K<1$ であり、$E=Ke^{2qt}$ は K から増加する。粒子は正の速度 a^2-q^2 で動き始め、正の向きにどんどん速く動く。分母 $1-E$ は $e^{2qt}=\frac{1}{K}$ のとき 0 になるので、

$$x\to\infty\quad\text{となるのは}\quad t\to\frac{1}{2q}\ln\frac{a+q}{a-q}.$$

(i) や (ii) と同様に、粒子は有限時間で無限遠へ飛び去る。

$a=q$ の場合。 このとき $K=0$ であり、すべての t に対して $x=q=a$ となる。初速度は 0 であり、加速度 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ も零である：粒子は $x=a$ に静止したままである。

$0<a<q$ の場合。 このとき $-1<K<0$ であるから $E<0$ であり、分母 $1-E>1$ は決して零にならない：解はすべての $t\geq 0$ に対して存在する。

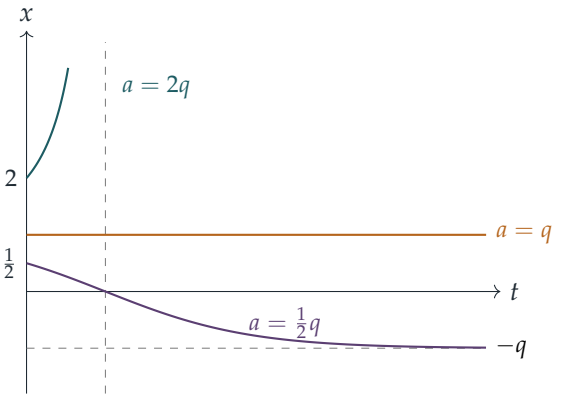
> **考えてみよう** 粒子は原点で止まるのか、それとも通り過ぎるのか。そして最終的にどこへ行き着くのか。

初速度 a^2-q^2 は負であるから、粒子は負の向きに動く。粒子が原点にあるのは $E=-1$ のとき、すなわち $t=\frac{1}{2q}\ln\frac{q+a}{q-a}$ のときであり、そこでの速度は $-q^2\neq 0$ であるから、粒子はそのまま原点を通り過ぎる。$t\to\infty$ のとき $E\to-\infty$ であり、

$$x=q\,\frac{1+E}{1-E}\to -q.$$

となる。全体を通じて $|x|<q$ である（$E<0$ のとき $\frac{1+E}{1-E}\in(-1,1)$ だからである）。したがって速度 x^2-q^2 は負のままであり、粒子は着実に左へ動き、$x=-q$ に決して到達することなく近づいていく。その速さ q^2-x^2 は原点を通過するときに最大値 q^2 をとり、その後は零へと減衰していく。

双曲線関数（hyperbolic functions）を用いると、これらの解は $a > q$ のとき $x = -q\coth\left(qt - \operatorname{arcoth}\frac{a}{q}\right)$、$a < q$ のとき $x = -q\tanh\left(qt - \operatorname{artanh}\frac{a}{q}\right)$ と表される。下図は $q = 1$ として 3 つの場合を描いたものである。



$a = 2q$ と $a = \frac{1}{2}q$ に対して、特別な時刻 $\frac{1}{2q}\ln 3$（破線の縦線）は、それぞれ爆発の時刻と原点を横切る時刻である。

検算

- (ii) で $p \to 0$ とすると、$p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$ かつ $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$ となり、(i) と一致する。$a > q$ の (iii) で $q \to 0$ としても同じことが起こる。
- $x = \frac{a}{1-at}$ を微分すると、$\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$ かつ $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$ である。
- もとの二階方程式を、たとえば $a = 0.5$、$q = 1.4$ として数値的に時間発展させると、$t = 1$ で $x \approx -1.0814$、$t = 3$ で $x \approx -1.3987$ となって式と一致し、また粒子は予測どおり $t \approx 0.2669$ で原点にある。

よくある間違い

- $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ が完全な導関数であることに気づかず、$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ と $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いるような置換を試みること。これでも解けるが、時間がかかる。
- (iii) で対数の中の絶対値（modulus）を落とし、その結果 $a < q$ のときに K の符号を誤ること。
- 平衡の場合 $a = q$ を見落とすこと、あるいは粒子は $-q$ に近づくだけなのに「$-q$ で止まる」と述べること。

STEP のその先へ

ここで見た有限時間爆発（finite-time blow-up）は非線形（nonlinear）方程式の典型的な特徴である：$\dot{x} = x^2$ の右辺はまったく滑らかであるにもかかわらず、その解は限られた時間しか存在しない。これは線形（linear）方程式では決して起こらないことである。小問 (iii) は相直線解析（phase-line analysis）への最初の一歩である：平衡点 $x = q$（不安定（unstable））と $x = -q$（安定（stable））がすべての運動を形づくっており、何かを解く前に $x^2 - q^2$ の符号から運動を予測することができる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、解の存在と一意性（existence and uniqueness）を含め、これら両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP II 2025、第 8 問

純粋数学 ・ 整数の均衡分割

STEP II 2025、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

集合のすべての要素を同じ量 c だけずらすと、その和と平方和は制御された形で変化する。その変化は要素の個数と要素の和だけで決まり、（平方和の場合も）それ以外には依存しない。したがって、同じ大きさの二つの集合の和と平方和がすでに一致していれば、それぞれをずらした複製を作って入れ替えることで、より大きな釣り合った分割（partition）が得られる。小問 (ii) はその背後にある代数であり、小問 (iii) と (iv) はその二通りの応用である。

解答

小問 (i)

$1, 2, \ldots, 8$ の総和は 36、平方の総和は 204 であるから、それぞれの半分は和が 18、平方和が 102 でなければならない。

8 を B に入れる。B の残りの三つの要素は、和が 10 で、平方和が $102 - 64 = 38$ でなければならない。1 から 7 までの相異なる三数で和が 10 となる組は

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

であり、平方和はそれぞれ 54、46、42、38 である。条件を満たすのは $\{2,3,5\}$ のみであるから、

$$A = \{1,4,6,7\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}.$$

検算：$1+4+6+7 = 18 = 2+3+5+8$ かつ $1+16+36+49 = 102 = 4+9+25+64$ である。（この探索から、A と B の入れ替えを除けば、四つずつに分ける釣り合った分割はこれ以外にないこともわかる。）

小問 (ii)

各三乗を二項定理（binomial theorem）で展開すると

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

となり、b_k を a_k に置き換えても同様である。したがって

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

である。mc^3 の項は打ち消し合い、二つずつ現れる $\sum a_k^3$ と $\sum b_k^3$ も打ち消し合うからである。仮定より両方の括弧は 0 であるから、すべての実数 c に対して両辺は等しい。これが示すべきことであった。

一つ低い次数で同じ展開を行うと

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

が得られ、一次の場合は $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$ が成り立つことに注意しよう。どちらも $mc + \sum a_k + \sum b_k$ に等しいからである。

小問 (iii)

(i) の釣り合った分割をとり、a_k が $1,4,6,7$ を、b_k が $2,3,5,8$ を動くものとし、$c = 8$ とする。このとき $c + a_k$ は $9,12,14,15$ を、$c + b_k$ は $10,11,13,16$ を動く。

$$A = \{1,4,6,7\} \cup \{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\} \cup \{9,12,14,15\}.$$

とおく。これらは互いに素であり、それぞれ 8 個の要素をもち、合わせると $\{1,2,\ldots,16\}$ になる。$\{1,\ldots,8\}$ と $\{9,\ldots,16\}$ のそれぞれが両者に振り分けられているからである。

> **考えてみよう** なぜ A をずらした複製ではなく、B をずらした複製を A に入れるのか？

それがまさに (ii) の形だからである。(ii) の左辺は $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$ であり、これはここでの A の三乗和である。右辺はここでの B の三乗和である。よって $c = 8$ とした (ii) から三乗和が等しいことがわかる。(ii) の最後に挙げた二つの恒等式から和と平方和も等しいことがわかるので、この分割は釣り合っている。

直接計算すると、どちらの半分も和は 68、平方和は 748、三乗和は 9248 である。

小問 (iv)

S の要素を $k = 0, 1, \ldots, 11$ に対して $(n+k)^2$ と書く。k の値からなる任意の集合 K に対して

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\, n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

が成り立つ。したがって、$\{0, 1, \ldots, 11\}$ を、**要素の個数**が等しく、和も平方和も等しい二つの集合に分ければ、対応する平方数の総和はすべての n に対して等しくなる。

与えられた $\{1, \ldots, 11\}$ の分割は、和が等しく（ともに 33）、平方和も等しい（ともに 253）が、二つの部分の要素の個数は 6 と 5 である。小さいほうの部分に $k = 0$ を加えればこれが解消される。要素の個数は一つ増えるが、和にも平方和にも何も加わらないからである。そこで

$$\{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \quad と \quad \{0, 2, 6, 7, 8, 10\},$$

を用いる。これらはいずれも要素の個数が 6、和が 33、平方和が 253 である。したがって

$$C = \{(n+1)^2, (n+3)^2, (n+4)^2, (n+5)^2, (n+9)^2, (n+11)^2\},$$
$$D = \{n^2, (n+2)^2, (n+6)^2, (n+7)^2, (n+8)^2, (n+10)^2\}$$

はどちらも要素の和が $6n^2 + 66n + 253$ となる。$n > 0$ より十二個の平方数は相異なるので、C と D は互いに素であり、その和集合は S である。

検算

- (iv) で $n = 1$ とすると、$C = \{4, 16, 25, 36, 100, 144\}$、$D = \{1, 9, 49, 64, 81, 121\}$ であり、どちらも和は $325 = 6 + 66 + 253$ である。
- (iii) において、和 68 と平方和 748 は、1 から 16 までの総和 136 と平方の総和 1496 のちょうど半分である。三乗和 9248 は $136^2 = 18496$ の半分である。
- $1, \ldots, 8$ から四つを選ぶすべての方法をコンピュータで調べると、(i) の分割は入れ替えを除いて一意であることが確かめられる。また (iv) の構成は n が 499 までの場合について確認した。

よくある間違い

- (iv) で、与えられた A と B をそのまま使ってしまうこと。要素の個数が 6 と 5 で異なるので、n^2 の項が打ち消し合わない。欠けている要素 n^2（すなわち $k = 0$）は B の側に入れなければならない。

- (iii) で、ずらす側を間違えること。$\{9,12,14,15\}$（ずらした a_k）を $\{1,4,6,7\}$ と組にしても和と平方和は釣り合うが、三乗和は $2\left(\sum b_k^3 - \sum a_k^3\right) = 2(672-624) = 96$ だけ異なってしまう。

STEP のその先へ

これはプルーエ–タリー–エスコット問題（Prouhet–Tarry–Escott problem）である。すなわち、整数の集合を二つの部分に分けて、$j = 1,\ldots,k$ に対する j 乗和が一致するようにする問題である。(iii) のずらして入れ替える操作を $c = 16,32,\ldots$ として繰り返すと、$\{0,1,\ldots,2^{k+1}-1\}$ のトゥエ–モース（Thue–Morse）分割が得られ、これは k 乗までのすべての冪和を釣り合わせる。その証明は、(ii) の二項展開を数学的帰納法（induction）で行うものである。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、この種の初等整数論のよい手引きとなる。

解答例

STEP II 2025、第 9 問

力学 ・ 衝突と放物運動

STEP II 2025、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

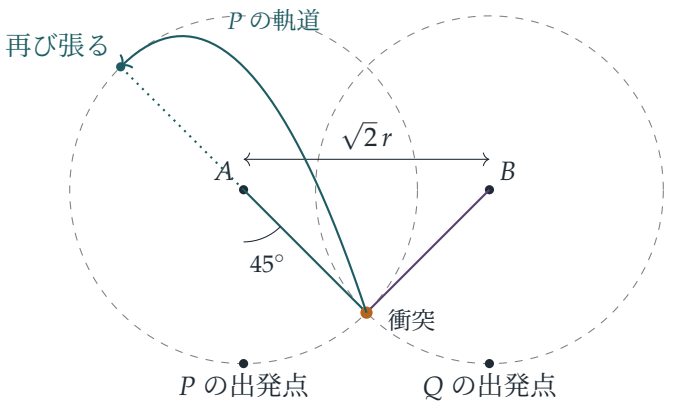
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

対称性がほとんどの仕事をしてくれる。2 つの質点は AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）上で出会うので、衝突するときの位置と速さが決まる。衝突の直後にはそれぞれの糸がたるむので、つり下げ点からの距離が再び r に戻るまで、各質点は通常の放物運動（projectile motion）をする物体である。この距離の条件を書き下すと、t についての四次方程式（quartic）が得られる。三重根（triple root）には物理的な意味がある。質点は円に沿う向きに進みながら円周に達するので、糸は衝撃なしに張るのである。

解答

モデル：P と Q は質量 m の質点（衝突については小さくなめらかな球）であり、糸は軽く伸び縮みせず、空気抵抗はないとする。P を左側に置いて A からつり下げ、A を通り、x 軸を水平（B に向かう向き）、y 軸を鉛直上向きにとる。



図は、小問 (iv) の特別な場合における衝突後の P の飛行を示している。このとき P は、反対側の水平より 45° 上の点で自分の円に戻る。

小問 (i)

設定は AB の垂直二等分線に関して対称なので、2 つの質点はその上で出会う。このとき各質点は最下点から水平に $\frac{1}{2}\sqrt{2}r = r\sin 45°$ だけ移動しているので、各糸は鉛直下向きと 45° の角をなす。各質点は $r - r\cos 45° = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ だけ上昇している。この点までは糸は張っており、その張力（tension）は仕事をしないので、エネルギー保存則（conservation of energy）により、衝突直前の速さ v は

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

を満たす。（質点がここまで到達するためには $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$ が必要である。）

各質点は水平と 45° の角をなして自分の円に沿って運動しているので、

$$\text{速度}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{速度}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

である。2 つの質点は同じ高さで出会うので、中心を結ぶ直線は水平であり、両者の間にはたらく力積（impulse）も水平である。したがって速度の鉛直成分は変わらない。水平方向では運動量（momentum）は大きさが等しく向きが逆なので、合計は衝突の前後ともに 0 である。するとニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、各質点は近づく速さの e 倍ではね返る。衝突の直後には

$$\text{水平方向の速さ} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{鉛直成分} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\text{（上向き）},$$

であり、P は Q から遠ざかる向き、すなわち左向きに運動している。

? **考えてみよう** 衝突の間に、糸も力積を及ぼしうるだろうか。

及ぼさない。糸は引くことしかできず、しかも糸に沿った向きにしか引けない。衝突の直後、P は A に対して $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ の位置にあり、速度は $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$ である。その $\overrightarrow{AP}$ 方向の成分は $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$ なので、P は A に近づく向きに運動している。糸はただちにたるみ、衝撃的な張力が必要になることはない。

小問 (ii)

t を衝突の瞬間から測る。糸が再び張るまで P は放物運動をするので、A に対して

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。糸が張るのはちょうど $x^2 + y^2 = r^2$ のときである。$\sqrt{2}\,x$ と $\sqrt{2}\,y$ が現れるように 2 を掛けると

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

が得られる。これは衝突の瞬間にまだ糸が張っている $t = 0$ で成り立つので、求める時刻は 0 でない根である。対称性により、Q も同じ瞬間に同じことになる。2 つの質点は水平方向に互いに離れていくので、その前に再び衝突することはない。

小問 (iii)

展開して $2r^2$ を消去すると

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4 - \sqrt{2}\,gv\,t^3 + \left((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\right)t^2 - 2(1+e)rv\,t = 0.$$

となる。$t \neq 0$ で割ると三次方程式が残る。ここで

$$\frac{z}{c} = \frac{vt}{r} \cdot \frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \frac{gt}{\sqrt{2}\,v}, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{\sqrt{2}\,v}{g} \cdot \frac{z}{c}.$$

である。これを代入し、三次方程式全体を $\sqrt{2}\,v^3/g$ で割る。$w = z/c$ と書くと、各項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3, \\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2, \\
\left((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\right)t &\longrightarrow \left(1 + e^2 + \frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\right)w = \left(\frac{2}{c} + 1 + e^2\right)w, \\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e) = -\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{2}{c} = \dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$ を用いた。これが求める方程式

$$\left(\frac{z}{c}\right)^3 - 2\left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{2}{c} + 1 + e^2\right)\left(\frac{z}{c}\right) - \frac{2}{c}(1+e) = 0.$$

である。

小問 (iv)

w についての三次方程式が三重根 α をもつならば、それは $(w-\alpha)^3 = w^3 - 3\alpha w^2 + 3\alpha^2 w - \alpha^3$ でなければならない。係数を比較すると

$$3\alpha = 2, \qquad 3\alpha^2 = \frac{2}{c} + 1 + e^2, \qquad \alpha^3 = \frac{2}{c}(1+e).$$

である。よって $\alpha = \frac{2}{3}$ である。$k = 2/c$ とおく。すると $k = \frac{4}{3} - 1 - e^2 = \frac{1}{3} - e^2$ であり、最後の式は

$$\left(\tfrac{1}{3} - e^2\right)(1+e) = \tfrac{8}{27} \iff 27e^3 + 27e^2 - 9e - 1 = 0 \iff (3e-1)(9e^2+12e+1) = 0.$$

となる。二次の因数の根は $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$ であり、どちらも負なので、反発係数（coefficient of restitution）にはなりえない。したがって $e = \frac{1}{3}$ である。すると $k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ なので $c = 9$ であり、

$$v^2 = \frac{c\,rg}{\sqrt{2}} = \frac{9rg}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

となって、示すべき結果が得られる。

考えてみよう 重根は運動について何を語っているのだろうか。

$D(t) = x^2 + y^2 - r^2$ とおく。正の因子を除いて、D は $w(w-\alpha)^3$ に等しい。これは $0 < w < \alpha$ で負なので、糸が張るまで P は自分の円の厳密に内側にとどまる。α は重根なので、そこでは $D' = 0$ でもある。ところが $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$ なので、その瞬間の速度の糸方向の成分は 0 である。つまり質点は円に沿う向きに運動しながら到達する。衝撃的な張力は糸に沿ってはたらき、速度の糸方向の成分を取り除くためにしか必要にならない。ここではそのような成分がないので、力積は生じず、速度は変化せず、運動エネルギーも失われない。

小問 (v)

エネルギーが失われるのは衝突のときだけである。衝突から円の最下点までの間、仕事をするのは重力だけである。飛行中は張力がなく、糸の張り方は衝撃を伴わず、その後は張力が運動の向きに垂直だからである。衝突の直後、速さの 2 乗は

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

であり、質点は最下点より $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ だけ上にある。したがって

$$U^2 = \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\,rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}\,rg.$$

である。

下降の途中で糸が張ったままであることも確かめておくべきである。$w = \frac{2}{3}$ のとき $t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$ である。これを代入すると、位置は $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$、速度は $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$ となる。よって P は、B と反対側の水平より 45° 上の点で、速さの 2 乗 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$ で自分の円に戻る。そこで A に向かう向きに力を分解すると

$$T + mg\sin 45^\circ = \frac{m}{r} \cdot \frac{rg}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad T = 0,$$

となるので、糸は張力 0 で張る。P が振れ下がるにつれて速さは増し、重力の内向き成分は減るので、それ以降は $T > 0$ である。質点は円に沿って最下点まで進み、この点から測ったエネルギーからも同じ U^2 の値 $\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$ が得られる。

検算

- $r = 1$、$g = 9.81$ として、飛行と円運動の振れをコンピュータで逐次的に数値シミュレーションしたところ、$U^2 \approx 40.430$ が得られた。これは $\frac{1}{2}(4 + 3\sqrt{2})g \approx 40.430$ と一致し、振れの間ずっと張力は非負であった。
- U^2 を求める 2 つの方法（衝突点からと、糸が張る点から）の結果は一致する。
- $e = 1/3$、$c = 9$ ならば、$w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$ が厳密に成り立つ。

よくある間違い

- 上昇した高さを $r - r\cos 45^\circ$ ではなく $r\cos 45^\circ$（つり下げ点からの深さ）としてしまう。
- 反発の法則を速度全体に適用してしまう。影響を受けるのは中心を結ぶ直線方向（ここでは水平方向）の成分だけである。
- e についての三次方程式の負の根を除外し忘れる。

STEP のその先へ

重根の条件は、2 つの曲線（放物運動の放物線と円）が高い次数で接することを意味している。すなわち、両者は出会い、接線を共有し、ここでは曲率（curvature）まで共有する。糸が張るときに張力がちょうど 0 になるのはこのためである。接触の次数（order of contact）や接触円（osculating circle）は、大学 1 年次の曲線論や微分幾何学

（differential geometry）の講義で登場する。衝撃的な拘束と、それがエネルギーを散逸させるのはどのような場合かという問題は、力学の標準的な話題である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方の展開を見るのによい本である。

解答例

STEP II 2025、第 10 問

力学 ・ 剛体棒の静力学

STEP II 2025、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

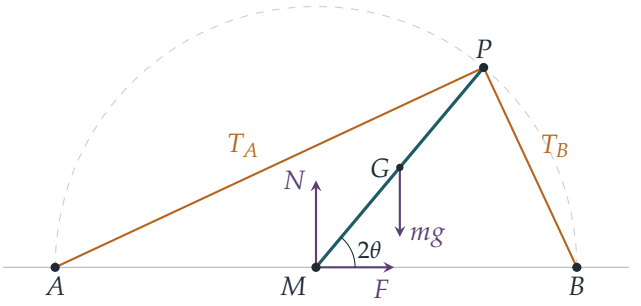
鍵となる考え方

$MA = MB = MP = a$ であるから、点 P は AB を直径とする円の上にある。この一つの観察がすべてを動かす。これにより P における角が直角であること、θ を用いた糸の長さ、そして各糸が棒となす角が得られる。フックの法則（Hooke's law）によれば張力（tension）は $\lambda(\text{長さ} - \ell)/\ell$ であり、これは自然に「$\lambda \times$ 長さ$/\ell$」の部分と定数「$-\lambda$」の部分に分かれる。この分け方こそが (i) で求められている分解である。その後は、うまく選んだ点のまわりのモーメント（moment）を考えることで、不要な力を消去する。

解答

棒は一様な剛体の棒とし、その重さ mg が中点 G にはたらくものとする。また、糸はフックの法則に従う軽い弾性糸（elastic string）とする。M を原点にとり、$B = (a, 0)$、$A = (-a, 0)$ とすると、

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$



（図中の摩擦力 F の向きが正しいことは小問 (iii) で示す。）

小問 (i)

$MA = MB = MP = a$ であるから、点 P は中心 M、直径 AB の円の上にある。半円に対する円周角の定理（angle in a semicircle）により、$\angle APB = 90^\circ$ である。

糸の長さ。三角形 MPA は $MP = MA$ の二等辺三角形（isosceles triangle）で、頂角は $\angle PMA = 180^\circ - 2\theta$ であるから、底角は $\angle MPA = \angle MAP = \theta$ である。同様に三角形 MPB の頂角は 2θ であるから、$\angle MPB = 90^\circ - \theta$ である。斜辺が $AB = 2a$ で $\angle PAB = \theta$ の直角三角形 APB において、

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

$\theta < 45^\circ$ より $PB < PA$ である。どちらの糸も張っているので、$2a\sin\theta > \ell$ である。

力の分解。P から A、B へ向かう単位ベクトル（unit vector）をそれぞれ $\mathbf{u}_A$、$\mathbf{u}_B$ とする。フックの法則により糸 PA の張力は $\lambda(PA - \ell)/\ell$ であるから、この糸が P において棒に及ぼす力は

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

であり、PB についても同様である。二つを加えると、

$$\text{糸の力の合計} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

ここで M は AB の中点であるから $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$ であり、$|\overrightarrow{PM}| = a$ である。よって第 1 項は、棒に沿った（M へ向かう）大きさ $2a\lambda/\ell$ の力である。

第 2 項については、$\mathbf{u}_A$ と $\mathbf{u}_B$ は互いに垂直な単位ベクトルである（P における角が直角だから）。したがって $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$ は単位正方形の対角線であり、長さは $\sqrt{2}$、向きは $\angle APB$ の二等分線（bisector）に沿う。ゆえに $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$ は $\angle APB$ の二等分線に沿った（AB から遠ざかる向きの）大きさ $\sqrt{2}\lambda$ の力である。これが求める分解である。

小問 (ii)

M のまわりのモーメントを考える。そこにはたらく摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）のモーメントは 0 である。反時計回りを正とする（B は右側にあるものとする）。

考えてみよう M から各糸の直線までの距離はいくらか。

直線 PA は PM と角 $\angle MPA = \theta$ をなし、$PM = a$ であるから、M から直線 PA までの距離は $a\sin\theta$ である。同様に、M から直線 PB までの距離は $a\sin(90^\circ - \theta) = a\cos\theta$ である。重さは M から右へ水平距離 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ の位置にはたらく。

糸 PA は P を A の方へ引く（M のまわりに反時計回り）。PB と重さは棒を時計回りに回す。張力を T_A、T_B と書くと、

$$T_A\, a\sin\theta \;=\; T_B\, a\cos\theta + mg\cdot\tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

$T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$、$T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$ を用いると、

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\bigl(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\bigr) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

（棒に沿った力は M のまわりのモーメントをもたないので、これはちょうど二等分線方向の力 $\sqrt{2}\lambda$ のモーメントにほかならない。）よってモーメントの式は

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

となる。$0 < \theta < 45^\circ$ より $\cos\theta - \sin\theta > 0$ であるから、これで割ってよく、

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ の範囲。 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$ と書く。棒は地面に対して傾いているので $0 < \theta < 45^\circ$ であり、$45^\circ < \theta + 45^\circ < 90^\circ$ となる。この範囲で sin は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ から 1 まで狭義単調増加する。よって

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

であり、これがこのようなつり合い（equilibrium）のための必要条件である。

小問 (iii)

> **考えてみよう** どの点を選べば、二つの糸の力がともにモーメントの式から消えるか。

二つの糸はともに P にはたらくので、P のまわりのモーメントを考える。すると現れるのは重さと、M における地面からの二つの力だけである。P から見て、点 M は水平方向に $a\cos 2\theta$（左へ）、鉛直方向に $a\sin 2\theta$（下へ）の位置にあり、G はそれぞれその半分の位置にある。

摩擦力 F が B の向きにはたらくと仮定する（これは後で確かめる）。P のまわりで、

- N（M において上向き、P の左側）の時計回りのモーメントは $Na\cos 2\theta$ である。
- F（M において B の向き、P の下側）の反時計回りのモーメントは $Fa\sin 2\theta$ である。
- mg（G において下向き、P の左側）の反時計回りのモーメントは $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ である。

つり合いより、

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

$2\theta < 90^\circ$ より $\cos 2\theta > 0$ であり、$a\cos 2\theta$ で割ると

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

となり、示すべき式が得られる。

摩擦力の向き。水平方向に分解すると、F は糸の力の水平成分とつり合う。(i) より $\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$、$\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$ であり、$\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$ であるから、糸の力の水平成分は $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$ である。よって B の向きの摩擦力は

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

であり、$2a\sin\theta > \ell$（両方の糸が張っている）より、これは正である。したがって摩擦力は確かに B の向きにはたらき、F はその大きさである。

検算

- (ii) の極限は理にかなっている。$\theta \to 0$ のとき棒はほぼ水平に寝て $\lambda \to \frac{1}{2}mg$ となり、$\theta \to 45^\circ$ のとき棒は鉛直になって $\lambda \to mg/\sqrt{2}$ となる。
- 数値で確かめる。$a = 1$、$mg = 10$、$\theta = 20^\circ$、$\ell = 0.5$ とすると、$\lambda = 5(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \approx 6.408$、張力は $T_A \approx 17.68$、$T_B \approx 2.36$ であり、力を分解すると $N \approx 18.26$、$F \approx 15.81$ となるので、$N - F\tan 40^\circ \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$ である。M のまわりのモーメントもつり合っている。数千通りのランダムな配置についてコンピュータで確かめたところ、すべての結果が丸め誤差の範囲で成り立った。

よくある間違い

- 張力を $\lambda\times$ 伸び$/\ell$ ではなく $\lambda\times$ 伸び としてしまう。
- $\theta < 45^\circ$ よりそれらが正であることに触れずに、$\cos\theta - \sin\theta$ や $\cos 2\theta$ で割ってしまう。

- (iii) で M のまわりのモーメントを考えてしまう。これでは求めたい力である N と F がまさに消えてしまう。P のまわりのモーメントを考えれば、代わりに糸の力が消える。

STEP のその先へ

(i) の分解は、一般的な事実のきれいな一例である。剛体（rigid body）にはたらく力の集まりは、一つの力と一つの偶力（couple）に等価であり、モーメントが最も計算しやすくなるように力を自由にまとめてよい。ここでの「糸 1 本あたり $-\lambda$」の部分は、張力が一定の 2 本の糸のようにふるまい、その合力は幾何学的な配置だけで決まる。剛体の静力学、仮想仕事（virtual work）、つり合いの安定性については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で展開されている。

解答例

STEP II 2025、第 11 問

確率・統計　・　期待値と二項係数の和

STEP II 2025、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらのゲームも最初の $2k$ が出た時点で終わるので、それぞれの量は振った回数 r についての和になる。アリの場合、和は幾何級数（geometric series）に近い形をしており、小問 (i) は振る回数の期待値（expected value）を求めるのにちょうど役立つ道具である。ゼンの場合、勝つゲームは $2k$ より前に**どの**数が現れるかによって決まる。集合がわかれば、増加する順序は一通りに定まってしまうからである。このような集合を数えると二項係数（binomial coefficients）が現れ、和は小問 (iii) のものになる。

解答

小問 (i)

$|x| < 1$ のとき、幾何級数により

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}.$$

べき級数（power series）はその収束区間（interval of convergence）の内部で項別に微分（term-by-term differentiation）できるので、両辺を x で微分すると

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

1 回の試行で起こる結果は 3 種類ある。

$$\mathrm{P}(\text{出た目が}2k) = \frac{1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{偶数かつ非}2k) = \frac{k-1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{奇数}) = \frac{1}{2}.$$

振った回数を R とする。アリが $R = r$ で勝つのは、ちょうど $1, \ldots, r-1$ 回目の目が $2k$ 以外の偶数で、r 回目の目が $2k$ であるときである。各回の試行は独立（independent）なので、$x = \dfrac{k-1}{2k}$ とおくと

$$\mathrm{P}(\text{アリが勝ち、かつ}R = r) = \frac{1}{2k}\, x^{r-1}.$$

(a) 幾何級数を和をとると（$0 \le x < 1$ に注意）

$$\mathrm{P}(\text{アリが勝つ}) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

これをすばやく確かめる方法もある。$2k$ 以外の偶数は結果に影響しないので無視する。するとゲームは、奇数と $2k$ のどちらが先に出るかで決まる。奇数の面は k 個、$2k$ の面は 1 個あり、どれも等しい確率で出るので、$2k$ が先に出る確率は $\frac{1}{k+1}$ である。

(b) アリは $R = r$ で勝てば £r を得て、そうでなければ何も得ない。よって小問 (i) により

$$\mathrm{E}(\text{アリの獲得額}) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \frac{1}{2k}\, x^{r-1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \text{ ポンド.}$$

小問 (iii)

与えられた式を S とおく。その一般項は $r = 0, 1, \ldots, n$ に対して $(r+1)\binom{n}{r}x^r$ である。因子 $r+1$ は x^{r+1} を微分することを示唆している。

$$S = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r} x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{r+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x(1+x)^n\Big),$$

ここで二項定理（binomial theorem）を用いた。積の微分法則（product rule）により

$$S = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}\big(1 + (n+1)x\big).$$

小問 (iv)

ゼンがちょうど r 回振って勝つとする。最後の目は $2k$ であり、最初の $r-1$ 回の目は $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ の中の狭義単調増加（strictly increasing）な数の列である。（ゲームは最初の $2k$ で終わるので、これらはいずれにせよすべて $2k$ 未満でなければならない。）

考えてみよう 長さ r の勝ちとなる列はいくつあるか。

狭義単調増加な列は、どの数が現れるかがわかれば決まってしまう。相異なる数の集合を増加順に並べる方法は一通りしかないからである。したがって、長さ r の勝ちとなる列は、$\{1,\dots,2k-1\}$ の $(r-1)$ 個の元からなる部分集合（subset）と一対一に対応する。そのような部分集合は $\binom{2k-1}{r-1}$ 個あり、$1 \le r \le 2k$ である。

r 回の目からなる特定の列が出る確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{2k}\right)^r$ である。よって

$$\mathrm{E}(\text{ゼンの獲得額}) = \sum_{r=1}^{2k} r\binom{2k-1}{r-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^r = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{2k-1}(j+1)\binom{2k-1}{j}\left(\frac{1}{2k}\right)^j,$$

ただし $j = r-1$ である。これは小問 (iii) の和で $n = 2k-1$、$x = \frac{1}{2k}$ としたものであり、このとき $1+(n+1)x = 1+2k\cdot\frac{1}{2k} = 2$ となる。したがって

$$\mathrm{E}(\text{ゼンの獲得額}) = \frac{1}{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot 2 = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \text{ ポンド.}$$

小問 (v)

ゼンの獲得額の期待値をアリのもので割ると

$$\rho = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot\frac{(k+1)^2}{2k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2}.$$

ここで k を大きくする。すると

- $\dfrac{(k+1)^2}{k^2} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2 \approx 1$；
- $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^2 \approx 1$；
- $n = 2k$ として与えられた近似式を用いると、$\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k} \approx \mathrm{e}$。

よって

$$\rho \approx \frac{\mathrm{e}}{2} \approx \frac{2.71828}{2} = 1.359\dots,$$

となり、k が大きいとき、ゼンの獲得額の期待値はアリのもののおよそ 1.359 倍、すなわち 35% より少し多いことになる。これが示すべきことであった。

検算

- $k = 1$ のとき、さいころは面が 1, 2 の硬貨である。アリが勝つのは最初の目が 2 のときだけで、その確率は $\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1}$ であり、そのとき £1 を得るので、獲得額の期待値は $\frac{1}{2} = \frac{2k}{(k+1)^2}$ となる。ゼンが勝つのは列 2（確率 $\frac{1}{2}$、獲得額 £1）と列 1, 2（確率 $\frac{1}{4}$、獲得額 £2）のときなので、獲得額の期待値は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ である。公式とも一致する。$k = 1$ のとき指数 $2k - 2$ は 0 なので、公式は $\frac{1}{1} \cdot 1 = 1$ を与える。
- $k = 3$ のとき、アリの獲得額の期待値は $\frac{3}{8}$、ゼンのものは $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^4 = \frac{2401}{3888} \approx 0.618$ である。どちらも、勝ちとなる列をすべて直接数え上げた結果とも、ゲームのコンピュータシミュレーションとも一致する。
- 比 ρ は $k = 10$ でおよそ 1.456、$k = 100$ で 1.369、$k = 10^4$ で 1.3592 である。これは $\mathrm{e}/2 = 1.35914\ldots$ に向かって減少している。

よくある間違い

- 小問 (iv) で、部分集合ではなく階乗を使って順序付きの列を数えてしまう。各集合を増加順に並べる方法は一通りしかない。
- ゼンのゲームで、それ以前の目に $2k$ が含まれ得ないことを忘れる。このため範囲は $\{1, \ldots, 2k-1\}$ となり、$n = 2k - 1$ であって $2k$ ではない。
- 小問 (ii) で、続行する確率として $\frac{k-1}{2k}$ ではなく $\frac{k}{2k}$ を使ってしまう。目 $2k$ は偶数だが、ゲームを終わらせる。

STEP のその先へ

小問 (iii) は**母関数**（generating functions）の小さな例である。数列をべき級数の係数として表し、その級数に微積分を用いるのである。確率母関数（probability generating functions）はこれをさらに推し進める。$G(s) = \mathrm{E}(s^X)$ とすると $\mathrm{E}(X) = G'(1)$ であり、これはまさにここで 2 度用いた微分の技法である。極限 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ は確率論のいたるところに現れ、たとえば二項分布のポアソン近似（Poisson approximation）にも登場する。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、母関数についての優れた章がある。

解答例

STEP II 2025、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン分布

STEP II 2025、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ポアソン分布（Poisson distribution）では、隣り合う確率の比が $p_r/p_{r-1} = \lambda/r$ という簡単な形になる。したがって、どの差分（difference）d_r も、既知の確率と r の簡単な有理式の積として書ける。d_r の符号から p_r がどこで増加しどこで減少するかがわかる。さらに一段進めると、**二階差分**（second difference）$d_{r+1} - d_r$ の符号から d_r がどこで増加しどこで減少するかがわかり、その符号は r の 2 次式で決まる。一見扱いにくそうな数 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ は、その 2 次式の根（に 1 を加えたもの）にすぎない。

解答

以下では常に $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$ である。よって $r \geq 1$ に対して

$$p_r = \frac{\lambda}{r}\, p_{r-1}, \qquad p_{r-1} = \frac{r}{\lambda}\, p_r,$$

が成り立ち、どの p_r も真に正である。

小問 (i)

$r \geq 1$ に対して

$$d_r = p_r - p_{r-1} = p_{r-1}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) = \frac{p_{r-1}}{r}\,(\lambda - r).$$

$p_{r-1}/r > 0$ であるから、d_r の符号は $\lambda - r$ の符号と一致する。また λ は整数でないので、d_r が 0 になることはない。λ より小さい最大の整数を $m = \lfloor \lambda \rfloor$ とおくと、$\lambda - 1 < m < \lambda$ である（$\lambda \notin \mathbb{Z}$ なので、どちらの不等式も等号を含まない）。このとき

- $1 \leq r \leq m$ では $r < \lambda$ なので $d_r > 0$ であり、$p_0 < p_1 < \cdots < p_m$ となる。

▶ $r \geq m+1$ では $r > \lambda$ なので $d_r < 0$ であり、$p_m > p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots$ となる。

（$\lambda < 1$ のときは $m = 0$ であり、一つ目の列は空である。）したがって、$r \neq m$ であるすべての r について $p_r < p_m$ が成り立つ。すなわち m は最も起こりやすい値としてただ一つに定まり、$\lambda - 1 < m < \lambda$ である。

小問 (ii)

次に、d_r 自体がどう変化するかを調べる。$r \geq 1$ に対して $e_r = d_{r+1} - d_r = p_{r+1} - 2p_r + p_{r-1}$ とおく。すべてを p_r で表すと

$$e_r = p_r\left(\frac{\lambda}{r+1} - 2 + \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{p_r}{\lambda(r+1)}\Big(\lambda^2 - 2\lambda(r+1) + r(r+1)\Big).$$

前の係数は正であるから、e_r の符号は

$$Q(r) = r^2 + (1-2\lambda)r + \lambda^2 - 2\lambda.$$

の符号と一致する。この 2 次式の判別式（discriminant）は $(1-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda) = 1 + 4\lambda$ であるから、その根は

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}}, \qquad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}},$$

であり、$Q(r) < 0$ となるのはちょうど $\alpha < r < \beta$ のときである。よって

$$d_{r+1} < d_r \iff \alpha < r < \beta, \qquad d_{r+1} > d_r \iff r < \alpha \text{ または} r > \beta.$$

ここで $\beta + 1 = \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ は整数でないから β も整数でなく、$k = \lfloor \beta + 1 \rfloor = \lfloor \beta \rfloor + 1$ は

$$k < \lambda + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} < k + 1.$$

を満たすただ一つの整数である。

考えてみよう $r < \alpha$ でも d_r は増加するのだから、そもそも d_r の最小値はどこで探せばよいだろうか。

小問 (i) より、$r < \lambda$ では $d_r > 0$、$r > \lambda$ では $d_r < 0$ であるから、最小値は負の項、すなわち $r \geq m+1$ の中にあるはずである。また $\beta > \lambda$（$\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$ より）かつ $\alpha < \lambda$ なので、$r \geq m+1$ を満たすすべての r は $r > \alpha$ を満たし、さらに $k > \beta > \lambda$ から $k \geq m+1$ が得られる。したがって整数 $r \geq m+1$ の範囲では次が成り立つ。

▶ $m+1 \leq r \leq k-1$ のとき：$r < \beta$ なので $e_r < 0$ であり、$d_{m+1} > d_{m+2} > \cdots > d_k$ となる。

▶ $r \geq k$ のとき：$r > \beta$ なので $e_r > 0$ であり、$d_k < d_{k+1} < d_{k+2} < \cdots$ となる。

（$k = m+1$ のときは一つ目の列は空である。）よって d_k は他のどの負の d_r よりも真に小さく、もちろん正の d_r のどれよりも小さい。したがって d_r の最小値は $r = k$ でとられ、これが示すべきことであった。言い換えると、p_r が最も急に減少するのは $r = k-1$ から $r = k$ にかけてである。

小問 (iii)

まず、$\lambda < 1$ ならば小問 (i) よりすべての d_r は負である。ところが $r \to \infty$ のとき $d_r \to 0$ である（$p_r \to 0$ だから）。よってどの r に対しても d_r より大きい後の項が存在し、最大値はそもそもとられない。もちろん $r = 1$ で最大になることもない。したがって $\lambda > 1$ が必要である（λ は整数でないので $\lambda = 1$ は除外される）。

そこで $\lambda > 1$ とすると、$d_1 > 0$ である。正の項は $d_1, \ldots, d_m$ であり、最大値があるとすればこの中にある。

- 最大値が $r = 1$ でとられるならば、$d_2 < d_1$、すなわち $e_1 < 0$ である。
- 逆に $e_1 < 0$ ならば $\alpha < 1 < \beta$ であるから、$1 \le r < \beta$ を満たすすべての整数 r について $e_r < 0$ となる。$m < \lambda < \beta$ なので $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$ が得られ、それより後の項はすべて負である。よって最大値は $r = 1$ でとられる。

したがって $\lambda > 1$ のとき、最大値が $r = 1$ でとられるのはちょうど $e_1 < 0$、すなわち $Q(1) < 0$ のときである：

$$Q(1) = 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2 < 0 \iff 2 - \sqrt{2} < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

これを $\lambda > 1$ と合わせると（$2 - \sqrt{2} < 1$ に注意して）、求める条件は

$$1 < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

である。

小問 (iv)

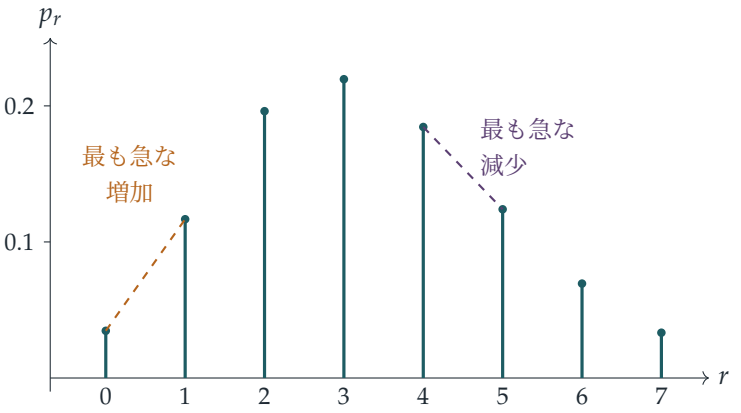
$\lambda = 3.36$ のとき $\lambda + \frac{1}{4} = 3.61 = 1.9^2$ であるから、次がわかる。

- 小問 (i) より、最頻値（mode）は $m = 3$ である。
- $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = 3.86 + 1.9 = 5.76$ なので $k = 5$ であり、最も急な減少は p_4 から p_5 にかけて起こる。
- $1 < 3.36 < 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$ なので、最も急な増加は p_0 から p_1 にかけて起こる（ただし僅差である：$\alpha = 0.96$ は 1 に近く、d_1 と d_2 はほぼ等しい）。

$p_r = \frac{3.36}{r} p_{r-1}$ と $p_0 = \mathrm{e}^{-3.36} \approx 0.035$ を用いると、近似値は次のようになる。

$$p_0, \ldots, p_7 \approx 0.035,\ 0.117,\ 0.196,\ 0.220,\ 0.185,\ 0.124,\ 0.069,\ 0.033.$$

概形のグラフでは、最初は急に増加し、その後なだらかになって $r = 3$ で山頂に達し、続いて減少が次第に急になり、$r = 4$ と $r = 5$ の間で最も急になったのち、ゆるやかになる様子を示せばよい。



検算

- $\lambda \in (0, 40)$ の無作為な値 20,000 個について p_r と d_r を計算すると、最頻値が $\lfloor \lambda \rfloor$ であること、d_r の最小値が $\left\lfloor \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \right\rfloor$ でとられること、そして（$\lambda > 1$ のとき）d_r の最大値が $r = 1$ でとられるのはちょうど $\lambda < 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$ のときであることが確かめられる。
- $\lambda = 3.36$ のとき：$d_1 \approx 0.0820$、$d_2 \approx 0.0794$ なので、d_1 が（僅差で）最大である。また $d_4, d_5, d_6 \approx -0.035, -0.061, -0.055$ なので、予想どおり d_5 が最小である。
- λ が小さい場合：$\lambda \to 0$ のとき $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \to 1$ なので $k = 1$ となる。実際このとき確率のほとんどは 0 に集中しており、最大の落ち込みは最初の $p_1 - p_0$ である。

よくある間違い

- $r < \alpha$ でも d_r が**増加する**ことを忘れ、その範囲に最小値が含まれ得ない理由（そこでは $d_r > 0$ である）を説明しないこと。
- 小問 (iii) で $d_2 < d_1$ だけを確認し、すべての d_r が負となって数列が最大値をとらない $\lambda < 1$ の場合を見落とすこと。

- $\lambda - 1 \leq m \leq \lambda$ と書いてしまうこと：λ が整数でないからこそ、不等式は等号を含まない。

STEP のその先へ

差分 d_r と e_r はそれぞれ 1 階導関数と 2 階導関数の離散版であり、k はポアソン分布の離散的な「変曲点」(point of inflection) の位置を示している。λ が大きいとき、ポアソン分布は平均 λ、標準偏差 (standard deviation) $\sqrt{\lambda}$ の正規分布 (normal distribution) に近く、その変曲点は $\lambda \pm \sqrt{\lambda}$ にある。ここでの $\alpha, \beta \approx \lambda \pm \sqrt{\lambda}$ と比べてみよ。比 p_r / p_{r-1} を用いる手法は離散分布の最頻値を求める標準的な方法であり、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）でさらに詳しく扱われている。

解答例

STEP III 2025、第 1 問

純粋数学 ・ ベータ関数の積分

> **STEP III 2025、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで行うことはすべて、置換（substitution）か恒等式（identity）$x+(1-x)=1$ のいずれかである。$x \mapsto 1-x$ という折り返しは p と q の役割を入れ替える。被積分関数（integrand）を $x+(1-x)$ で分けると、隣り合う値どうしが結びつく。$x=\sin^2\theta$ とおけば積分は三角関数の積分になり、$x=t/(1+t)$ とおけば $[0,1)$ が $[0,\infty)$ に引き伸ばされる。最後の積分は、それまでの結果を順につなげることで求まり、最終的には手計算できる $\sin^4\theta$ の積分に帰着する。

解答

小問 (i)

$u=1-x$ と置換すると $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$ であり、$x=0,1$ はそれぞれ $u=1,0$ に対応する。よって

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

小問 (ii)

右辺の 2 つの積分を足し合わせると

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big[x+(1-x)\big]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q)\end{aligned}$$

となり、これを整理すれば $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$ を得る。

次に $q = p$ とおく。小問 (i) より $\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$ であるから

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

小問 (iii)

$x = \sin^2\theta$ とおくと、$\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ かつ $1-x = \cos^2\theta$ である。θ が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、x は 0 から 1 まで増加し、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ はともに非負である。したがって符号の問題は生じず、$x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$、$(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$ となる。ゆえに

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

2 つ目の結果を示すには、$q = p$ とおき、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ を用いる。

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi.$$

ただし $\phi = 2\theta$ である。

> **考えてみよう** $\mathrm{b}(p,\cdot)$ のような形をした $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の積分に戻すにはどうすればよいか。

$[0,\pi]$ 上の $\sin\phi$ のグラフは $\phi = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である（$\phi \mapsto \pi - \phi$ と置換すればわかる）。よって $[0,\pi]$ 上の積分は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の積分の 2 倍である。また、三角関数による表示で $q = \frac{1}{2}$ とすると $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$ となるから

$$\mathrm{b}(p, \tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

したがって

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2})$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iv)

t が 0 から ∞ まで動くときに x が 0 から 1 まで動き、しかも $1-x$ が簡単な形になるようにしたい。$x = \dfrac{t}{1+t}$ はその両方を満たし、

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

である。t が 0 から ∞ まで増加するとき、x は 0 から 1 に向かって増加する。よって

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

小問 (v)

被積分関数を小問 (iv) と照らし合わせると、$p-1=\frac{3}{2}$ かつ $p+q=6$ であるから、$p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{7}{2}$ である。この積分は $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ であり、これを段階的に簡約していく。

$$\begin{aligned}\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}\right) &= \mathrm{b}\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{(i) より}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{(ii) より、} p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) && \text{(iii) より、} p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

最後に、三角関数による表示で $p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{1}{2}$ とすれば

$$\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ を 2 回用いると

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)=\tfrac{1}{8}\left(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right).$$

余弦の項は $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上で積分すると 0 になる（それらの原始関数（antiderivative）$\sin 2\theta$ と $\sin 4\theta$ は両端で 0 となる）。よって $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$ であり、$\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}$ である。ゆえに

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

検算

- $p=q=1$ のとき、定義から $\mathrm{b}(1,1)=1$ であり、(ii) から $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$ が得られる。これは $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ を直接計算した値と一致する。
- 同じく $p=1$ のとき、小問 (iii) は $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ を与える。矛盾はない。
- 数値的には $3\pi/256\approx 0.036816$ であり、$t^{3/2}/(1+t)^6$ を $[0,\infty)$ 上でコンピュータにより直接数値積分すると、小数点以下多くの桁まで一致する。大きさの妥当性も確かめておこう。被積分関数は $t=\frac{1}{3}$ で最大値（約 0.034）をとり、その山の幅はおよそ 1 程度であるから、値が数百分の一程度になるのはもっともである。

よくある間違い

- (iv) で、$\mathrm{d}x$ から生じる因子 $(1+t)^{-2}$ を忘れ、誤った指数 $p+q-2$ を得てしまう。
- (iii) で、$(\sin 2\theta)^{2p-1}$ を θ について $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上でのみ積分し、$\phi=2\theta$ によって積分範囲が 2 倍になり $\mathrm{d}\theta$ が半分になることを忘れる。

► (v) で、p を $\frac{3}{2}+1$ ではなく指数 $\frac{3}{2}$ そのものと対応させてしまう。

STEP のその先へ

関数 b(p,q) はオイラー（Euler）のベータ関数（beta function）であり、通常 $B(p,q)$ と書かれる。これはガンマ関数（gamma function）と $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ によって結びついており、小問 (iii) の結果は Γ に関するルジャンドル（Legendre）の倍数公式（duplication formula）の一つの形である。$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ を用いれば、$3\pi/256$ を 1 行で導くことができる。ベータ関数は確率論にも、ベータ分布（beta distribution）の正規化定数（normalising constant）として現れる。このような積分についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、ベータ分布については Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability* を参照するとよい。

解答例

STEP III 2025、第 2 問

純粋数学 • 関数の反復合成と周期性

STEP III 2025、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.8 節「**周期 3 ならばカオス**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/period-three.html

鍵となる考え方

この問題に現れる関数はすべて直線をつなぎ合わせてできているので、問題全体は「いまどの区間（piece）の上にいるか」を見失わないことに尽きる。$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ と $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$ を区間ごとに求め、内側の関数の符号を用いて絶対値（modulus）を一つずつ外していく。そのうえで、数列に関する問いは逆向きに読む。すなわち、$\mathrm{f}^n(x) = x$ の解とは n 回の操作で自分自身に戻ってくる初期値のことであり、また 7 より小さいすべての数は f による逆像（preimage）をちょうど二つもち、それらは互いに符号が反対である。

解答

以下、$\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ および $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$ と書く。f は $|x|$ のみに依存するので、三つの関数はすべて偶関数（even function）である。したがって $x \geq 0$ の範囲で考え、y 軸に関して折り返せば十分である。

小問 (i)

(a) $y = \mathrm{f}(x)$ のグラフは頂点 $(0, 7)$、傾き（gradient）∓ 2 の逆 V 字形であり、x 軸と $x = \pm\frac{7}{2}$ で交わる。

f^2 を求めるには $\mathrm{f}(x)$ の符号が必要である。$0 \leq x \leq \frac{7}{2}$ ならば $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \geq 0$ である

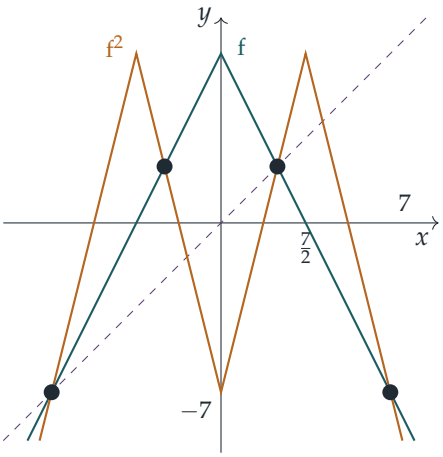
から

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

$x \geq \frac{7}{2}$ ならば $\mathrm{f}(x) \leq 0$ であるから $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$ となり

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

よって $y = \mathrm{f}^2(x)$ は W 字形である。$x = 0$ で値 -7 をとり、$x = \pm\frac{7}{2}$（ちょうど f の零点）で高さ 7 の山をもち、傾きは ± 4、x 切片は $\pm\frac{7}{4}$ と $\pm\frac{21}{4}$ である。$7 - 2x = 4x - 7$ と $7 - 2x = 21 - 4x$ を解くと、二つのグラフは $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ と $(\pm 7, -7)$ で交わることがわかる。



（青緑：$y = \mathrm{f}(x)$、琥珀色：$y = \mathrm{f}^2(x)$、破線：$y = x$。）

(b) 四つの区間それぞれで方程式を解き、その区間内にある解だけを残す。

- $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$：$4x - 7 = x$ より $x = \frac{7}{3}$ であり、これは範囲内にある。
- $x \geq \frac{7}{2}$：$21 - 4x = x$ より $x = \frac{21}{5} = 4.2$ であり、範囲内にある。
- $-\frac{7}{2} \leq x \leq 0$：ここでは $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$ であり、$-4x - 7 = x$ より $x = -\frac{7}{5}$、範囲内にある。
- $x \leq -\frac{7}{2}$：ここでは $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$ であり、$21 + 4x = x$ より $x = -7$、範囲内にある。

よって $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ の解はちょうど四つであり、

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}.$$

(c) 数列が周期（period）2 をもつのは、$u_2 = u_0$、すなわち $\mathrm{f}^2(a) = a$ であり、かつ $u_1 \neq u_0$、すなわち $\mathrm{f}(a) \neq a$ であるとき、かつそのときに限る。

考えてみよう (b) の四つの答えはすべて周期 2 の数列を与えるだろうか？

そうではない。そのうち二つは f 自身の不動点（fixed point）である：$\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$、$\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$。これらは定数数列を与え、その周期は 1 である。残りの二つは互いに入れ替わる：

$$\mathrm{f}\big(-\tfrac{7}{5}\big) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\big(\tfrac{21}{5}\big) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

よって数列が周期 2 をもつのは $a = -\frac{7}{5}$ または $a = \frac{21}{5}$ のとき、かつそのときに限る。

(d) $a = \frac{28}{5}$ のとき、

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = \mathrm{f}\big(-\tfrac{7}{5}\big) = \tfrac{21}{5}.$$

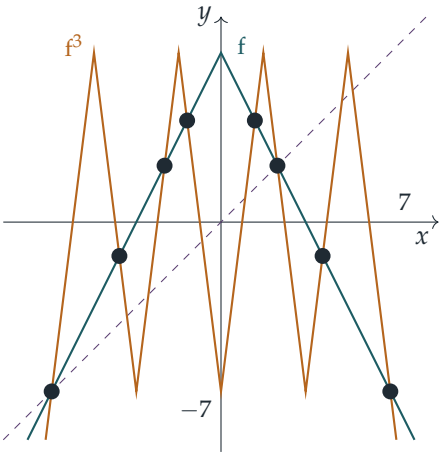
u_2 以降、この数列は小問 (c) の $-\frac{7}{5}$ から始まる数列と一致するので、$u_2, u_3, u_4, \ldots$ は $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$ となり、周期 2 をもつ。最後に、$u_0 = \frac{28}{5}$ と $u_1 = -\frac{21}{5}$ はどちらも $u_2 = -\frac{7}{5}$ とも $u_3 = \frac{21}{5}$ とも異なる。（$u_0 \neq u_2$ と $u_1 \neq u_3$ だけでなく、四つの組すべてを確かめる必要がある。）これが求めるものであった。

小問 (ii)

(a) 次に $\mathrm{f}^2(x)$ に f を適用する。その際、f^2 の各区間を符号が変わる点 $x = \frac{7}{4}$ と $x = \frac{21}{4}$ で分割する。$x \geq 0$ に対して

$$\mathrm{f}^3(x) = 7 - 2\big|\mathrm{f}^2(x)\big| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

したがってグラフは傾き ± 8 で -7 と 7 の間をジグザグに往復する。谷は $(0, -7)$ と $(\pm\frac{7}{2}, -7)$、山は $(\pm\frac{7}{4}, 7)$ と $(\pm\frac{21}{4}, 7)$ にあり、$|x| > \frac{21}{4}$ では下がっていく。各区間の式を $7 - 2x$ と等置して解くと、$y = \mathrm{f}(x)$ とは $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$、$(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$、$(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$ および $(\pm 7, -7)$ で交わる。



（青緑：$y=\mathrm{f}(x)$、琥珀色：$y=\mathrm{f}^3(x)$、破線：$y=x$。）

(b) $a=1$ から始めると、$u_1=7-2=5$、$u_2=7-10=-3$、$u_3=7-6=1$ となる。$a=-\frac{7}{9}$ から始めると

$$u_1=7-\tfrac{14}{9}=\tfrac{49}{9},\qquad u_2=7-\tfrac{98}{9}=-\tfrac{35}{9},\qquad u_3=7-\tfrac{70}{9}=-\tfrac{7}{9}.$$

よってどちらの数列も三段階で出発点に戻る。すなわち、これらは長さ 3 のサイクル（cycle）$1\to5\to-3\to1$ と $-\frac{7}{9}\to\frac{49}{9}\to-\frac{35}{9}\to-\frac{7}{9}$ である。

初期値だけでなく、長さ 3 のサイクルのすべての項が $\mathrm{f}^3(x)=x$ を満たすので、これにより六つの解 $1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}$ が得られる。また、f の不動点はどれも $\mathrm{f}^3(x)=x$ を満たすので、小問 (i) で求めた $\frac{7}{3}$ と -7 が加わる。これで相異なる解が八つになる。

考えてみよう　これ以上解がないことはどうしてわかるのか？

(ii)(a) の式から、f^3 は八つの線分（$x\geq0$ における四つとその鏡像）からなり、それぞれの傾きは ±8 である。どの線分も $y=x$ と平行でないので、各線分は直線 $y=x$ と高々一回しか交わらず、解は高々八つである。八つ見つかったので、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))=x$ の解全体は

$$x=-7,\quad -\tfrac{35}{9},\quad -3,\quad -\tfrac{7}{9},\quad 1,\quad \tfrac{7}{3},\quad 5,\quad \tfrac{49}{9}.$$

（図もこれと一致する：破線は八つの琥珀色の線分それぞれと一回ずつ交わっている。）

(c) (i)(d) の考え方をまねて、長さ 3 のサイクルから逆向きにたどる。$\mathrm{f}(y)=c$ は $|y|=\frac{1}{2}(7-c)$ を意味するので、$c<7$ であるどの数もちょうど二つの逆像 $\pm\frac{1}{2}(7-c)$ をもつ。サイクル $1\to5\to-3\to1$ から $u_3=1$ をとる。サイクル内での 1 の逆像は -3 であるから、サイクルから外れるためにもう一方の逆像 $u_2=3$ を選ぶ。これはサイクルに含まれない。すると

$$\mathrm{f}(u_1)=3\ \Rightarrow\ |u_1|=2,\quad \text{とる：}u_1=2;\qquad \mathrm{f}(u_0)=2\ \Rightarrow\ |u_0|=\tfrac{5}{2},\quad \text{とる：}u_0=\tfrac{5}{2}.$$

よって $a = \frac{5}{2}$ が条件を満たす。順方向に確かめると

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

u_3 以降、数列はサイクル $1, 5, -3$ を回り続けて周期 3 をもち、一方 $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$ はいずれも 1、5、-3 と異なる。

（他の選び方でもよい。例えば $a = -\frac{5}{2}$ や $a = \pm\frac{9}{2}$ はいずれも $u_1 = -2$ に至り、$a = \frac{3}{2}$ は $u_2 = -1$ を経て $u_3 = 5$ でサイクルに入る。）

検算

- 主張した各解は手で反復計算して確かめられる。例えば $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$、また $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$ である。
- $-30 \le x \le 30$ の範囲で $\mathrm{f}^3(x) - x$ をコンピュータで走査すると、符号の変化は -7、-3.889、-3、-0.778、1、2.333、5 および 5.444 の近くでのみ見つかり、八つの解と一致する。$\mathrm{f}^2(x) - x$ について同様に走査すると、-7、-1.4、2.333、4.2 のみが見つかる。
- 個数の確認：f^n は傾き $\pm 2^n$ の 2^n 個の線分からなるので、$\mathrm{f}^n(x) = x$ は 2^n 個の解をもつ。$n = 2$ のときは $4 = 2 + 2$（二つの不動点と長さ 2 のサイクル一つ）、$n = 3$ のときは $8 = 2 + 3 + 3$（二つの不動点と長さ 3 のサイクル二つ）である。

よくある間違い

- (i)(c) で (i)(b) の四つの解をすべて答えてしまう。不動点は周期 1 を与える。
- (ii)(b) で 1 と $-\frac{7}{9}$ だけを挙げる、あるいは不動点 $\frac{7}{3}$ と -7 も $\mathrm{f}^3(x) = x$ を満たすことを忘れる。
- 図の中でグラフの交点の位置を誤る。交点を代数的に求めればこれは防げる。

STEP のその先へ

これは離散力学系（discrete dynamical system）への最初の入り口である。f は傾き 2 のテント写像（tent map）なので、f^n は 2^n 個の区間からなり、そのためあらゆる周期の周期点（periodic point）が存在する。この写像はカオス的な振る舞い（chaotic behaviour）の標準的な例である。シャルコフスキー（Sharkovskii）の定理によれば、直線上の連続写像が周期 3 の点をもつならば、あらゆる周期の点が存在しなければならない。これが「周期三はカオスを意味する」という有名な標語である。ストロガッ

ツ（Strogatz）の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（非線形力学とカオス）は、反復写像（iterated map）へのわかりやすい入門書である。

解答例

STEP III 2025、第 3 問

純粋数学 • 平均の不等式

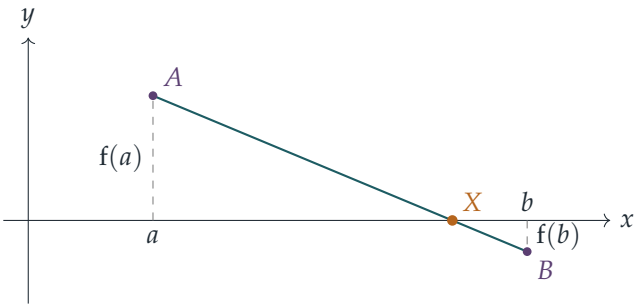
STEP III 2025、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

A は軸の上側に、B は下側にあるので、交点 X は AB を二つの高さの比 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$ に分ける。したがって m は a と b の**加重平均**（weighted average）であり、以下の議論はすべて、f を変えたときに重みがどう変わるかについてのものである。m をただ一つの比 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ の関数として書いてしまえば、f の二つの選び方を比べることは、二つの数を比べることに帰着する。



解答

小問 (i)

A、その足 $(a,0)$、X がつくる三角形と、B、その足 $(b,0)$、X がつくる三角形は相似（similar）である（X における対頂角が等しく、足ではともに直角である）。よって

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

したがって

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

($\mathrm{f} > 0$ であるから分母は正である。直線の方程式 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x-a)$ に $y = 0$ を代入しても同じ答えが得られる。)

$r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$ とおき、分子と分母を $\mathrm{f}(b)$ で割って書き直しておくとよい：

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

小問 (ii)

$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ のとき、

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

となり、示すべき式が得られる。

二つ目の目標については、分子 $a^{n+1} + b^{n+1}$ は、分母を払った後の $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$ から出てくるはずであり、これは $\mathrm{f}(b)$ が b^{-n} のように振る舞うべきことを示唆している。そこで、$x > 0$ で正の値をとる $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ を試すと、

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

となる。ここで分子と分母に $a^n b^n$ を掛けた。したがって $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ でよい（m は比 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ のみに依存するので、その正の定数倍でもよい)。$n = -\frac{1}{2}$ とすると一つ目の結果が再び得られることに注意しよう。

小問 (iii)

$r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b)$、$r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$ とおく。どちらも正である。$(*)$ より $M_i = b - \dfrac{b-a}{1+r_i}$ である。$b - a > 0$ であるから、式 $b - \frac{b-a}{1+r}$ は $r > 0$ において r について狭義単調増加（strictly increasing）である。よって $r_1 > r_2$ を示せば十分である。

> **考えてみよう** 関数 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ に関する条件は、どのようにして r_1 と r_2 に関する条件に変わるのだろうか？

$h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ とおく。すると

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

である。h は減少関数（decreasing）であり $a < b$ であるから、$h(a) > h(b) > 0$ となるからである。$r_2 > 0$ なので $r_1 > r_2$ が得られ、したがって $M_1 > M_2$ である。

これを用いて。m の値がそれぞれ三つの平均になるような三つの関数が必要である。

- $\mathrm{f}(x) = 1$（定数）のとき $m = \dfrac{a+b}{2}$ となる。
- $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ のとき、小問 (ii) より $m = \sqrt{ab}$ となる。
- $\mathrm{f}(x) = x$ のとき $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$ となる。

ここで、いま証明した結果を二回用いる。$\mathrm{g}_1 = 1$、$\mathrm{g}_2 = \sqrt{x}$ とすると、比 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2 = x^{-1/2}$ は $x > 0$ で減少するので、$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ である。$\mathrm{g}_1 = \sqrt{x}$、$\mathrm{g}_2 = x$ とすると、比はやはり $x^{-1/2}$ で減少するので、$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ である。合わせると

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

小問 (iv)

曲線は A と B を通るので

$$\mathrm{f}(a) = p(c-a)^3, \qquad -\mathrm{f}(b) = p(c-b)^3, \text{ すなわち } \mathrm{f}(b) = p(b-c)^3.$$

$\mathrm{f}(b) > 0$ であるから $p \neq 0$ かつ $b \neq c$ であり、割り算をしてよい：

$$\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

すべての実数はただ一つの実数の立方根（cube root）をもつので、立方根をとる操作は可逆であり、

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)}\right)^{1/3},$$

となって、示すべき式が得られる。右辺を k とおくと（$k > 0$）、$c - a = k(b-c)$ より $c(1+k) = a + kb$ であり、

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,\mathrm{f}(b)^{1/3} + b\,\mathrm{f}(a)^{1/3}}{\mathrm{f}(a)^{1/3} + \mathrm{f}(b)^{1/3}},$$

となる。ここで分子と分母に $\mathrm{f}(b)^{1/3}$ を掛けた。

考えてみよう この公式は以前どこかで見なかっただろうか？

これは小問 (i) の公式で f を $\mathrm{f}^{1/3}$ に置き換えたものにほかならず、この関数も $x > 0$ で定義され正の値をとる。したがって c は関数 $\mathrm{f}^{1/3}$ に対する m の値である。$\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}$、

$\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}^{1/3}$ として小問 (iii) を適用する：

$$\frac{\mathrm{g}_1(x)}{\mathrm{g}_2(x)} = \mathrm{f}(x)^{2/3}.$$

f が減少関数で正の値をとるならば、$t \mapsto t^{2/3}$ は $t > 0$ で増加するので、$\mathrm{f}^{2/3}$ も減少関数で正の値をとる。よって小問 (iii) より $M_1 > M_2$ が得られる。ここで $M_1 = m$（f 自身に対するもの）、$M_2 = c$ である。したがって $c < m$ である。

検算

- $a = 1$、$b = 4$ とする。三つの平均は $2.5 > 2 > 1.6$ であり、$\mathrm{f} = \sqrt{x}$ のとき $m = (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/3 = 2 = \sqrt{4}$ となる。
- $\mathrm{f}(x) = 1/x$、$a = 1$、$b = 4$ のとき：$m = \frac{1/4+4}{5/4} = 3.4$ であり、一方 $k = 4^{1/3} \approx 1.587$ から $c \approx 2.84 < 3.4$ となり、小問 (iv) の予測どおりである。m も c も、加重平均である以上当然ながら、a と b の間にある。
- 小問 (ii) で $n = 0$ とすると $\mathrm{f} = 1$ かつ $m = \frac{a+b}{2}$ となり、$n = -1$ とすると $\mathrm{f} = x$ かつ $m = \frac{2ab}{a+b}$ となって、小問 (iii) と整合する。

これらに加え、a、b、f を多数選んですべての結果をランダムに検証し、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- B の高さが $-\mathrm{f}(b)$ であることを忘れること。すると分母が $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)$ となり、得られる点が a と b の間にあるとは限らなくなる。
- 小問 (iii) で、ただ一つの比 r に帰着させずに、四つの関数値を一度にたすき掛けして M_1 と M_2 を比べようとすること。
- 小問 (iv) で、$\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}^{1/3}$、$\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}$ と逆の順にとること：このときの比 $\mathrm{f}^{-2/3}$ は**増加関数**なので、その順では小問 (iii) を適用できない。

STEP のその先へ

ここで現れた m はどれも加重平均 $\lambda a + (1-\lambda)b$ であり、小問 (iii) は、n とともに増加する冪平均（power means）の族 $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)/\left(a^n + b^n\right)$（レーマー平均（Lehmer means））全体を順序づける鮮やかな方法になっている。平均の間の不等式と、その背後にある凸性（convexity）の議論は、大学一年次の解析学（analysis）の定番であ

る。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）や Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）は、この種の議論をさらに学ぶのに適している。

解答例

STEP III 2025、第 4 問

純粋数学 • 曲線の変換

STEP III 2025、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

平面の写像 T が逆写像（inverse）をもつとする。このとき、曲線 $f\big(T^{-1}(x,y)\big)=0$ は曲線 $f(x,y)=0$ の T による像である。なぜなら、ある点が新しい曲線上にあるのは、T^{-1} がその点を元の曲線上に移すときであり、かつそのときに限るからである。小問 (i) では、これを回転（rotation）について示す。小問 (ii) では同じことを鏡映（reflection）について行う。この場合は $T^{-1}=T$ である。小問 (iii) では、置き換え $u=x-2y$ によって方程式が $y=\sin x$ の水平方向のせん断（shear）に変わることに気づけばよい。そうすれば媒介変数表示（parametrisation）によって、陰関数微分（implicit differentiation）の面倒なしに接線（tangent）が求められる。

解答

小問 (i)

行列の積を計算すると

$$x_2=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\qquad y_2=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}.$$

となる。G_2 の方程式に含まれる二つの括弧に $(x,y)=(x_2,y_2)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}&=\frac{(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=x_1,\\ -\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}&=\frac{-(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=y_1.\end{aligned}$$

となる。したがって、G_2 の方程式の左辺に (x_2,y_2) を代入した値は $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}$ である。(x_1,y_1) は G_1 上にあるから、これは 1 に等しい。ゆえに (x_2,y_2) は G_2 上にある。

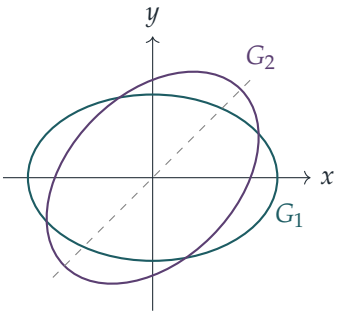
回転については、$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ であることに注意すると、行列は

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

であり、これは原点のまわりの反時計回りの 45° の回転である。いま示したのは、R が G_1 のすべての点を G_2 上に移すということである。G_2 が回転した曲線とちょうど一致することを示すには、G_2 のすべての点が G_1 の点から来ていることも必要である。G_2 上の任意の点 (x, y) をとり、

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

とおく。これは $R^{-1}(x, y)$（45° だけ逆向きに回転したもの）である。G_2 の方程式は、まさに $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$ ということを述べているので、$(x_1, y_1) \in G_1$ であり、しかも $R(x_1, y_1) = (x, y)$ である。したがって $G_2 = R(G_1)$ である。すなわち、楕円（ellipse）G_2 は G_1 を原点のまわりに反時計回りに 45° 回転したものである。



小問 (ii)(a)

行列を M とおく。点 (x, y) が不変点（invariant point）であるのは $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$ のとき、すなわち

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

のときである。第 1 式から $0.8y = 1.6x$、よって $y = 2x$ が得られ、第 2 式からは $0.8x = 0.4y$ が得られるが、これは同じ式である。したがって、不変点からなる直線（鏡映の軸）は

$$y = 2x.$$

である。

小問 (ii)(b)

$(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$ とおく。第 2 の方程式はちょうど

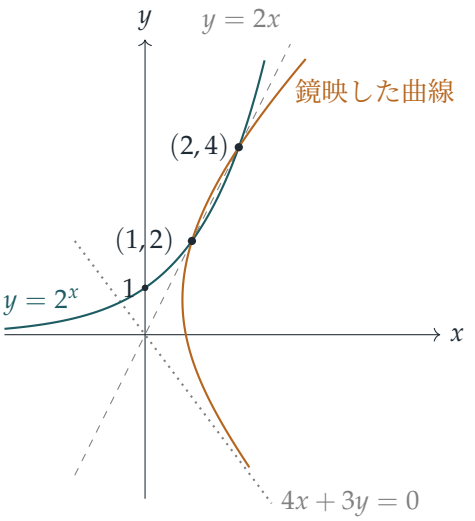
$$Y = 2^X.$$

を意味している。よって、(x,y) が第2のグラフ上にあるのは、$M(x,y)$ が $y=2^x$ 上にあるとき、かつそのときに限る。鏡映はそれ自身で元に戻る（$M^2=I$ であることは、積を計算すれば確かめられる）ので、$(x,y)=M(X,Y)$ である。これは小問 (i) と同じ議論であり、第2のグラフは $y=2^x$ を直線 $y=2x$ に関して鏡映したものである。

考えてみよう 鏡映した曲線の漸近線はどこに移るか。また、曲線はどちらの方向へ無限遠に伸びていくか。

$y=2^x$ の特徴を一つずつ鏡映してみよう。

- **漸近線**（*asymptote*）。 $x\to-\infty$ のとき、$y=2^x$ は x 軸に近づく。方向 $(1,0)$ は $M(1,0)=(-0.6,0.8)$ に移るので、x 軸は直線 $4x+3y=0$、すなわち $y=-\frac{4}{3}x$ に移る。同じことだが、$Y=0.8x+0.6y=2^X>0$ であるから、鏡映した曲線は $4x+3y>0$ の側に完全に含まれ、$X\to-\infty$ のとき $4x+3y=0$ に近づく。遠方では $y=2^x$ 上の点はおよそ $(X,0)$（X は絶対値の大きな負の数）であり、これらはおよそ $(-0.6X,0.8X)$ に移る。したがって、鏡映した曲線は第4象限で漸近線に近づき、そのとき $x\to+\infty$、$y\to-\infty$ となる。
- **鏡映の軸上の点**。鏡映は $y=2x$ 上のすべての点を動かさない。さて、$2^x=2x$ となるのは $x=1$ と $x=2$ のとき（2^x-2x は凸（convex）なので、それ以外にはない）である。よって両曲線はともに $(1,2)$ と $(2,4)$ を通り、そこで交わる。$y=2^x$ に沿ってコンピュータで探索しても、それ以外の共有点は見つからない。
- **その他の点**。 $(0,1)$ は $(0.8,0.6)$ に移る。
- **最も左の点**。鏡映した曲線は $\left(-0.6t+0.8\cdot2^t,\ 0.8t+0.6\cdot2^t\right)$ で表される。その x 座標が最小になるのは $0.8\cdot2^t\ln2=0.6$ のときで、点はおよそ $(0.80,0.74)$ である。そこでは接線が鉛直なので、鏡映した曲線は x の関数のグラフではない。
- **増大の様子**。 $X\to+\infty$ のとき、点 $(X,2^X)$ はおよそ $2^X(0.8,0.6)$ に移る。よって曲線は右上に向かい、おおよそ傾き $\frac{3}{4}$ の方向に伸びていく。



小問 (iii)

$0 \le x \le 2\pi$ における $y = \sin x$ のグラフは、おなじみの一つの波である。

$y = \sin(x - 2y)$ については、$u = x - 2y$ とおく。点 (x, y) が曲線上にあるのは $y = \sin u$ のとき、かつそのときに限り、このとき $x = u + 2y$ である。よって曲線はちょうど

$$x = u + 2\sin u, \qquad y = \sin u.$$

である。これは $y = \sin x$ の各点を、その高さの 2 倍だけ横にずらしたもの、すなわち水平方向のせん断 $(u, v) \mapsto (u + 2v, v)$ である。

どの u に対して $0 \le x \le 2\pi$ となるか。 $x(u) = u + 2\sin u$ とおく。すると $x(-u) = -x(u)$ かつ $x(u + 2\pi) = x(u) + 2\pi$ である。$x'(u) = 1 + 2\cos u$ であるから、関数 $x(u)$ は $[0, \frac{2\pi}{3}]$ において 0 から $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$ まで増加し、その後 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ において π まで減少する。よって $0 < u \le \pi$ のとき値は $(0, 2\pi)$ に含まれ、$[\pi, 2\pi]$ では対称性 $x(2\pi - u) = 2\pi - x(u)$ により値は $(0, 2\pi]$ に収まる。$u > 2\pi$ のときは帰納法（induction）により $x(u) = x(u - 2\pi) + 2\pi > 2\pi$ となり、$u < 0$ のときは奇関数であること（oddness）から $x(u) < 0$ となる。したがって、求める曲線の部分は、u が 0 から 2π まで動くとき、$(0, 0)$ から $(2\pi, 0)$ までちょうど一度だけ描かれる。

接線。 曲線に沿って

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 + 2\cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos u}{1 + 2\cos u}.$$

である。$\cos u = 0$ のとき $1 + 2\cos u = 1$ となるので、これら二つの導関数が同時に 0 になることはない。

- 水平な接線は $\cos u = 0$、すなわち $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のところに現れる：

$$\left(\tfrac{\pi}{2}+2,\ 1\right) \quad \text{および} \quad \left(\tfrac{3\pi}{2}-2,\ -1\right).$$

- 鉛直な接線は $\cos u = -\frac{1}{2}$、すなわち $u = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ のところに現れる：

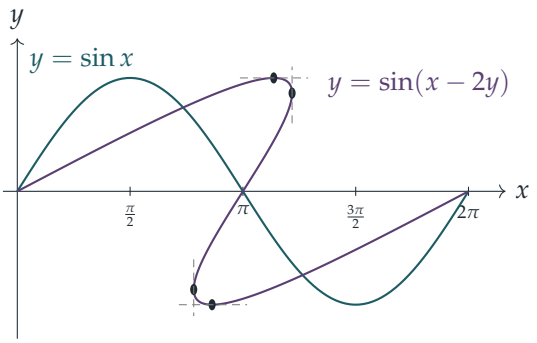
$$\left(\tfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{および} \quad \left(\tfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

数値的には、これらはおよそ $(3.57, 1)$、$(2.71, -1)$、$(3.83, 0.87)$、$(2.46, -0.87)$ である。

考えてみよう 頂上の水平な接線は $x \approx 3.57$ にあるが、曲線はその後さらに $x \approx 3.83$ まで達する。曲線は実際にはどのような形をしているのだろうか。

u を 0 から 2π まで追ってみよう。曲線は原点を傾き $\frac{1}{3}$（$u = 0$ を代入）で出発するが、これは $y = \sin x$ よりも緩やかである。曲線は最大点 $(\frac{\pi}{2}+2, 1)$ まで上り、その後右下へ進んで $(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ の鉛直な接線に達する。そこから左へ折り返し、傾き $\frac{-1}{-1} = 1$ で $(\pi, 0)$ を通過する。2 番目の鉛直な接線 $(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ に達すると右へ向きを変えて最小点 $(\frac{3\pi}{2}-2, -1)$ を通り、$(2\pi, 0)$ まで上っていく。曲線は砕ける波のように覆いかぶさる形をしている。$x \approx 2.46$ と $x \approx 3.83$ の間では、各 x に対して y の値が三つある。図全体は $(\pi, 0)$ に関して点対称（half-turn symmetry）である。

参考までに、二つのグラフが交わるのは $\sin x = \sin(x - 2\sin x)$ となるところである。$\sin x = 0$ ならば $x = 0, \pi, 2\pi$ であり、そうでなければ $x - \sin x = \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{2}$ で、$x \approx 2.31$ と $x \approx 3.97$ が得られる。



検算

- 小問 (i)：G_1 の頂点 $(3, 0)$ をとる。これは $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ に移り、G_2 の方程式の二つの括弧はそれぞれ 3 と 0 になるので、左辺は 1 である。
- 小問 (ii)：$M\binom{1}{2} = \binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2} = \binom{1}{2}$ であり、不変点として当然の結果である。点 $(1, 2)$ は第 2 の方程式も満たす：$0.8 + 1.2 = 2 = 2^{-0.6+1.6}$。

- 小問 (iii)：$(\frac{\pi}{2}+2, 1)$ では $x-2y=\frac{\pi}{2}$ となり、$\sin\frac{\pi}{2}=1=y$ である。同様に $(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ では $x-2y=\frac{2\pi}{3}$ となり、$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。陰関数微分により $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$ が得られる。その分子は第 1 の点で 0 となり、分母は第 2 の点で 0 となる。

よくある間違い

- G_1 が G_2 の**中に**写されることだけを示してしまう。G_2 が回転した曲線**そのもの**であると言うには、G_2 のすべての点が G_1 から来ていることも必要であり、それには逆写像を使う。
- $y=\sin(x-2y)$ を x の関数として扱ってしまい、覆いかぶさる部分のない一つの波として曲線を描いてしまう。鉛直な接線は、まさに曲線が折り返す場所である。
- 鏡映した指数関数のグラフが斜めの漸近線 $4x+3y=0$ をもち、その片側に完全に含まれることを忘れてしまう。

STEP のその先へ

この問題の背後にある原理は、可逆な写像 T を曲線 $f(x,y)=0$ に施すと曲線 $f\left(T^{-1}(x,y)\right)=0$ が得られる、ということである。大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の講義では、これは基底変換（change of basis）によって二次形式（quadratic form）がどのように変わるかという研究になる。座標軸を回転させて円錐曲線（conic）から xy の項を消去することは、対称行列（symmetric matrix）の対角化（diagonalising）の 2 次元の場合にあたる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、回転、鏡映とそれらの固有ベクトル（eigenvector）（(ii)(a) の不変な直線は固有値（eigenvalue）1 に対する固有ベクトルである）を非常に読みやすく扱っている。

解答例

STEP III 2025、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

STEP III 2025、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

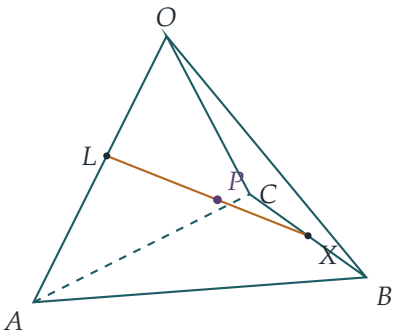
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

O は一直線上にない 3 点 A, B, C が定める平面の上方にあるので、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は一次独立（linearly independent）である。したがって、これらを用いて書かれたベクトルの等式では**係数比較**（comparing coefficients）を行ってよい。問題に現れる点はすべて、未知のパラメータを用いて表し、係数を比較することで求められる。平面からの高さは係数の定数倍にすぎないので、「水平」という条件も容易に扱える。

解答

O は平面 ABC 上にないので、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のいずれも残りの 2 つの一次結合では表せない（たとえば $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ ならば、O, A, B, C は同一平面上にあることになる）。よって $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ ならば $x = x', y = y', z = z'$ である。また、$k > 0$ であることにも注意する。



小問 (i)

$\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$、$\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ とおく。P は LX 上にあるので、ある s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

と書ける。$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ と係数を比較すると

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

後の2式を加えると $s = \beta + \gamma$ となり、さらに $t = \gamma/(\beta+\gamma)$ であるから

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma}.$$

最後に、$1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$ であり、これは正であるから

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

となり、題意が示された。（係数は一意に定まったので、L と X は一意である。また $0 < s < 1$ かつ $0 < t < 1$ であるから、P は L と X の間に（端点を除いて）あり、X は B と C の間に（端点を除いて）ある。）

小問 (ii)

文字を巡回的に入れ替えて（$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$, $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$）同じ議論を行うと

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

が得られる。

考えてみよう 与えられた3点を通る平面が水平であるかどうかは、どのように判定できるだろうか。

それは、3点が同じ高さにあるとき、かつそのときに限り水平である。O が平面 ABC から高さ $h > 0$ の位置にあるとする。このとき A, B, C はいずれも O から鉛直方向に距離 h だけ下にあるので、OA 上の点 $\mu\mathbf{a}$ は O から距離 μh だけ下にある。OB 上、OC 上についても同様である。したがって L, M, N（O 以外の位置で3本の異なる辺上にあるので、一直線上にはない）は O から

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

だけ下にある。ここで、$k > 0$ を用いると

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha - \beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

である。他の組についても同様であるから

$$\text{平面}LMN\text{ が水平} \iff \alpha=\beta=\gamma.$$

次に、OP は平面 ABC とどこで交わるだろうか。点 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ がこの平面上にあるのは、$x+y+z=1$ のとき、かつそのときに限る（このときこの点は $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ と書け、平面上のすべての点はこの形に表せる）。点 $\mu\overrightarrow{OP}$ の係数の和は $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$ であるから、直線 OP は平面と

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

で交わる。係数を比較すると、これが $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ に等しいのは

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

のとき、かつそのときに限る。すなわち $\alpha=\beta=\gamma$ のとき、かつそのときに限る。2 つの条件はいずれも $\alpha=\beta=\gamma$ と同値であるから、平面 LMN が水平であるのは、OP が平面 ABC と三角形 ABC の重心（centroid）G で交わるとき、かつそのときに限る。これで「示せ」の部分が完了する。

このとき $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であり、Y, Z についても同様である。すなわち、点 X, Y, Z はそれぞれ BC, CA, AB の**中点**である。

小問 (iii)

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

と書くことができ、$\alpha+\beta+\gamma<1$ であるからこそ、4 つの重み k, α, β, γ はすべて正である。したがって P は O, A, B, C の正の重みによる加重平均であり、これは P が四面体（tetrahedron）$OABC$ の（境界を除いた）**内部**にあることを意味する。

別の言い方をすれば、α, β, γ が正であることだけで、P は辺 OA, OB, OC が張る、O を頂点とする無限に広がる三角錐状の領域の内部にある。P の O からの深さは $(\alpha+\beta+\gamma)h$ であるから、条件 $\alpha+\beta+\gamma<1$ は、P が平面 ABC より上、すなわち O と同じ側にあることを表している。（和が 1 ならば P は面 ABC 上にあり、1 より大きければその向こう側にある。）

検算

- $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$ とすると $k=\frac{1}{4}$ である。このとき $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}, \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}, \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$ となり、LMN は明らかに高さの中央での水平な切り口であって、小問 (ii) の結果と一致する。

- $k \to 0$ のとき（すなわち P が面 ABC に近づくとき）、$\overrightarrow{OL} \to \mathbf{a}$ となる。つまり L は A まで下りてくる。このとき L, P, X はすべて平面 ABC 上にあることになるので、これは理にかなっている。
- 2000 個のランダムな四面体とランダムな α, β, γ を用いたコンピュータによる検証で、P が LX 上にあること（残差は約 10^{-15}）、および LMN が水平になるのは G が重心であるとき、かつそのときに限ることが確認された。

よくある間違い

- 係数比較が許される理由を述べずに比較してしまう。これには $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立であることが必要であり、「O が平面の上方にある」という条件はここで使われる。
- $k(\alpha - \beta) = 0$ で k を約すには $k > 0$ が必要であることを忘れる。
- 「かつそのときに限る」の一方向しか証明しない。

STEP のその先へ

数の組 $(k, \alpha, \beta, \gamma)$ は、四面体 $OABC$ に関する P の**重心座標**（barycentric coordinates）である。点が内部にあるのはそれらがすべて正のとき、かつそのときに限り、1 つが 0 のときは面上にある。重心座標はアフィン幾何（affine geometry）における自然な座標であり、線形代数（アフィン結合や凸包）や、三角形を重心座標による重みで補間して陰影をつけるコンピュータグラフィックスにも再び登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、一次独立性や座標がこのように使われる様子を見るのによい本である。

解答例

STEP III 2025、第 6 問

純粋数学 • 解の対称式

STEP III 2025、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

$a+b+c$、$a^2+b^2+c^2$、$a^3+b^3+c^3$ に関する条件は、実際には基本対称式（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc に関する条件である。そのように言い換えてしまえば、(i) では 3 つの数がごく単純な多項式（polynomial）の根（roots）となり、(ii) と (iii) では古典的な因数分解（factorisation）がすべてを片づけてくれる。最後の小問は、同じ代数を逆向きにたどるものである。

解答

小問 (i)

$a+b+c=0$ の両辺を 2 乗すると

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

となるので、$ab+bc+ca=0$ も成り立つ。

すべてが実数ではないこと。 もし a、b、c がすべて実数であれば、a^2、b^2、c^2 は和が 0 である非負の実数となり、$a=b=c=0$ でなければならない。これは 3 つの数が 0 でないことに矛盾するので、すべてが実数であることはありえない。

絶対値が等しいこと。 $p=abc$ とおくと、これは 0 でない。$a+b+c=0$ かつ $ab+bc+ca=0$ であるから、

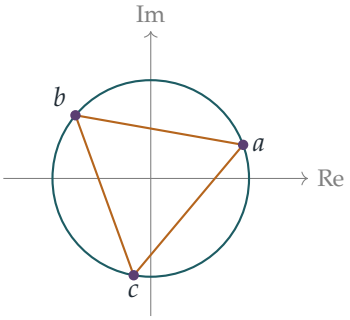
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

したがって a、b、c はいずれも $z^3 = p$ の根であり、すなわち

$$a^3 = b^3 = c^3 = p.$$

である。絶対値（modulus）をとると $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$ となり、絶対値は非負の実数であるから $|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$ である。よって a、b、c の絶対値はすべて等しく、示すべきことが示された。

実は a、b、c は p の 3 つの立方根（cube roots）であり、原点を中心とする正三角形の頂点に位置している。



小問 (ii)

$a + b + c = 0$ と仮定する。このとき $c = -(a + b)$ であり、

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

となる。さらに $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ でもあれば $abc = 0$ となり、少なくとも 1 つの数が 0 である。したがって、両方の性質をもつ 3 つの o **でない**複素数は存在しない。

小問 (iii)

今回役に立つ恒等式は

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

である。これは展開すれば確かめられる。両辺とも a^2b、ab^2 などの各項をそれぞれ 3 回ずつ、abc を 6 回含んでいる。

さて $d = -(a + b + c)$ であるから $d^3 = -(a + b + c)^3$ であり、

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

となる。

考えてみよう 積が 0 であることから、なぜ絶対値について何かがわかるのだろうか。

複素数の積が 0 になるのは、いずれかの因数が 0 のときに限る。よって $a+b$、$b+c$、$c+a$ のいずれかが 0 になる。$a+b=0$ としよう（ほかの場合も文字を入れ替えれば同じである）。このとき $b=-a$ であるから $|b|=|a|$ である。したがって、4 つの数のうち少なくとも 2 つは絶対値が等しい。

（ここでは $d\neq 0$ であることも、各数が 0 でないことも使っていない。結論は単に、4 つの数が $a,-a,c,-c$ のように、互いに符号が反対の 2 組に分かれるということである。）

小問 (iv)

$c=1$、$d=-2$、$e=3$ とすると

$$c+d+e=2,\qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

であるから、次を満たす実数 a、b が必要である。

$$a+b=-2,\qquad a^3+b^3=-20.$$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を用いると、2 番目の条件は

$$-20=-8+6ab\quad\Longrightarrow\quad ab=-2.$$

となる。よって a と b は $t^2+2t-2=0$ の根、すなわち

$$a=-1+\sqrt{3},\qquad b=-1-\sqrt{3},$$

であり、判別式（discriminant）が $4+8=12$ で正であるから、これらは実数である。それぞれの絶対値は $\sqrt{3}-1\approx 0.73$ と $\sqrt{3}+1\approx 2.73$ であり、どちらも 1、2、3 のいずれとも異なる（どちらも無理数である）。したがって

$$-1+\sqrt{3},\quad -1-\sqrt{3},\quad 1,\quad -2,\quad 3$$

は、絶対値が相異なり、和が 0 で、3 乗の和も 0 となる 5 つの実数である。

検算

- (i) について、1 の立方根 1、ω、ω^2 は $1+\omega+\omega^2=0$ および $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$ を満たす。予想どおり、絶対値はすべて 1 で、すべてが実数というわけではない。

- (iii) について、$a = 2$、$b = -2$、$c = \mathrm{i}$、$d = -\mathrm{i}$ を試してみると、2 つの和はともに 0 になり、確かに各数は符号が反対の組に分かれている。
- (iv) について、$(\sqrt{3}-1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$ と $(-1-\sqrt{3})^3 = -6\sqrt{3} - 10$ を用いると、数値的に $0.7320 - 2.7320 + 1 - 2 + 3 = 0$ および $0.3923 - 20.3923 + 1 - 8 + 27 = 0$ となる。

よくある間違い

- (i) で、$a^3 = b^3$ から「立方根をとって」$|a| = |b|$ を結論づけること。a と b は等しいとは限らないが、絶対値は非負の実数であるから、絶対値は等しくなる。
- (iii) で、$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ からいずれかの因数が 0 になることがなぜ言えるのか（$\mathbb{C}$ には零因子（zero divisors）が存在しないこと）を述べ忘れること。
- (iv) で、a と b の絶対値が 1、2、3 と異なること、および互いに異なることを確認し忘れること。

STEP のその先へ

多変数の対称式（symmetric polynomial）はすべて基本対称式を用いて表すことができ、ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）はべき和（power sums）$a^k + b^k + c^k + \ldots$ との関係を明示的に与える。ここでの条件が数をこれほど強く決定してしまうのは、このためである。これに近い問題として、プルーエ・タリー・エスコット問題（Prouhet–Tarry–Escott problem）がある。これは、1 乗、2 乗、...、k 乗の和がすべて一致するような、異なる 2 つの整数の集合を見つける問題であり、現在も部分的に未解決である。多項式とその根の代数については、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2025、第 7 問

純粋数学 • 逆正接関数

STEP III 2025、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの事実にかかっている。それは $f(x)\,f(-x) = 1$ である。なぜなら $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x) = 1$ だからである。これと $f(x) > 0$ とを合わせると、$g(x)+g(-x)$ はおなじみの $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t)$ になる。(c) では、$\tan\frac{1}{2}\theta$ は半角のタンジェント（half-angle tangent）であり、$\tan\theta = 1/x$ とすると $f(x)$ に簡約される。$x > 0$ で g と k が一致することがわかれば、(e) の二つの積分は対称性（symmetry）によって結びつけられる。

解答

小問 (i)

$x \neq 0$ のとき $x^2 = |x|^2$ であるから、

$$\sqrt{x^2+1} = |x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = |x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right) = |x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

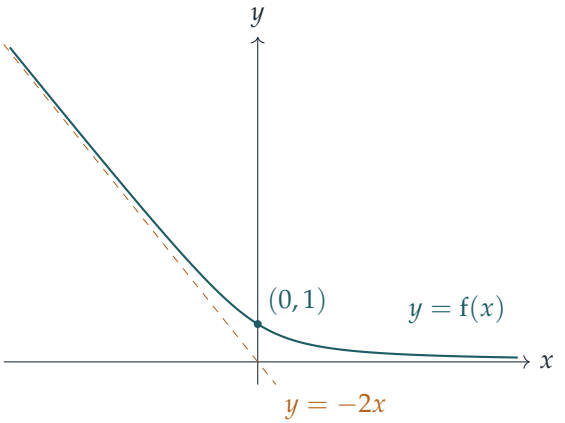
となる。ここで二項級数（binomial series）を用いた。$|x|$ が大きいとき $1/x^2 < 1$ であるから、この展開は有効である。$|x|^{-3}$ のオーダーの項を落とすと、求める近似 $\sqrt{x^2+1} \approx |x| + \dfrac{1}{2|x|}$ が得られる。

概形。まず事実を集める。

- $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ であるから、すべての x に対して $f(x) > 0$ である。また $f(0) = 1$ である。
- $x < \sqrt{x^2+1}$ であるから $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ となり、f は減少関数（decreasing

function）である。さらに $f''(x) = (x^2+1)^{-3/2} > 0$ であるから、曲線は下に凸（convex）である。

- $x \to +\infty$ のとき：$f(x) \approx x + \frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} \to 0^+$ であるから、x 軸は漸近線（asymptote）である。
- $x \to -\infty$ のとき：$|x| = -x$ であるから $f(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$ となる。直線 $y = -2x$ は斜めの漸近線であり、曲線はそのすぐ上にある。



小問 (ii)(a)

平方の差（difference of two squares）を展開すると

$$f(x)\,f(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

となるので、$f(-x) = 1/f(x)$ である。$t = f(x)$ とおくと、小問 (i) よりこれは正である。すると

$$g(x) + g(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1} \frac{1}{t}.$$

考えてみよう なぜ $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$ には $t > 0$ が必要なのだろうか？

$\alpha = \tan^{-1} t$ とおく。$t > 0$ であるから $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ であり、したがって $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ も $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属する。この区間は $\tan^{-1}$ の値域（range）に含まれる。そのタンジェントは $\cot\alpha = 1/t$ であるから、$\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ となる。よって $g(x) + g(-x) = \frac{1}{2}\pi$ を得る。（$t < 0$ ならば和は $-\frac{1}{2}\pi$ になる。f が正であることが重要なのはこのためである。）

小問 (ii)(b)

$\tan^{-1}$ は奇関数（odd function）であるから、$x \neq 0$ に対して

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

となり、これは $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$ を意味する。

小問 (ii)(c)

$x > 0$ とし、$\theta = \tan^{-1}(1/x)$ とおく。すると $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ であり、$\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$ である。対辺が 1、隣辺が x の直角三角形を考えると、$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$、$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ である。半角の公式（half-angle identity）$\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$（これは $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ から得られる）を用いると、

$$\tan\mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan\mathrm{g}(x).$$

これで結果が証明された。

さらに言えることがある。$x > 0$ のとき $\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ である。また $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$ であるから、$\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ でもある。tan はこの区間で一対一（one-to-one）であるから、

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{ただし} x > 0.$$

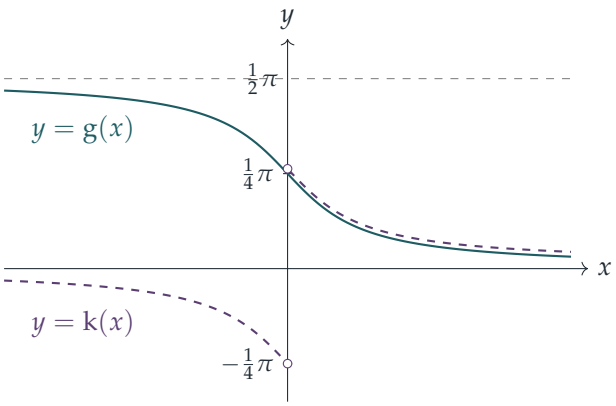
$x < 0$ のときは $-x > 0$ であるから、(b)、次にいま示したこと、そして (a) を順に用いて、

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ただし} x < 0.$$

小問 (ii)(d)

$\tan^{-1}$（増加）と f（減少）はどちらも単調（monotonic）であるから、$\mathrm{g} = \tan^{-1}\circ\mathrm{f}$ は減少関数である。$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{f} \to \infty$、$\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$ である。$x \to +\infty$ のとき $\mathrm{f} \to 0^+$、$\mathrm{g} \to 0$ である。また $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi$ であり、(a) よりグラフは点 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ に関して回転対称（rotational symmetry）である。

(c) より、$x > 0$ では k のグラフは g のグラフと同じであり、$\frac{1}{4}\pi$（この値はとらない）から 0 に向かって減少する。$x < 0$ では g のグラフを $\frac{1}{2}\pi$ だけ下に平行移動したものであり、0（$x \to -\infty$ のとき）から、$x \to 0^-$ のとき $-\frac{1}{4}\pi$ に向かって減少する。よって k は奇関数であり、定義されない点 $x = 0$ で $\frac{1}{2}\pi$ だけ跳躍する。



（$x > 0$ では二つの曲線は一致する。そこで破線の曲線を実線の少し上に描いているのは、両方が見えるようにするためにすぎない。）

小問 (ii)(e)

$x > 0$ のとき $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ である。$\tan^{-1}(1/x)$ を微分し、1 を積分する形で部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

下端については、$\tan^{-1}(1/x)$ は $\frac{1}{2}\pi$ より小さいままであるから、$x \to 0^+$ のとき $x\tan^{-1}(1/x) \to 0$ である。（被積分関数は有界であるから、この積分は何の問題もない通常の積分である。）

よって。(c) より、$-1 \le x < 0$ に対して $\mathrm{g}(x) = \mathrm{k}(x) + \frac{1}{2}\pi$ である。(b) より k は奇関数であるから、$\int_{-1}^{0}\mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$ である。したがって

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

検算

- $[-1,0]$ 上で g は $\mathrm{g}(-1) = \tan^{-1}(\sqrt{2}+1) = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178$ から $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785$ まで減少するので、積分の値はこれらの値の間になければならない。得られた答えは $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 1.0048$ であり、数値積分（numerical quadrature）でも小数第 10 位まで同じ値が得られる。同様に $\int_0^1 \mathrm{k}\,\mathrm{d}x \approx 0.56599$ である。

- 微分すると $\mathrm{g}'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ となるので、実は $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$ である。この式を使えば (a) は明らかであり、これを直接積分すると (e) の答えが再現される。
- $x = 1$ のとき：$\mathrm{f}(1) = \sqrt{2} - 1 = \tan\frac{1}{8}\pi$ であり、$\mathrm{k}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{8}\pi$ である。これは (c) の予測どおりである。

よくある間違い

- 大きいすべての $|x|$ に対して $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x}$ と書いてしまう。負の x に対してはこれは符号が逆になり、漸近線 $y = -2x$ が見えなくなってしまう。
- (c) から、いたるところで $\mathrm{k} = \mathrm{g}$ であると結論してしまう。タンジェントが等しくても、角は π の整数倍の差を除いてしか等しくならない。実際、$x < 0$ では二つの関数は $\frac{1}{2}\pi$ だけ異なる。
- 部分積分において、0 における $x\tan^{-1}(1/x)$ の極限を正当化し忘れる。

STEP のその先へ

$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ であるから、関数 f は $\mathrm{e}^{-\sinh^{-1} x}$ である。その逆数の性質 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$ は、$\sinh^{-1}$ が奇関数であることにほかならない。(c) の落とし穴、すなわちタンジェントが等しくても角が等しいとは限らないという点は、逆関数における分枝（branch）の問題の実変数版である。この問題は複素対数（complex logarithm）や偏角（argument）において、より本格的な形で再び現れる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）はこれを見るのに素晴らしい本であり、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は極限や広義積分（improper integral）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2025、第 8 問

純粋数学 • 複素数による三角関数の和

STEP III 2025、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

(i) の恒等式は漸化式（recurrence）である。すなわち $z^{m+1} - z^{-(m+1)}$ を、2 段下の同じ形の式を用いて表しているので、これを繰り返し適用すると和が望遠鏡和（telescoping sum）のように消えていく。$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とおくと、どの $z^k \pm z^{-k}$ も $2\cos k\theta$ または $2\mathrm{i}\sin k\theta$ となり、代数的な計算が三角関数の恒等式に変わる。数値を求める部分は、$\sin 2n\theta$ が $\sin\theta$（または $\cos\theta$）に等しくなって約分できるように θ を選ぶことで得られる。

解答

小問 (i)

積を展開すると、

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} + z^{1-m} - z^{m-1} - z^{-(m+1)}.$$

これに $z^{m-1} - z^{1-m}$ を加えると中央の 2 項が打ち消し合い、$z^{m+1} - z^{-(m+1)}$ が残る。これが求める恒等式である。

数学的帰納法（*induction*）。 $n = 1$ のとき、主張は $z^2 - z^{-2} = (z - z^{-1})(z + z^{-1})$ であり、これは平方の差の因数分解なので成り立つ。ある $n \geq 1$ で成り立つと仮定する。

$m=2n+1$（したがって $m+1=2n+2$、$m-1=2n$）として恒等式を用いると、

$$\begin{aligned} z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで帰納法の仮定を用い、追加された項が $r=n+1$ の項であることを使った。よって $n+1$ のときも成り立ち、数学的帰納法によりすべての $n\geq 1$ で成り立つ。

$z+\frac{1}{z}$ を用いる場合。同様にして、

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)=z^{m+1}-z^{1-m}+z^{m-1}-z^{-(m+1)},$$

であるから、今度は $z^{m-1}-z^{1-m}$ を**引か**なければならない：

$$z^{m+1}-\frac{1}{z^{m+1}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)-\left(z^{m-1}-\frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

このマイナス符号のため、段を下るごとに符号が交互に変わる。そこで次を主張する。

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

$n=1$ のとき、これもやはり $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$ である。n で成り立つならば、$m=2n+1$ とした恒等式から

$$z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1}-\frac{1}{z^{2n+1}}\right)-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

が得られる。$-(-1)^{n-r}=(-1)^{n+1-r}$ であり、また第 1 項は符号 $(-1)^0=1$ をもつ $r=n+1$ の項であるから、括弧の中はちょうど $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}\left(z^{2r-1}-z^{-(2r-1)}\right)$ となる。これで帰納法が完結する。書き下すと、

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1}-\frac{1}{z^{2n-1}}\right)-\left(z^{2n-3}-\frac{1}{z^{2n-3}}\right)+\cdots\pm\left(z-\frac{1}{z}\right)\right].$$

小問 (ii)

(a) $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とすると、$z^k+z^{-k}=2\cos k\theta$、$z^k-z^{-k}=2\mathrm{i}\sin k\theta$ である。(i) の最初の結果は

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n}2\cos(2r-1)\theta,$$

となり、両辺を 2i で割ると、求める $\sin 2n\theta=2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$ が得られる。

(b) $n = 2$ とすると、$\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta)$ である。$\sin 4\theta$ を $\sin\theta$ に等しくしたいが、$\theta = \frac{1}{5}\pi$ とすればよい。実際、$\sin\frac{4}{5}\pi = \sin(\pi - \frac{1}{5}\pi) = \sin\frac{1}{5}\pi$ である。$\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$ であるから、これで割ることができて、

$$1 = 2\big(\cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{3}{5}\pi\big).$$

ここで $\cos\frac{3}{5}\pi = -\cos(\pi - \frac{3}{5}\pi) = -\cos\frac{2}{5}\pi$ であるから、$\cos\frac{1}{5}\pi - \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}$、すなわち $\cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2}$ である。

(c) $n = 7$、$\theta = \frac{1}{15}\pi$ とすると、やはり $\sin 14\theta = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \neq 0$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{7} \cos\frac{(2r-1)\pi}{15} = \frac{1}{2}.$$

> **考えてみよう** ここに現れる 7 つの角は $\frac{1}{15}\pi$ の奇数倍であるが、目標の式には偶数倍が現れる。一方から他方へはどう移ればよいだろうか。

$\frac{1}{2}\pi$ を超える角には $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ を用い、さらに $\cos\frac{5}{15}\pi = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$、$\cos\frac{3}{15}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi$ に注意する：

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi = -\cos\tfrac{2}{5}\pi, \qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi = -\cos\tfrac{4}{15}\pi, \qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi = -\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

和は次のようになる。

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi + \cos\tfrac{7}{15}\pi - \cos\tfrac{2}{15}\pi - \cos\tfrac{4}{15}\pi + \tfrac{1}{2} + \big(\cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi\big) = \tfrac{1}{2}.$$

(b) より括弧の中は $\frac{1}{2}$ であるから、

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi + \cos\tfrac{4}{15}\pi - \cos\tfrac{7}{15}\pi - \cos\tfrac{1}{15}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

最後に $-\cos\frac{7}{15}\pi = \cos(\pi - \frac{7}{15}\pi) = \cos\frac{8}{15}\pi$、$-\cos\frac{1}{15}\pi = \cos(\pi + \frac{1}{15}\pi) = \cos\frac{16}{15}\pi$ であるから、

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi + \cos\tfrac{4}{15}\pi + \cos\tfrac{8}{15}\pi + \cos\tfrac{16}{15}\pi = \tfrac{1}{2},$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iii)

> **考えてみよう** 目標の式は、θ の奇数倍の正弦の交代和である。(i) のどの結果からちょうどこの形が得られるだろうか。

$z+\frac{1}{z}$ を用いる場合の結果である。$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とすると、これは

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

となるので、

$$\sin 2n\theta = 2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sin(2r-1)\theta.$$

$n=3$ とすると、

$$\sin 6\theta = 2\cos\theta\,(\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin\theta).$$

今度は $\sin 6\theta = \cos\theta$ としたいが、$\theta=\frac{1}{14}\pi$ とすればよい。実際、$\sin\frac{6}{14}\pi = \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{6}{14}\pi) = \cos\frac{1}{14}\pi$ であり、これは 0 でない。これで割ると、

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi - \sin\tfrac{3}{14}\pi + \sin\tfrac{5}{14}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

検算

- 簡単な値で恒等式を確かめる。$z=2$、$n=2$ のとき左辺は $16-\frac{1}{16}=\frac{255}{16}$ であり、一方 $(2-\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2}+8+\frac{1}{8}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{85}{8} = \frac{255}{16}$、$(2+\frac{1}{2})(8-\frac{1}{8}-2+\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\frac{51}{8} = \frac{255}{16}$ である。
- 数値的に、$\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$ と $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$ は一致する。これはよく知られた $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ である。
- (ii)(c) と (iii) の和は、電卓で計算するとどちらも 0.500000 となる。

よくある間違い

- $z+\frac{1}{z}$ の漸化式で符号を誤ること。下の項は引かれるので、和は交代和となり、最上位の項 $z^{2n-1}-z^{-(2n-1)}$ の符号が $+$ でなければならない。
- 選んだ角で $\sin\theta$ や $\cos\theta$ が 0 でないことを確認せずに、それで割ること。
- (ii)(c) で、$\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$ であることや、残りの 2 項を片付けるのに (b) が必要であることを見落とすこと。

STEP のその先へ

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ のときの式 z^k+z^{-k} は $2\cos k\theta$ であり、(i) のような漸化式はまさにチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）が満たすものである。チェビシェフ多項式は $\cos k\theta$ や $\sin k\theta/\sin\theta$ を $\cos\theta$ の多項式に変える。(ii)(c) と (iii) のきれいな和は 1 の

冪根（roots of unity）に由来する。角 $\frac{2}{15}\pi, \frac{4}{15}\pi, \frac{8}{15}\pi, \frac{16}{15}\pi$ は倍にすることを繰り返して生成されており、これはガウス（Gauss）の周期（Gaussian periods）とガロア理論（Galois theory）への最初の入り口である。この幾何学を味わうには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）がすばらしい。

解答例

STEP III 2025、第 9 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP III 2025、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.8 節「傾いたつり合い」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/tilted-equilibria.html

鍵となる考え方

台の上に置かれた立体は台と 1 点で接しており、はたらく力は 2 つだけである。重心（centre of mass）G にはたらく重力と、接点にはたらく抗力（reaction）である。この 2 力がつり合うのは、両者が同一の鉛直線上にはたらくときに限られる。したがって、接点における曲面の法線（normal）は G を通らなければならない。小問 (i) では G の位置を求め、小問 (ii) では曲面の法線が軸とどこで交わるかを調べ、小問 (iii) ではその 2 つを組み合わせる。すなわち、法線が G を通るような曲面上の点の個数を数えるのである。

解答

以下、曲線を $0 \le x \le r$ において $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$ と表す。この曲線は y 軸上の点 $(0, r)$ から x 軸上の点 $(r, 0)$ まで下っていき、その間では $y \ge 0$ である。

小問 (i)

立体を y 軸のまわりの薄い円筒殻（cylindrical shell）に分割する。半径 x、厚さ δx、高さ y の円筒殻の体積は $2\pi x y\,\delta x$ であり、密度は一様（uniform）であるから、その重心

は高さ $\frac{1}{2}y$ にある。よって、体積と xz 平面に関するモーメント（moment）は

$$V = 2\pi \int_0^r xy \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

である。1 つ目の積分は

$$\int_0^r x \,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}} \left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) = \frac{n\, r^3}{2(n+2)},$$

であるから、$V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$ となる。2 つ目については $(r^n - x^n)^2$ を展開して

$$\begin{aligned} \int_0^r x \,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}} \,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

を得るので、$V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$ である。割り算をすると

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

となり、求める結果が得られる。対称性により、重心は y 軸上にある。

小問 (ii)

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$ であり、$x = rp$ においてこれは $-np^{n-1}$ となる。$p > 0$ であるからこれは 0 ではなく、したがって法線の傾き（gradient）は $\dfrac{1}{np^{n-1}}$、その方程式は

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

である。$x = 0$ を代入すると

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

となり、これが求める結果である。

$n = 4$ のとき、$Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

である。

考えてみよう この停留点が単なる極大値ではなく最大値を与えることは、どうしてわかるのだろうか？

$p>0$ において $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$ の符号は $1-8p^6$ の符号に一致し、$p^6<\frac{1}{8}$ では正、$p^6>\frac{1}{8}$ では負である。よって Y は $p^6=\frac{1}{8}$、すなわち $p^2=\frac{1}{2}$、$p=1/\sqrt{2}$（これは $(0,1]$ に含まれる）まで増加し、その後は減少する。したがって、これは区間全体での最大値であり、

$$Y_{\max}=r\left(1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\cdot 2\right)=\tfrac{1}{4}r.$$

である。

小問 (iii)

2 つの部分。 上側の境界 $r^3y=r^4-x^4$ は小問 (i) の曲線で $n=4$ としたものであるから、上の部分（$y=0$ より上）は小問 (i) の立体で $n=4$ としたものである。下側の境界 $ry=-(r^2-x^2)$ は $n=2$ の曲線 $ry=r^2-x^2$ を x 軸に関して折り返したものであるから、下の部分は $n=2$ の立体を上下逆さにしたものである。両者は平面 $y=0$ 上の半径 r の円周の縁で接合している。小問 (i) の $V=\pi nr^3/(n+2)$ を用いると、次のようになる。

	体積	重心の高さ
上（$n=4$）	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10}=\frac{2}{5}r$
下（$n=2$、折り返し）	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6}=-\frac{1}{3}r$

モーメントをとると（先ほどと同様に密度は一様と仮定する）、

$$\bar{y}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}}=\frac{3r}{35},$$

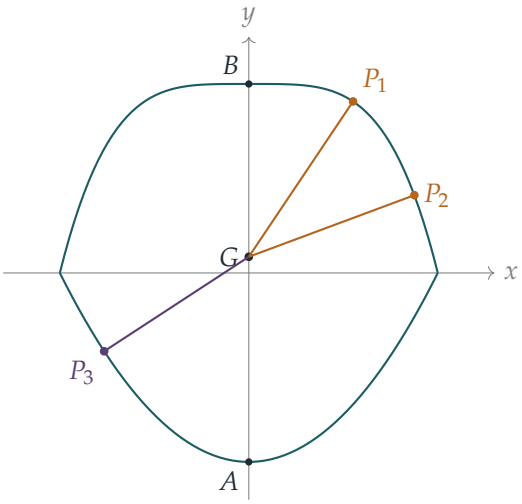
となるので、$G=\left(0,\frac{3}{35}r\right)$ であり、縁より少しだけ上にある。

平衡の条件。

考えてみよう 接点における法線が G を通らなければならないのはなぜだろうか？

曲面上の 1 点 P で台に接して静止しているとき、立体にはたらく力は G に鉛直にはたらく重力と、P にはたらく台からの抗力だけである。2 力がつり合うのは、それらが大きさが等しく、向きが反対で、同一直線上にあるときに限られるので、G は P の鉛直上方になければならない。台の面は P における接平面（tangent plane）であるから、P を通る鉛直線はそこでの立体の法線である。すなわち、P における法線は G を通らなければならない。逆に、法線が G を通るならば、立体はそこで静止できる。なぜなら、

立体は凸（convex）であり（断面の曲線 $y = r - x^4/r^3$ は凹（concave）、$y = (x^2 - r^2)/r$ は凸である）、したがって P における接平面の片側に完全に収まるからである。回転面（surface of revolution）の法線は軸を含む平面内にあるので、xy 平面による断面だけを考えればよい。G は軸上にあるので、y 軸と $Y = \frac{3}{35}r$ で交わる法線を求めればよい。



上側の曲面で接する場合。 小問 (ii) で $n = 4$ とすると（$r(1 - p^4)$ は点の高さ）、点 $\big(rp, r(1 - p^4)\big)$ における法線は軸と $r\big(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\big)$ で交わる。これを $\frac{3}{35}r$ に等しいとおき、$140p^2$ を掛けると

$$140p^2 - 140p^6 - 35 = 12p^2 \iff h(q) := 140q^3 - 128q + 35 = 0, \quad q = p^2.$$

を得る。ここで $h(0) = 35 > 0$、$h(\frac{1}{2}) = 17.5 - 64 + 35 = -11.5 < 0$、$h(1) = 47 > 0$ である。よって h は根 $q_1 \in (0, \frac{1}{2})$ と根 $q_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ をもち、上側の曲面上に $0 < p_1 < 1/\sqrt{2} < p_2 < 1$ を満たす 2 点 P_1, P_2 が得られる。（これは小問 (ii) から予想されることである。$\frac{3}{35}r$ は最大値 $\frac{1}{4}r$ より小さいので、この値は最大点の両側でそれぞれ 1 回ずつとられる。）

下側の曲面で接する場合。 $n = 2$ の曲線では、パラメータ p における法線は軸と $r(1 - p^2 - \frac{1}{2}) = r(\frac{1}{2} - p^2)$ で交わる。x 軸に関して折り返すと、下側の曲面上の点 $\big(rp, -r(1 - p^2)\big)$ における法線は軸と $r(p^2 - \frac{1}{2})$ で交わる。これを $\frac{3}{35}r$ に等しいとおくと

$$p^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{35} = \tfrac{41}{70}, \qquad p_3 = \sqrt{41/70} \in (0, 1),$$

となり、3 つ目の点 P_3 が得られる（用いている半断面では $p > 0$ なので正の根をとる。図に示したのはその鏡像であり、対称性により同等である）。

3 つの角は互いに異なり、いずれも 0 でない。 立体が P で静止しているとき、上向きの鉛直方向は P から G へ向かう方向、すなわち P における内向きの法線の方向である。

- 下側の P_3 では、内向きの法線 $(-2p_3, 1)$（曲線の傾きは $2p_3$）は上を向いており、y 軸の正の向きを向く $\overrightarrow{AB}$ と鋭角 $\arctan(2p_3)$ をなす。
- 上側の P_1 または P_2 では、内向きの法線 $(-4p^3, -1)$ は下を向いているので、$\overrightarrow{AB}$ とのなす角は鈍角 $180^\circ - \arctan(4p^3)$ である。

$p_1 \neq p_2$ であり、$\arctan(4p^3)$ は狭義単調増加であるから、2 つの鈍角は互いに異なり、いずれも鋭角の方とも異なる。また $p_1, p_2, p_3 > 0$ であるから、いずれも 0 ではない。よって、立体は $\overrightarrow{AB}$ が上向きの鉛直方向と互いに異なる 3 つの 0 でない角をなす状態で平衡（equilibrium）を保って静止でき、題意が示された。

（実際にはこれ以外にもある。立体は縁で釣り合うこともでき、また $\overrightarrow{AB}$ が真下を向いた状態で B で釣り合うこともできる。問題に答えるには、曲面上の 3 つの位置で十分である。）

検算

- 小問 (i) で $n = 2$ とすると、高さ r の放物面（paraboloid）に対して $\frac{1}{3}r$ を得る。これは、中身の詰まった放物面の重心は頂点から底面までの 3 分の 2 の位置にあるという標準的な結果に一致する。$n \to \infty$ のとき立体は高さ r の円柱に近づき、$\bar{y} \to \frac{1}{2}r$ となるが、これも当然そうあるべき結果である。
- 小問 (ii) で、$n = 4$、$p = 1$（縁）のとき $Y = -\frac{1}{4}r$ を得る。そこでの傾きは -4 であるから、法線の傾きは $\frac{1}{4}$ であり、水平距離 r の間に $\frac{1}{4}r$ だけ下がる。結果は一致している。
- $r = 1$ のとき、根は $p_1 \approx 0.552$、$p_2 \approx 0.876$、$p_3 \approx 0.765$ であり、角はおよそ 146.1°、110.4°、56.8° である。台からの G の高さが停留する傾きをコンピュータで探索したところ、0° と 180° の間（両端を除く）に見つかったのはちょうどこの 3 つと、縁で接する位置（約 85.1°）であった。

よくある間違い

- 下の部分の重心を $+\frac{1}{3}r$ に置いてしまうこと。下の部分は $n = 2$ の立体を上下逆さにしたものなので、その重心は縁より下にある。
- x を y の $\frac{2}{n}$ 乗で表したまま、円板（disc）の体積 $\pi x^2\,\delta y$ を用いること。この方法で

も解けるが、円筒殻による方法なら多項式の積分で済む。

- $q = p^2$ に関する 3 次方程式を求めたものの、それが $0 < p < 1$ を満たす根を 2 つもつことを示していないこと。$q = 0, \frac{1}{2}, 1$ での符号を調べれば決着がつく。

STEP のその先へ

法線が G を通るという条件は、物体が転がるときに G の高さが停留するという条件であり、その高さは位置エネルギー（potential energy）にほかならない。安定（stable）な位置はその極小点、不安定な位置はその極大点である。滑らかな凸の物体は少なくとも 2 つの平衡位置をもたなければならないが、2006 年に発見された「ゲンボツ（Gömböc）」は、安定な位置と不安定な位置をそれぞれ 1 つずつしかもたない凸の形状である。位置エネルギーと安定性の一般的な理論は、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）に詳しい。

解答例

STEP III 2025、第 10 問

力学 ・ 動く板上の摩擦

STEP III 2025、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

まず h についての微分方程式（differential equation）を解く。これは単振動（simple harmonic motion）の方程式であり、板の傾斜角（angle of inclination）が一定の割合 ω で増加することを意味している。角度がわかれば、質点の位置は板に沿って一定の割合の位置にあるので、2 回微分すれば加速度が得られる。力はニュートンの第二法則（Newton's second law）から求まるが、水平・鉛直方向に分解するよりも、板に垂直な方向と板に沿った方向に分解するほうがはるかに見通しがよい。

解答

板を剛体の棒（rigid rod）、P を質点（particle）とみなす。板が水平となす角を θ とする。

小問 (i)

方程式 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$ の一般解（general solution）は $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ である。条件 $\mathrm{h}(0) = 0$ より $a = 0$、$\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$ より $b = L$ であるから、

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

A の高さは h で板の長さは L なので、$\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$、よって $\theta = \omega t$ である（$0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で考える。これが運動の全体である。それ以降は A が高さ L を超えなければならなくなる）。したがって $A = (0, L\sin\omega t)$、$B = (L\cos\omega t, 0)$ である。

点 C は A から B へ向かって割合 s だけ進んだ点なので、$C = A + s(B - A)$ であり、

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

前者が求める x 座標であり、後者はそれに対応する y 座標の式である。

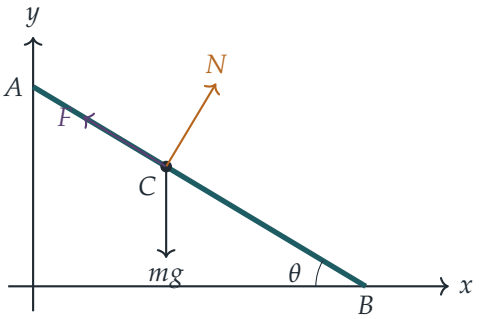
小問 (ii)

t について 2 回微分すると、

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos \omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin \omega t.$$

小問 (iii)

P にはたらく力は、下向きの重力 mg、板に垂直な（上向きの）垂直抗力（normal reaction）N、板に沿った摩擦力（friction）F である。F は斜面を上る向き、すなわち A へ向かう向きを正とする。



$\theta = \omega t$ として、板に垂直な（上向きの）単位ベクトル（unit vector）は $(\sin\theta, \cos\theta)$、板に沿って A へ向かう単位ベクトルは $(-\cos\theta, \sin\theta)$ である。運動方程式（equation of motion）$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$ をこの 2 方向に分解する（すなわち、それぞれの単位ベクトルとの内積（dot product）をとる）。

板に垂直な方向。

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2\big(s + (1-s)\big)\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

$L\omega^2 = kg$ を用いると、

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

となり、示すべき式が得られた。

板に沿って A へ向かう方向。

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2\big(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta\big) = mgk\big(s - \sin^2\theta\big), \end{aligned}$$

ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いた。よって

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

すなわち $F = mgsk + N\tan\omega t$ であり、示すべき式が得られた。$N > 0$ であれば常に F は正になることに注意しよう。つまり、P が板に押しつけられている間、摩擦力は常に板を上る向きにはたらく。

小問 (iv)

$\mu = \tan\alpha$ とおく。$N > 0$ である間、質点が滑らずに C にとどまるための必要十分条件は $|F| \le \mu N$ である。このとき $F > 0$ なので、これは $F/N \le \tan\alpha$ となる。小問 (iii) の結果を N で割ると、

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

初めは $\theta = 0$ なので、$N = mg > 0$ かつ $F/N = sk$ である。よって $sk < \tan\alpha$ であれば、最初の時点で質点は滑らない。

? **考えてみよう** N が 0 になる前に、比 F/N が必ず $\tan\alpha$ に達するのはなぜか。

いま $sk < \tan\alpha$ と仮定する。因子 $\cos\theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で 0 になり、$k > 1$ のときは因子 $1 - k\sin\theta$ がそれより早く $\sin\theta = 1/k$ で 0 になる。$N = 0$ となる最初の角を θ_0 とする（$\frac{\pi}{2}$ または $\arcsin(1/k)$ のいずれか）。$0 \le \theta < \theta_0$ では $N > 0$ であり、F/N は連続（continuous）である。$\theta \to \theta_0^-$ のとき、分母 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$ は正の値をとりながら 0 に近づき、分子 sk は一定の正の数なので、第 1 項は $+\infty$ に発散する（$\tan\theta$ は有界であるか、やはり $+\infty$ に発散する）。よって $F/N \to +\infty$ である。

したがって F/N は $sk < \tan\alpha$ から始まり、N が 0 になる前に限りなく大きくなる。中間値の定理（intermediate value theorem）により、$F/N = \tan\alpha$ となる最初の角 $\theta_1 < \theta_0$ が存在し、そこで質点は滑り始める。これは N がまだ正である角で起こるので、1 つ目の主張が示された。

この角において、$sk > 0$ かつ $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$ であるから、

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α と θ_1 はともに $[0, \frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は増加関数なので、$\theta_1 < \alpha$ である。すなわち、滑り始めるとき板が水平となす角は α より小さい。これが 2 つ目の主張である。

2 つ目の主張は、見かけほど意外なものではない。固定された板の上に静止している質点は、板の角度が摩擦角（angle of friction）α に達したちょうどそのときに滑り始める。ここでは板が加速しているので、質点を板とともに運ぶのに余分な力（$mgsk$ の項）が必要となり、そのぶん摩擦力が早く限界に達するのである。

検算

- $t = 0$ では板は水平であり、質点の加速度は水平方向の $(-sL\omega^2, 0)$ である。このとき $N = mg$ と $F = msL\omega^2 = mgsk$ がちょうどその加速度を生じるはずであり、実際そうなっている。
- $\omega \to 0$（したがって $k \to 0$）のとき、板は非常にゆっくりと持ち上げられる。このとき $N \to mg\cos\theta$、$F \to mg\sin\theta$ となり、固定された斜面上でのおなじみのつり合いの値になる。滑りは $\theta = \alpha$ で起こり、これは今回の不等式の境界にあたる。
- 数値例として、$s = \frac{1}{2}$、$k = \frac{1}{2}$、$\alpha = \frac{\pi}{4}$（よって $sk = \frac{1}{4} < 1$）とし、$F/N = 1$ を解くと、滑りは $\theta \approx 0.545$ rad、約 $31°$ で起こる。このとき $N \approx 0.63mg > 0$ かつ $\theta < 45°$ である。$sk < \tan\alpha$ を満たす s、k、α を数千通り無作為に選んでコンピュータで確かめたところ、いずれの場合も $N > 0$ のまま α より小さい角で滑りが起こった。

よくある間違い

- θ を B における角ではなく A における角としてしまう。そうすると正弦と余弦が入れ替わり、与えられた式が出てこない。
- 水平方向と鉛直方向に分解し、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ だらけの連立方程式（simultaneous equations）を解こうとする。板に沿った方向と垂直な方向に分解すれば、N と F はただちに分離される。
- 小問 (iv) で、θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づく場合だけを論じ、$k > 1$ のときは垂直抗力がそれより早く $\sin\theta = 1/k$ で 0 になることを忘れる。

STEP のその先へ

この問題は、運動する座標系における力を扱っている。板から見ると、質点には点 C の加速度の $-m$ 倍に等しい余分な「見かけの力」（fictitious force）がはたらいて感じられ、$mgsk$ の項はまさに最初の時点でのその慣性力（inertial force）である。大学では、この考え方が発展して、遠心力（centrifugal force）やコリオリ力（Coriolis force）を含む、加速・回転する座標系（reference frame）の完全な理論となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系（non-inertial frame）を多くの例題とともに扱っている。

解答例

STEP III 2025、第 11 問

確率・統計 ・ 最大値の分布

STEP III 2025、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.25 節「**多数の中の最大値**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/extremes.html

鍵となる考え方

X_i の最大値（maximum）が y 以下であるのは、**すべての** X_i が y 以下であるときであり、かつそのときに限る。そして独立性（independence）により、これは積に書き換えられる。あとは G から分位点（quantile）を読み取り、n が大きいときにそれらがどうなるかを調べることに尽きる。決め手となる近似（approximation）はただ一つ、$\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n} \approx 1 + \frac{\ln\alpha}{n}$ である。これは n が大きいとき $(\ln\alpha)/n$ が小さいことによる。

解答

小問 (i)

$x \geq 0$ に対して

$$F(x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ であるから、事象 $\{Y \leq y\}$ は、すべての i について $X_i \leq y$ となる事象と同じである。X_i は互いに独立であるから、$y \geq 0$ に対して

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X_1 \leq y) \cdots \mathrm{P}(X_n \leq y) = F(y)^n = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)^n,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

Y は連続型確率変数（continuous random variable）であるから、$\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = G(y)$ である。したがって $L(\alpha)$ に関する条件は $G(L(\alpha)) = \alpha$ となる。

$$\begin{aligned}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}\right)^n = \alpha &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda L} = \alpha^{1/n} \qquad \text{（正の } n \text{ 乗根をとる）} \\ &\iff \mathrm{e}^{-\lambda L} = 1 - \alpha^{1/n} \\ &\iff L(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right).\end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$ より $0 < \alpha^{1/n} < 1$ であるから、この対数は定義される。

$U(\alpha)$ については、条件 $\mathrm{P}(Y > U) = \alpha$ は $G(U) = 1 - \alpha$ を意味するので、α を $1 - \alpha$ に置き換えて同じ手順をたどると

$$U(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - (1-\alpha)^{1/n}\right).$$

が得られる。$\alpha \leq \frac{1}{2} \leq 1 - \alpha$ であり G は増加関数であるから、$L(\alpha) \leq U(\alpha)$ であり、等号が成り立つのは $\alpha = \frac{1}{2}$ のときに限る。

小問 (iii)

$\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n}$ と書く。α を固定して n を大きくすると $t = (\ln\alpha)/n$ は小さいので、$\mathrm{e}^t \approx 1 + t$ より

$$1 - \alpha^{1/n} \approx -\frac{\ln\alpha}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

$\alpha < 1$ であるから、これは正であることに注意する。小問 (ii) に代入すると

$$\lambda L(\alpha) = -\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right) \approx -\ln\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right) = \ln(n) - \ln\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right).$$

考えてみよう 近似式の対数をとってもよいのだろうか。$1 - \alpha^{1/n}$ 自体はごく小さいので、$1 - \alpha^{1/n}$ の誤差がそれに比べて大きくなってしまうおそれがある。

重要なのは**相対誤差**（relative error）である。$t = (\ln\alpha)/n$ とおくと $1 - \mathrm{e}^t = -t\left(1 + \frac{t}{2} + \cdots\right)$ であるから、真の値と近似値の比は $1 + O(1/n)$ である。対数をとると、$\lambda L(\alpha)$ の誤差は $\ln(1 + O(1/n))$ となり、これは 0 に収束する。したがって、この近似は n が大きいときによい近似であるというだけでなく、両辺の差が実際に 0 に収束するのである。

小問 (iv)

Y の中央値（median）m は $G(m) = \frac{1}{2}$ を満たすので、$m = L(\frac{1}{2})$（これは $U(\frac{1}{2})$ でもある）である。小問 (iii) より

$$\lambda m \approx \ln n - \ln(\ln 2).$$

$\ln(\ln 2)$ は定数（約 -0.37）であり $\ln n \to \infty$ であるから、n が増加すると中央値は無限大に発散する。

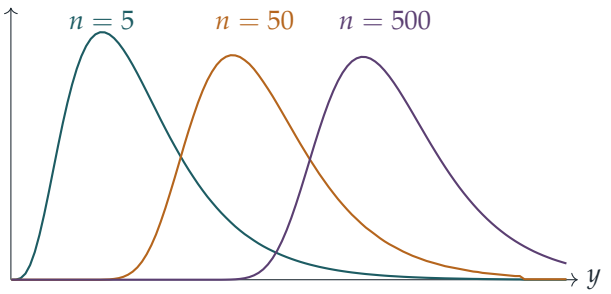
$U(\alpha)$ については、小問 (iii) で α を $1-\alpha$ に置き換えると

$$\lambda U(\alpha) \approx \ln n - \ln\left(\ln \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

差をとると $\ln n$ の項が打ち消し合う。

$$U(\alpha) - L(\alpha) \approx \frac{1}{\lambda}\left[\ln\left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) - \ln\left(\ln \frac{1}{1-\alpha}\right)\right].$$

（上の囲みで見たように）両方の近似の誤差は 0 に収束するので、区間の幅はこの値に収束する。この値は α と λ には依存するが n には依存しない。つまり n が大きくなると、Y の分布は広がることなく、$\frac{1}{\lambda}\ln n$ のように無限大へと移動していく。



図は $\lambda = 1$ のときの Y の確率密度関数（density）を示している。n が 10 倍になるごとに曲線は右へ約 $\ln 10 \approx 2.3$ だけ移動し、その形は一定のものに落ち着いていく。

小問 (v)

$\alpha = 0.05$ とする。このとき

$$\mathrm{P}\big(L(\alpha) \le Y \le U(\alpha)\big) = 1 - \mathrm{P}(Y < L) - \mathrm{P}(Y > U) = 1 - 2(0.05) = 0.9,$$

であるから、n の値によらず、Y はちょうど確率 0.9 で区間 $[L(0.05), U(0.05)]$ に含まれる。n が大きいとき、小問 (iv) よりこの区間の幅はおよそ

$$\frac{1}{\lambda}\left[\ln(\ln 20) - \ln\left(\ln \frac{1}{0.95}\right)\right].$$

である。ここで、与えられた二つの事実を用いる。

- $e^3 \approx 20$ であるから $\ln 20 \approx 3$ となり、$\ln(\ln 20) \approx \ln 3 \approx 1.1$ である。
- $t = -0.05$ として $\ln(1+t) \approx t$ を用いると $\ln \frac{1}{0.95} = -\ln(1-0.05) \approx 0.05 = \frac{1}{20}$ となるので、$\ln\left(\ln \frac{1}{0.95}\right) \approx \ln \frac{1}{20} = -\ln 20 \approx -3$ である。

よって幅はおよそ

$$\frac{1}{\lambda}(\ln 3 + 3) \approx \frac{4.1}{\lambda} \approx 4\lambda^{-1},$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- 小問 (ii) で $L(\alpha)$ を G に代入し直すと、ちょうど $\left(1-(1-\alpha^{1/n})\right)^n = \alpha$ となる。
- $\alpha = 0.05$、$n = 10^4$ のとき、$\lambda L(\alpha)$ の真の値は 8.11330 であり、近似式 $\ln n - \ln\ln 20$ の値は 8.11315 である。$n = 10$ のときはそれぞれ 1.35 と 1.21 であり、「十分大きい」（sufficiently large）という条件が本当に重要であることがわかる。
- 小問 (v) の極限における幅の正確な値は $4.067/\lambda$ であり、$4/\lambda$ に十分近い。また、5 個の指数分布に従う確率変数の最大値をコンピュータでシミュレーションしたところ、$G(y)$ と小数第 3 位まで一致した。

よくある間違い

- $G(y) = 1-(e^{-\lambda y})^n$ と書いてしまう。これは最大値ではなく**最小値**（minimum）の累積分布関数（cumulative distribution function）である。
- $P(Y > U) = \alpha$ を $G(U) = 1-\alpha$ ではなく $G(U) = \alpha$ としてしまう。
- 小問 (v) で $\alpha = 0.1$ を選んでしまう。区間の外側には両側それぞれに 0.1 ではなく 0.05 を残さなければならない。

STEP のその先へ

これは**極値理論**（extreme value theory）への最初の入り口である。小問 (iii) が実際に示しているのは、$\lambda Y - \ln n$ が極限分布をもち、$P(\lambda Y - \ln n \le x) \to \exp(-e^{-x})$ となることである。これはガンベル分布（Gumbel distribution）と呼ばれ、記録的な洪水、1 年間で最も強い突風、最大の保険金請求額などのモデルとして用いられる。適切に尺度を変換した最大値の極限分布は三つの分布族のいずれかに限られる、という驚くべき定理がある。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は順序統計量（order statistics）を扱っており、最初に読む本として適している。

解答例

STEP III 2025、第 12 問

確率・統計　・　再帰的に定まる確率変数

> **STEP III 2025、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は、一つの二重和（double sum）を二通りに書いただけのものである。両辺とも同じ組 (r,s) の集合にわたって $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ を足し合わせており、一方は行ごとに、もう一方は列ごとに数えている。小問 (ii) では、直前の値 X_{n-1} で条件付けると、各確率 $\mathrm{P}(X_n = r)$ がちょうど (i) の左辺に現れる形の和として表される。そこで和をとる順序を入れ替えると、$\mathrm{E}(X_n)$ が $\mathrm{E}(X_{n-1})$ を用いて表せる形になる。

解答

小問 (i)

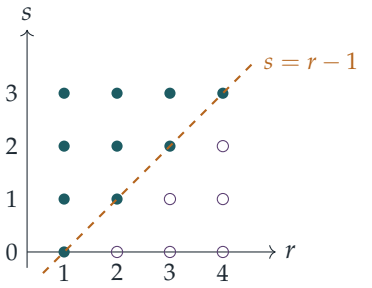
括弧を展開すると、左辺は

$$\sum_{r=1}^{m+1}\ \sum_{s=r-1}^{m} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s),$$

となる。これは

$$1 \le r \le m+1 \quad \text{かつ} \quad r-1 \le s \le m.$$

を満たすすべての整数の組 (r,s) にわたる $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ の和である。同じ組の集合を、先に s を固定して記述し直す。条件から $0 \le s \le m$ が必要であり（$s \ge r-1 \ge 0$ だからである）、そのような s を一つ固定すると、許される r は $1 \le r$ かつ $r \le s+1$ を満たすものである。$s+1 \le m+1$ であるから、このとき $r \le m+1$ という制約は自動的に満たされることに注意する。逆に、$0 \le s \le m$ かつ $1 \le r \le s+1$ を満たす任意の組は元の条件を満たす。下の図は $m = 3$ の場合の組がなす三角形を示している。



列ごとに（r を固定して）足すと左辺が得られ、行ごとに（s を固定して）足すと

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{s+1} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s) = \sum_{s=0}^{m}\Big(\mathrm{g}(s)\sum_{r=1}^{s+1}\mathrm{f}(r)\Big),$$

が得られる。これは右辺であり、示すべきことが示された。和は有限和なので、順序の入れ替えは常に許される。

小問 (ii)(a)

X_1 は等確率で 0 または 1 をとるので、$\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$ である。

X_2 については、X_1 で条件付ける。$X_1 = 0$ ならば X_2 は $\{0,1\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、$X_1 = 1$ ならば X_2 は $\{0,1,2\}$ 上の一様分布に従う。全確率の公式（law of total probability）より

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = 0) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 1) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},
\end{aligned}$$

となり、示すべき結果が得られる（三つの和が 1 になることは有用な検算である）。したがって

$$\mathrm{E}(X_2) = 0\cdot\tfrac{5}{12} + 1\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

小問 (ii)(b)

帰納法（induction）により、X_{n-1} は $\{0,1,\ldots,n-1\}$ の値をとる（各段階でとりうる最大値が一つずつ増える）。$X_{n-1} = s$ のもとで、X_n は $s+2$ 個の値 $0,1,\ldots,s+1$ 上の一様分布に従うので

$$\mathrm{P}(X_n = r \mid X_{n-1} = s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+2}, & 0 \le r \le s+1,\\[2mm] 0, & r > s+1. \end{cases}$$

値 $r=0$ は常にとりうるので、全確率の公式より

$$\mathrm{P}(X_n=0)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2}.$$

$1\le r\le n$ のときは、$s+1\ge r$、すなわち $s\ge r-1$ を満たす s のみが寄与する：

$$\mathrm{P}(X_n=r)=\sum_{s=r-1}^{n-1}\frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2},\qquad r=1,2,\dots,n.$$

（$r=1$ のときこれは $r=0$ のときと同じ和なので、すべての $n\ge 1$ に対して $\mathrm{P}(X_n=0)=\mathrm{P}(X_n=1)$ であり、(a) の二つの値 $\frac{5}{12}$ と一致する。）

小問 (ii)(c)

$p_s=\mathrm{P}(X_{n-1}=s)$ とおく。$r=0$ の項は期待値（expectation）に寄与しないので、(b) より

$$\mathrm{E}(X_n)=\sum_{r=1}^{n}r\,\mathrm{P}(X_n=r)=\sum_{r=1}^{n}\Bigl(r\sum_{s=r-1}^{n-1}\frac{p_s}{s+2}\Bigr).$$

考えてみよう ここで小問 (i) はどのように使えるか？

これは (i) の左辺で $m=n-1$（$n\ge 1$ なので許される）、$\mathrm{f}(r)=r$、$\mathrm{g}(s)=p_s/(s+2)$ としたものである。和の順序を入れ替えると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_n)&=\sum_{s=0}^{n-1}\Bigl(\frac{p_s}{s+2}\sum_{r=1}^{s+1}r\Bigr)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{p_s}{s+2}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,p_s=\frac{1}{2}\Bigl(\sum_{s=0}^{n-1}p_s+\sum_{s=0}^{n-1}s\,p_s\Bigr)\\&=\tfrac{1}{2}\bigl(1+\mathrm{E}(X_{n-1})\bigr),\end{aligned}$$

となる。ここで $\sum p_s=1$ を用いた。これが示すべき結果である。

直観的には次のとおりである。$X_{n-1}=s$ のもとで、$\{0,\dots,s+1\}$ 上の一様分布に従う確率変数の平均は $\frac{1}{2}(s+1)$ であるから、これは形を変えた期待値の繰り返し公式（tower law）にほかならない。

漸化式（recurrence relation）を解くため、$e_n=\mathrm{E}(X_n)$ とおく。両辺から 1 を引くと

$$e_n-1=\tfrac{1}{2}\,(e_{n-1}-1),$$

となるので、e_n-1 は各段階で半分になる。$e_0=0$ であるから $e_n-1=-\bigl(\frac{1}{2}\bigr)^n$、すなわち

$$\mathrm{E}(X_n)=1-\frac{1}{2^n},\qquad n=1,2,\dots.$$

検算

この公式から $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{4}$ が得られ、(a) と一致する。X_n の正確な分布を $n = 15$ まで一段ずつ計算すると、(b) の式と $\mathrm{E}(X_n) = 1 - 2^{-n}$ の両方が確かめられる。たとえば $\mathrm{E}(X_5) = \frac{31}{32} \approx 0.969$ であり、200 000 回の計算機シミュレーションでは 0.967 が得られた。$n \to \infty$ のとき平均は 1 に近づくが、これはもっともらしい。各段階で平均が 1 に向かって半分ずつ引き寄せられるからである。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X_n = r)$ の和を $s = r - 1$ ではなく $s = r$ から始めてしまう。X_n は $X_{n-1} + 1$ まで上がりうるので、値 r には $s = r - 1$ から到達できる。
- (c) で順序を入れ替える際に和の範囲を誤る。入れ替えた後は r が 1 から $s + 1$ まで動き、$\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ が得られて、因数 $s + 2$ がきれいに約分される。
- e_1 を初期値として漸化式を解いたのに $1 - 2^{-(n-1)}$ と書いてしまう。$e_1 = \frac{1}{2}$ と照らし合わせて確認すること。

STEP のその先へ

ここでの過程はマルコフ連鎖（Markov chain）である。X_n の分布は X_{n-1} のみに依存し、(b) は確率ベクトル（probability vector）に推移行列（transition matrix）を掛ける操作の一段分にあたる。(c) の近道は全期待値の公式（law of total expectation）$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1})\big)$ であり、これによってこの種の多くの問題が線形漸化式に帰着される。どちらの考え方も Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2025 年解答例. 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

