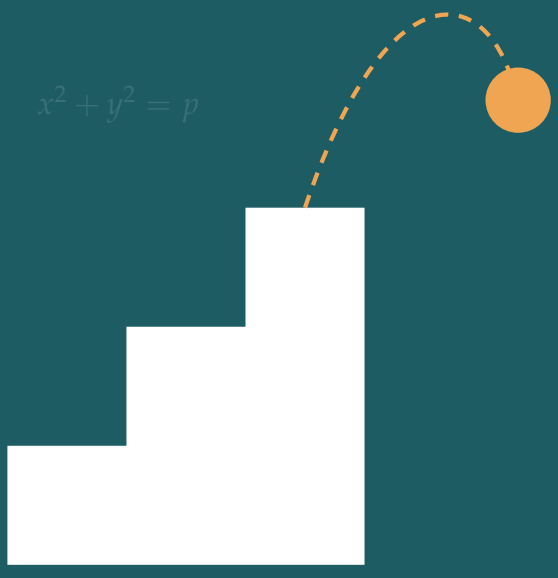
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP II と III

2024 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP II と III

2024 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2024 年解答例

2024 年の STEP 問題（STEP II と III）の全 24 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP II

Q1 連続する整数の和 純粋数学 . . . 3
Q2 級数と積分 純粋数学 . . . 7
Q3 半角の正接による置換 純粋数学 . . . 11
Q4 ベクトルと角の二等分線 純粋数学 . . . 16
Q5 値域とディオファントス方程式 純粋数学 . . . 21
Q6 二項級数の係数 純粋数学 . . . 25
Q7 曲線の概形 純粋数学 . . . 29
Q8 算術幾何平均 純粋数学 . . . 34
Q9 放物運動 力学 . . . 39
Q10 加速するくさび上の摩擦 力学 . . . 43
Q11 グループ検査の期待値 確率・統計 . . . 48
Q12 離散順序統計量 確率・統計 . . . 52

STEP III

Q1 望遠鏡型級数 純粋数学 . . . 56
Q2 不等式と絶対値 純粋数学 . . . 60
Q3 単調関数と導関数 純粋数学 . . . 65
Q4 放物線の接線 純粋数学 . . . 69
Q5 行列微分方程式 純粋数学 . . . 74
Q6 線形微分方程式 純粋数学 . . . 79
Q7 e の 2 乗の無理性 純粋数学 . . . 83
Q8 交わる 2 次曲線 純粋数学 . . . 87
Q9 斜め衝突 力学 . . . 92
Q10 転倒と滑り 力学 . . . 97

Q11 二項分布の期待値 確率・統計 102
Q12 幾何的確率 確率・統計 106

解答例

STEP II 2024、第 1 問

純粋数学 ・ 連続する整数の和

STEP II 2024、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

両辺はともに等差数列の和（arithmetic series）であるから、それぞれ（項数）×（項の平均）である。これらを等しいとおくと、n、k、c の間の 2 次の関係式が 1 つ得られ、問題の残りはこの関係式についての整数論（number theory）である。k を固定すれば c について解くのは易しく、偶奇（parity）や余りによって c が正の整数となるのはいつかが決まる。代わりに $c = 1$ と固定するとペル方程式（Pell equation）の形の方程式が得られ、(iv)(b) の写像は既知の解から新しい解を作る標準的な方法である。

解答

小問 (i)

c から始まる $n + k$ 個の整数は $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$ である。その和は

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

続く n 個の整数は $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$ であり、その和は

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

両方の和を 2 倍して展開すると、

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

引き算すると $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$ である。よって

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

どの段階も逆にたどることができる（展開し、2 倍し、移項しただけである）から、和が等しいことは $2n^2+k=2ck+k^2$ と同値であり、これが示すべきことであった。

小問 (ii)

(a) $k=1$ のとき条件は $2n^2+1=2c+1$ となるので、$c=n^2$ である。これはすべての n に対して正の整数であるから、**すべての**正の整数 n が条件を満たし、そのとき $c=n^2$ である。（例えば $n=2$ のとき $4+5+6=7+8$ である。）

(b) $k=2$ のとき条件は $2n^2+2=4c+4$、すなわち

$$n^2=2c+1, \qquad c=\frac{n^2-1}{2}.$$

c が整数であるためには n^2 が奇数、したがって n が奇数でなければならない。c が正であるためには $n^2>1$ が必要であり、これにより $n=1$ は除外される。逆に、奇数で $n\geq 3$ ならば常に正の整数 c が得られる。よって可能な値は

$$n\in\{3,5,7,\dots\}, \qquad c=\tfrac{1}{2}(n^2-1).$$

$n=3$、$c=4$ の場合は等式 $4+5+6+7+8=9+10+11$ である。

小問 (iii)

$k=4$ のとき条件は $2n^2+4=8c+16$、すなわち

$$n^2=4c+6=4(c+1)+2.$$

よって n^2 を 4 で割った余りは 2 となるはずである。しかし平方数の余りは 0 か 1 である。実際、$n=2m$ ならば $n^2=4m^2$ であり、$n=2m+1$ ならば $n^2=4(m^2+m)+1$ である。したがって解は存在しない。

小問 (iv)

$c=1$ のとき条件は $2n^2+k=2k+k^2$、すなわち

$$2n^2=k(k+1). \qquad (*)$$

言い換えれば $n^2=\frac{1}{2}k(k+1)$ であり、平方数でもある三角数（triangular number）を求めればよい。

(a) 小さい k で試してみる。$k=1$ のとき $2n^2=2$ なので $n=1$ である。次に $k=2,\dots,7$ では $k(k+1)/2=3,6,10,15,21,28$ となり、いずれも平方数ではない。そして $k=8$ のとき $2n^2=72$ なので $n=6$ である。よって 2 つの可能性は

$$k=1,\ n=1 \qquad \text{および} \qquad k=8,\ n=6.$$

（2 つ目を確かめよう：$1+2+\cdots+14=105$ であり、$15+16+\cdots+20=105$ である。）

(b) $2N^2=K^2+K$ と仮定する。$N'=3N+2K+1$、$K'=4N+3K+1$ とおく。すると

$$\begin{aligned}2N'^2&=2(9N^2+4K^2+1+12NK+6N+4K)\\&=18N^2+8K^2+24NK+12N+8K+2,\\K'^2+K'&=(16N^2+9K^2+1+24NK+8N+6K)+(4N+3K+1)\\&=16N^2+9K^2+24NK+12N+9K+2.\end{aligned}$$

引き算すると、仮定を用いて

$$2N'^2-(K'^2+K')=2N^2-K^2-K=0,$$

となる。よって $2N'^2=K'(K'+1)$ である。N と K は正の整数であるから N' と K' も正の整数であり、$(*)$ と小問 (i) により、N' は n の取りうる値で、対応する値は $k=K'$ である。

考えてみよう これらの奇妙な式はどこから来たのだろうか？

$(*)$ に 4 を掛けて 1 を加えると、$(2k+1)^2-8n^2=1$ となる。$x=2k+1$、$y=n$ とおくと、これはペル方程式 $x^2-8y^2=1$ であり、その解は $x+y\sqrt{8}$ に最小解 $3+\sqrt{8}$ を掛けることで次々に生成される。$(x+y\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=(3x+8y)+(x+3y)\sqrt{8}$ と書き、k と n に戻すと、ちょうど $N'=3N+2K+1$ および $2K'+1=3(2K+1)+8N$、すなわち $K'=4N+3K+1$ が得られる。

(c) 写像を $(N,K)=(1,1)$ に適用しても $N'=6$、$K'=8$、すなわち (a) の 2 つ目の解が得られるだけである。$(N,K)=(6,8)$ に適用すると

$$N'=18+16+1=35,\qquad K'=24+24+1=49,$$

となり、さらに $(35,49)$ に適用すると

$$N'=105+98+1=204,\qquad K'=140+147+1=288.$$

となる。よって、さらに 2 つの解は

$$k=49,\ n=35\qquad\text{および}\qquad k=288,\ n=204.$$

実際、$2\cdot35^2=2450=49\cdot50$ であり、$2\cdot204^2=83232=288\cdot289$ である。

検算

- 冒頭の例は $n=3$、$k=2$、$c=4$ であり、$2\cdot 9+2=20=2\cdot 4\cdot 2+4$ であるから (i) の関係式を満たし、$c=\frac{1}{2}(9-1)$ として (ii)(b) にも当てはまる。
- $n,k<40$ かつ $c<200$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、2 つの和が一致するのはちょうど $2n^2+k=2ck+k^2$ のときであることが確認された。また、$c=1$ かつ $n,k<400$ での探索では $(k,n)=(1,1),(8,6),(49,35),(288,204)$ のみが見つかり、(iv) と一致した。
- (iv)(b) において、(N,K) から (N',K') への操作は**任意の** N、K に対して量 $2N^2-K^2-K$ を保つことに注意しよう。これは小さい数で計算を手早く確かめる方法になる。例えば $N=K=0$ とすると $N'=K'=1$ となり、どちらの値も 0 である。

よくある間違い

- (ii)(b) に $n=1$ を含めてしまう。これは $c=0$ を与え、正の整数ではない。
- (i) で 2 つ目のまとまりの始まりを数え間違える。始まりは $c+n+k$ であり、$c+n+k+1$ ではない。
- (iv)(c) で再び $k=8$、$n=6$ を答えてしまう。これは写像の最初の出力であるが、(a) ですでに見つかっている。

STEP のその先へ

方程式 $x^2-8y^2=1$ はペル方程式であり、平方数でない任意の d に対して、$x^2-dy^2=1$ の解はすべて、数 $x+y\sqrt{d}$ の積を通じて、ただ 1 つの基本解（fundamental solution）のべきから得られる。これは $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ のような環における単数（unit）を初めて垣間見るものであり、単数は代数的整数論（algebraic number theory）の中心的な話題である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、連分数（continued fraction）を用いてペル方程式を扱っている。

解答例

STEP II 2024、第 2 問

純粋数学 ・ 級数と積分

STEP II 2024、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は、積分 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$ をすべて級数（series）に書き換えるものである。したがって、同じ材料から組み立てた級数は、どれもこれらの積分の組合せとして表せる。(ii) や (iii) の級数の値を求めるには、括弧の中身を $1/(3k+m+1)$ の形の項に分け、対応する被積分関数（integrand）を一つの分数にまとめ直してから積分すればよい。こうして得られる積分が計算できるのは、因数分解（factorisation）$8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$ のおかげである。

解答

以下、全体を通して

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

とおく。

小問 (i)

因数 8 をくくり出し、$|u|<1$ のときの $(1+u)^{-1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k u^k$ を $u=x^3/8$ として用いると、

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\Big(1+\frac{x^3}{8}\Big)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

これが成り立つのは $|x^3/8|<1$、すなわち $|x|<2$ のときである。

次に x^m を掛け、$[0,1]$ 上で項別に積分する。この区間は展開が成り立つ範囲に含まれ

ている（また、収束については気にしなくてよいと問題文に書かれている）。

$$I_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \cdot \frac{1}{3k+m+1},$$

ここで $n = 3k+m \geq 0$ に対して $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$ であることを用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)

三つの分母 $3k+3$、$3k+2$、$3k+1$ は、それぞれ $m = 2, 1, 0$ としたときの $3k+m+1$ である。よって小問 (i) により、この級数は

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 4}{8 + x^3}\,\mathrm{d}x.$$

に等しい。

考えてみよう なぜ $x^2 - 2x + 4$ が何かと約分できるはずなのだろうか？

それは $8 + x^3$ が二つの立方の和だからである。$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ に $a = x$、$b = 2$ を代入すると

$$8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

が得られる。したがって被積分関数は $\dfrac{1}{x+2}$ と簡単になり、級数は $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$ に等しい。これで示すべきことが示された。最後に、

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

小問 (iii)

まず括弧の中身を k についての部分分数（partial fractions）に分解する。$2k+1 = \alpha(3k+2) + \beta(3k+1)$ とおく。$k = -\frac{1}{3}$ を代入すると $\frac{1}{3} = \alpha$、$k = -\frac{2}{3}$ を代入すると $-\frac{1}{3} = -\beta$ となるので $\beta = \frac{1}{3}$ である。したがって

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

であり、小問 (i)（$m = 0$ と $m = 1$ の場合）により、この級数は

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}\,\mathrm{d}x.$$

に等しい。次に、この被積分関数を部分分数に分解する。

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4},$$

とおくと

$$1+x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2).$$

である。$x=-2$ を代入すると $-1=12A$ となり、$A=-\frac{1}{12}$ である。x^2 の係数を比較すると $0=A+B$ となり、$B=\frac{1}{12}$ である。定数項を比較すると $1=4A+2C$ となり、$C=\frac{2}{3}$ である。（x の係数で検算すると、$-2A+2B+C=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=1$ となり合っている。）24 を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2}+\frac{2x+16}{x^2-2x+4}\\ &= -\frac{2}{x+2}+\frac{2x-2}{x^2-2x+4}+\frac{18}{(x-1)^2+3},\end{aligned}$$

となる。ここでは、2 次式の導関数 $2x-2$ を分子から切り離し、残りの部分で平方完成（completing the square）を行った。

各部分を $[0,1]$ 上で積分する。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3+2\ln 2,\\ \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3-2\ln 2,\\ \int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1\\ &= 6\sqrt{3}\Big(0-\arctan\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

最後の行では、$u=x-1$、$c=\sqrt{3}$ として $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2}=\frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$ を用いた。三つの部分を足し合わせると $\ln 2$ の項は打ち消し合い、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3}-\ln 3,$$

となる。よって $a=3$、$b=3$ である。

検算

- これらの級数は非常に速く収束する（各項の大きさは前の項の高々 8 分の 1 である）ので、最初の数項を計算するだけでよい検算になる。(ii) では、級数の最初の 3 項から $0.41667-0.01198+0.00084\approx 0.40553$ が得られ、$\ln\frac{3}{2}\approx 0.40547$ とよく一致する。
- (iii) では $\pi\sqrt{3}-\ln 3\approx 5.4414-1.0986=4.3428$ である。級数の最初の 200 項をコンピュータで足し合わせると、小数第 12 位まで一致する。$k=0$ の項だけでも $\frac{1}{8}\cdot 36=4.5$ となり、大きさの見当は合っている。

よくある間違い

- 展開を $8^{-(k+1)}$ ではなく 8^{-k} で書いてしまうこと。最初にくくり出した因数 $\frac{1}{8}$ を落としてはならない。
- $\frac{1}{3k+3}$ を I_2 ではなく I_3 に対応させてしまうこと。分母は $3k+m+1$ なので、m は定数項より 1 小さい。
- $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が負であることを忘れ、$\pi\sqrt{3}$ の項の符号を誤ること。

STEP のその先へ

小問 (i) のように和と積分の順序を入れ替えることがここで正当化されるのは、冪級数（power series）が $[0,1]$ 上で一様収束（uniform convergence）するからである。このような入れ替えがいつ許されるかは、大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的なテーマの一つである。同じ方法を使えば、$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ の値も、小問 (iii) とまったく同様にして求められる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）では、一様収束と項別積分（term-by-term integration）が丁寧に解説されている。

解答例

STEP II 2024、第 3 問

純粋数学 ・ 半角の正接による置換

> **STEP II 2024、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) では一種の「辞書」をつくる。円周上の角 ϕ の位置にある点に、N からその点を通る直線が y 軸と交わる高さ $\tan\frac{1}{2}\phi$ を対応させるのである。これを逆向きにもたどり、どの高さ q にも円周上の点がちょうど一つ対応するようにする。すると、問題に現れる q の各関数は $\frac{1}{2}\theta$ に関する三角関数の恒等式（identity）となり、角 θ に、したがって点に何が起こるかを読み取ることができる。

解答

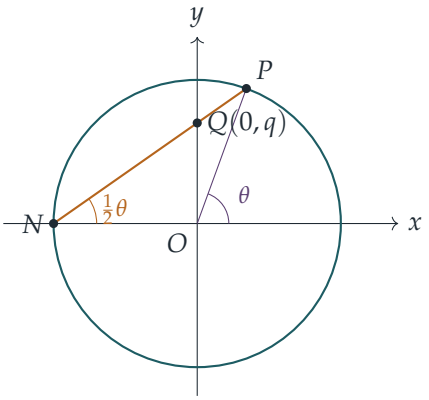
小問 (i)

$P \neq N$ であるから $\cos\theta \neq -1$ であり、直線 NP は鉛直ではない。その傾き（gradient）は

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

である。ここで倍角の公式（double-angle formulas）$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ と $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$ を用いた（また $|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$ より $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ である）。この直線は $(-1,0)$ を通るので $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$ であり、$x = 0$ とおくと $q = \tan\frac{1}{2}\theta$ が得られる。これが示すべきことであった。

幾何的には、これは円周角（angle at the circumference）の性質である。P が中心に対して角 θ をなすので、弦（chord）NP は N において x 軸と角 $\frac{1}{2}\theta$ をなす。



逆向きに：高さから点へ

この逆（converse）は何度も必要になる。任意の実数 q に対し、N と $(0,q)$ を通る直線は $y=q(x+1)$ である。これを $x^2+y^2=1$ に代入すると

$$x^2-1+q^2(x+1)^2=0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x-(1-q^2)\right]=0.$$

解 $x=-1$ は N に対応するので、もう一つの交点は

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right).$$

である。$q=\tan\frac{1}{2}\phi$ ならば、t の公式（t-formulas）によりこの点は $(\cos\phi,\sin\phi)$ である。$\phi\mapsto\tan\frac{1}{2}\phi$ は $(-\pi,\pi)$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であるから、次が得られる。

辞書。任意の角 ϕ（$(-\pi,\pi)$ に属するとは限らない）に対して $\tan\frac{1}{2}\phi=q$ ならば、N から $(0,q)$ を通る直線は円と再び $(\cos\phi,\sin\phi)$ で交わる。

これがすべての ϕ について成り立つのは、ϕ を $\phi\pm2\pi$ に置き換えても、$\tan\frac{1}{2}\phi$（$\frac{1}{2}\phi$ について周期 π をもつ）も点も変わらないからである。

小問 (ii)

(a) $\tan\frac{1}{4}\pi=1$ であるから、加法定理（addition formula）により

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{4}\pi\right)=\frac{\tan\frac{1}{2}\theta+1}{1-\tan\frac{1}{2}\theta}=\frac{1+q}{1-q}=f_1(q),$$

となり、これは $\tan\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\pi\right)$ である。これが示すべきことであった。条件 $q\neq1$ は $\theta\neq\frac{1}{2}\pi$ を意味するので、分母は 0 でない。

(b) (a) より、Q_1 の高さは $\phi=\theta+\frac{1}{2}\pi$ として $\tan\frac{1}{2}\phi$ である。辞書により $P_1=$

$\left(\cos(\theta+\frac{1}{2}\pi), \sin(\theta+\frac{1}{2}\pi)\right)$ である。よって

P_1 は、P をO のまわりに反時計回りに回転（rotation）した像であり、回転角は$\frac{1}{2}\pi$.

である。（除外された値 $q=1$ は $\theta=\frac{1}{2}\pi$ に対応し、これはこの回転による像が N そのものになる唯一の点である。）

小問 (iii)

(a) P_2 は角 $\theta+\frac{1}{3}\pi$ の位置にある点である。必要ならば角を $(-\pi, \pi)$ に引き戻して（これは半角の tan を変えない）小問 (i) を適用し、$\tan\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を用いると

$$\mathrm{f}_2(q)=\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{6}\pi\right)=\frac{q+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{q}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}q+1}{\sqrt{3}-q}.$$

条件 $q\neq\sqrt{3}$ は $\theta\neq\frac{2}{3}\pi$ であり、これはちょうど P_2 が N となって直線 NP_2 が存在しなくなる場合である。

(b) 今度は $\tan\frac{1}{4}\pi=1$ を差の形で用いる。

$$\mathrm{f}_3(q)=\frac{1-q}{1+q}=\frac{\tan\frac{1}{4}\pi-\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta}=\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta\right)=\tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\theta\right).$$

辞書により、P_3 は角 $\frac{1}{2}\pi-\theta$ の位置にある点、すなわち $(\sin\theta, \cos\theta)$ である。P の座標が入れ替わっているので

P_3 はP を鏡映（reflection）した点であり、鏡映の軸は直線$y=x$.

である。

(c)

考えてみよう f_2^{-1} は角に何をするか？

(a) より、f_2 はすべての角 ϕ に対して $\tan\frac{1}{2}\phi$ を $\tan\frac{1}{2}(\phi+\frac{1}{3}\pi)$ に移す（計算の中で $\phi=\theta$ は一度も使っていない）。したがって $\mathrm{f}_2\left(\tan\frac{1}{2}(\psi-\frac{1}{3}\pi)\right)=\tan\frac{1}{2}\psi$ であり、f_2 は単射（one-to-one）であるから（$s=\mathrm{f}_2(q)$ を解くと、$s\neq-\sqrt{3}$ のとき一意的に $q=\frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$ が得られる）、

$$\mathrm{f}_2^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\psi\right)=\tan\tfrac{1}{2}\left(\psi-\tfrac{1}{3}\pi\right).$$

となる。つまり f_2^{-1} は角を $\frac{1}{3}\pi$ だけ逆向きに回転させる。

では、三つの段階を通して角を追ってみよう。$0<q<1$ より $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。

- f_2：角は $\theta+\frac{1}{3}\pi \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ となる。このとき $f_2(q)>0$ であるから、f_3 を適用できる。
- f_3：角は $\frac{1}{2}\pi-(\theta+\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{6}\pi-\theta \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ となる。これは $-\frac{2}{3}\pi$ ではないので、高さは $-\sqrt{3}$ ではなく、f_2^{-1} を適用できる。
- f_2^{-1}：角は $\frac{1}{6}\pi-\theta-\frac{1}{3}\pi=-\theta-\frac{1}{6}\pi$ となる。

よって $f_4(q)=\tan\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{1}{6}\pi\right)$ であり、辞書により P_4 は角 $-\frac{1}{6}\pi-\theta$ の位置にある点である。

O を通り角 α をなす直線に関する鏡映は、角 θ の位置にある点を角 $2\alpha-\theta$ の位置にある点に移す（鏡となる直線が二つの方向を二等分するからである）。ここでは $2\alpha=-\frac{1}{6}\pi$ であるから

P_4 はP を、O を通り、角 $-\frac{1}{12}\pi$ をx軸の正の向きとなす直線に関して鏡映した点である,

すなわち、その直線は $y=-\tan\frac{1}{12}\pi\, x=-(2-\sqrt{3})\,x$ である。

これは納得のいく結果である。$\frac{1}{3}\pi$ 回転し、$y=x$ に関して鏡映し、逆向きに回転して戻すことは、鏡 $y=x$ を $\frac{1}{3}\pi$ だけ逆向きに回転させた直線に関する鏡映であり、$\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi=-\frac{1}{12}\pi$ となるからである。具体的には、$t=\tan\frac{1}{12}\pi=2-\sqrt{3}$ とおくと

$$f_4(q)=-\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{12}\pi\right)=-\frac{q+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})q}.$$

検算

- (iii)(b) で $\theta=\frac{1}{2}\pi$ とする。$P=(0,1)$、$q=1$、$f_3(1)=0$ であるから $Q_3=O$、$P_3=(1,0)$ となり、確かにこれは $(0,1)$ の $y=x$ に関する鏡映である。
- (c) で $q=\frac{1}{2}$ とする。$f_2(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\approx 1.5146$、次に $f_3\approx -0.2046$、次に $f_2^{-1}\approx -0.8868$ となり、閉じた式 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}\approx -0.8868$ と一致する。
- 100 000 個のランダムな点 P についてコンピュータで確かめたところ、上のすべての関係（$\frac{1}{2}\pi$ の回転、f_2 の式、$y=x$ に関する鏡映、角 $-\frac{1}{12}\pi$ の直線に関する鏡映）が丸め誤差の範囲で成り立つことが確認された。

よくある間違い

- P_1 が角 $\theta+\frac{1}{2}\pi$ の位置にあると述べながら、この角が $(-\pi,\pi)$ の外にあるかもしれないことに気づかないこと。これが問題にならないのは、ϕ が 2π だけ変化すると $\tan\frac{1}{2}\phi$ も点も元に戻るからにすぎない。

▶ (c) で f_2^{-1} の回転を逆の向きに適用する（再び $\frac{1}{3}\pi$ を加えてしまう）こと。こうすると角は $\frac{1}{2}\pi - \theta$ となり、誤って P_4 が P_3 と同じになってしまう。

STEP のその先へ

角 θ の位置にある点を $q = \tan\frac{1}{2}\theta$ に移す写像は、円から直線への**立体射影**（stereographic projection）であり、関数 f_1、f_2、f_3 はメビウス変換（Möbius transformations）$q \mapsto \frac{aq+b}{cq+d}$ である。円のあらゆる回転と鏡映は直線のこのような変換となり、対称変換の合成は 2×2 行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の積に対応する。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この描像を見事に展開し、リーマン球面（Riemann sphere）へと拡張している。

解答例

STEP II 2024、第 4 問

純粋数学 ・ ベクトルと角の二等分線

> **STEP II 2024、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべてを単位ベクトル（unit vector）に縮めて考える。$\hat{\mathbf{x}}$ と $\hat{\mathbf{y}}$ をそれぞれ OX と OY の向きの単位ベクトルとすると、$\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ はひし形（rhombus）の対角線（diagonal）であり、ひし形の対角線はその角を二等分（bisect）する。与えられた $\mathbf{b}$ は $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ の正の定数倍にすぎないので、どの二等分ベクトル（bisecting vector）も 2 つの単位ベクトルの和の正の定数倍である。これにより、小問 (ii) の内積（dot product）はただ 1 つの対称な式にまとまる。

解答

以下を通じて、角 XOY を θ と書く。O、X、Y は同一直線上にない（not collinear）ので $0<\theta<\pi$ であり、したがって

$$-1<\cos\theta<1.$$

以下では、この 2 つの狭義の不等式（strict inequality）をどちらも用いる。

小問 (i)(a)

$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$、$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ とおくと、$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$ である。このとき

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

これは $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の一次結合であるから、平面 XOY 上にある。また、これは零ベクトルではない。なぜなら、$\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$ ならば $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$ となり、O、X、Y が同一直線上に並んでしまうからである。

次に角を比べる。

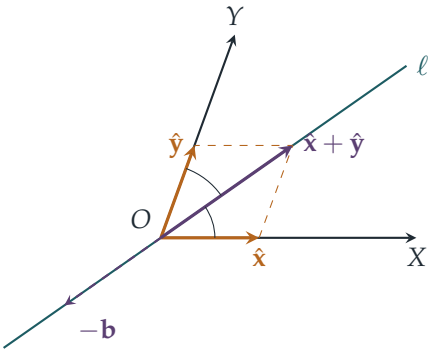
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta) = \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

であるから、$\mathbf{b}$ と $\overrightarrow{OX}$ のなす角 α および $\mathbf{b}$ と $\overrightarrow{OY}$ のなす角 β は

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

を満たす。どちらの角も $[0,\pi]$ に属し、この範囲で余弦は単射（one-to-one）であるから、$\alpha=\beta$ である。さらに $1+\cos\theta>0$ より $\cos\alpha>0$ であり、どちらの角も 90° より小さい。よって $\mathbf{b}$ は角 XOY の二等分ベクトルである。

他の二等分ベクトル。



$\hat{\mathbf{x}}$ と $\hat{\mathbf{y}}$ の長さは等しいので、これらが張る平行四辺形（parallelogram）はひし形であり、その対角線 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ は角 XOY を 2 つの等しい角に分ける。平面 XOY において、OX と OY と等しい角をなす向きは、この対角線を含む直線 ℓ に沿った 2 つの向きだけである。ベクトルを ℓ からずらすように回転させると、一方の辺には近づき他方の辺からは遠ざかるので、2 つの角は等しくなくなる。ℓ 上では、$\mathbf{b}$ の向きはそれぞれの辺と角 $\frac{1}{2}\theta < 90^\circ$ をなす。逆向きはそれぞれの辺と角 $180^\circ - \frac{1}{2}\theta > 90^\circ$ をなすので、除外される。したがって、どの二等分ベクトルも ℓ に沿って $\mathbf{b}$ と同じ向きを向いており、すなわち $\mathbf{b}$ の正の定数倍である。

同じ議論を代数的に述べる。平面上の任意のベクトルは $\mathbf{v} = p\hat{\mathbf{x}} + q\hat{\mathbf{y}}$ と書ける。角が等しいことは $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$ を意味し、

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p+q\cos\theta) - (p\cos\theta+q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

$\cos\theta \neq 1$ であるから $p=q$ でなければならず、$\mathbf{v} = p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$ となる。角が鋭角となるのは $p>0$ のときに限る。

小問 (i)(b)

点 B が直線 XY 上にあるのは、ある実数 t について $\overrightarrow{OB} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ となるとき、かつそのときに限る。必要なのは

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x} + \lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}.$$

である。$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は平行でないので、係数を比較してよい。すなわち $\lambda|\mathbf{y}| = 1-t$ かつ $\lambda|\mathbf{x}| = t$ である。これらを足し合わせると

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|}, \qquad t = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|}.$$

を得る。すると $0 < t < 1$ として $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$、$\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ となるので、B は X と Y の間にあり、

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

これは角の二等分線の定理（angle bisector theorem）である。すなわち、O からの二等分線は XY を隣り合う 2 辺の比に分ける。

小問 (i)(c)

ここで $\overrightarrow{OB}$ は $\mathbf{b}$ の零でない定数倍であるから、$OB \perp XY$ は $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$ を意味する。$\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ と $\mathbf{y} - \mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\big(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta\big) \\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|)(1 + \cos\theta).\end{aligned}$$

ここで $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$ かつ $1 + \cos\theta > 0$ であるから、これが 0 となるのは $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$ のときに限る。すなわち $OX = OY$ であり、三角形 XOY は二等辺三角形（isosceles triangle）である。

小問 (ii)

$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ の向きの単位ベクトルとする。どの 3 点も同一直線上にないので、特に O, P, Q も同一直線上になく、小問 (i)(a) がそれぞれの角に適用できる。したがって、選んだ二等分ベクトルは、ある $\alpha, \beta, \gamma > 0$ を用いて

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q} + \mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r} + \mathbf{p}),$$

と表されなければならず、3 つとも零ベクトルではない。

考えてみよう 3 つの二等分ベクトルは任意の正の定数倍である。それなのに、どうすれば 3 つの角すべてについて一度に何かを言えるのだろうか。

倍率は正なので、内積の符号を変えることはできない。そして問題になるのは符号だけである。零でないベクトルどうしのなす角は、内積が正、0、負のどれであるかに応じて、鋭角、直角、鈍角となるからである。$S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ とおく。$\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$ を用いると、

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1+S).$$

まったく同様に、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$ と $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 1$ を用いると、

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \beta\gamma\,(1+S), \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \gamma\alpha\,(1+S).$$

$\alpha\beta$、$\beta\gamma$、$\gamma\alpha$ はすべて正であるから、3 つの内積はすべて $1+S$ と同じ符号をもつ。よって、3 つの角は $1+S > 0$ ならばすべて鋭角、$1+S = 0$ ならばすべて直角、$1+S < 0$ ならばすべて鈍角である。 ■

検算

- $\mathbf{x} = (3,0,0)$、$\mathbf{y} = (0,4,0)$ とする。すると $\mathbf{b} = (12,12,0)$ であり、これは直角を二等分する。$\lambda = \frac{1}{7}$ とすると $B = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0)$ を得て、これは $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 上にあり、$XB : BY = 3 : 4$ である。
- 小問 (ii) の 3 つの場合はどれも実際に起こる。P、Q、R が平面上で互いに 120° ずつ開いて配置されていれば、$S = -\frac{3}{2}$ であり、二等分線どうしは 120°（鈍角）で交わる。$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ が O を中心とする正四面体（regular tetrahedron）の 3 つの頂点を指すならば、各内積は $-\frac{1}{3}$ であるから $S = -1$ となり、3 つの角はすべて直角である。ほぼ平行な 3 つのベクトルでは鋭角になる。
- 両方の小問の結果は、何千通りものランダムな配置についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $\cos\theta \neq \pm 1$ を使う必要があることを忘れる。(i)(c) の因数 $1+\cos\theta$ と、一意性の議論における因数 $1-\cos\theta$ が 0 でないのは、点が同一直線上にないからにほかならない。
- 小問 (ii) で、二等分ベクトルを $|\mathbf{x}|\mathbf{y} + |\mathbf{y}|\mathbf{x}$ のような特定のベクトルとして扱ってし

まう。問題文ではそれらを自由に選んでよいとしているので、それらがこうしたベクトルの正の定数倍であると言うには小問 (i)(a) を引用しなければならない。

STEP のその先へ

ベクトルを $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ と書いて単位ベクトルで考える習慣は、線形代数（linear algebra）の全体を通じて役に立つ。(ii) の恒等式は、**$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ のグラム行列**（*Gram matrix*）、すなわち成分がそれらの対ごとの内積である行列の幾何学の小さな一断面である。$|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}|^2 = 3 + 2S \geq 0$ であることから $S \geq -\frac{3}{2}$ がわかり、鈍角の場合には限界がある。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、内積、射影、グラム行列をこの精神で展開している。

解答例

STEP II 2024、第 5 問

純粋数学 ・ 値域とディオファントス方程式

> **STEP II 2024、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

$\mathbb{Z}$ 上の多項式（polynomial）の値域（range）は、変数を整数だけずらしても変わらない。そこで平方完成（completing the square）（あるいは立方完成）を行い、各関数を最も簡単な「ずらした形」に直す。すると、二つの値域が共通部分をもつかどうかという問いは、二つの整数の未知数をもつ方程式が解をもつかどうかという問いに変わる。ここでの工夫は、その方程式を**二つの整数の積 = 小さな定数**という形に変形することである。小さな数の因数分解には数通りの可能性しかないので、それぞれを調べればよい。

解答

小問 (i)

平方完成すると、

$$f_1(n) = (n+3)^2 + 2 = F_1(n+3).$$

n が $\mathbb{Z}$ 全体を動くとき、$m = n+3$ も同様に整数全体を動く（任意の整数 m は $n = m-3$ から得られる）。したがって f_1 の値域は $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$ であり、これはちょうど F_1 の値域である。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

同様に $g_1(n) = (n-1)^2 + 4$ であるから、同じ議論により g_1 の値域は $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$ である。小問 (i) より、共通の値が存在するには、次を満たす整数 m、k が必要である。

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

ここで $m-k$ と $m+k$ の差は $2k$ で偶数であるから、両者の偶奇（parity）は一致する。両方とも奇数ならば積も奇数であり、2 にはなりえない。両方とも偶数ならば積は 4 の倍数であり、やはり 2 にはなりえない。よってそのような m、k は存在せず、二つの値域の共通部分は空である。

小問 (iii)

平方完成すると、

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

であるから、値域は m、k が $\mathbb{Z}$ 全体を動くときの $\{m^2-7\}$ と $\{k^2-2\}$ である。共通の値が存在するには、

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

が必要である。5 は素数（prime）であるから、組 $(m-k,\, m+k)$ は $(1,5)$、$(5,1)$、$(-1,-5)$、$(-5,-1)$ のいずれかである。二つの因数を足すと $2m = \pm 6$、引くと $2k = \pm 4$ となるので、どの場合も $m^2 = 9$ かつ $k^2 = 4$ である。共通の値は

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

である。したがって両方の値域に属する整数は $\boxed{2}$ のみである。確かめると、$\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$ かつ $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$ である。

小問 (iv)

p について平方完成すると、

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

となる。両項とも平方に正の定数を掛けたものだからである。（等号は $q = 0$ かつ $p = 0$ のときに限り成り立つ。）

3 次関数については、f_3 を $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ と比較する。

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

そこで $m = n-1$ とおくと（これもやはり $\mathbb{Z}$ 全体を動く）、f_3 の値域は $\{m^3 + 4m + 5\}$ であり、g_3 の値域は $\{k^3 + 4k - 6\}$ である。共通の値が存在するには、次を満たす整数 m、k が必要である。

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

考えてみよう この小問の最初の不等式は、この方程式を解くのにどう役立つだろうか？

$p=k$、$q=m$ として不等式を用いると、$k^2+km+m^2+4\geq 4$ である。特に第 2 の因数は正の整数であるから、$k-m$ も正でなければならない。11 は素数であるから、可能性は二つしかない。

- $k-m=11$ かつ $k^2+km+m^2+4=1$。第 2 の因数は 4 以上であるから、これは不可能である。
- $k-m=1$ かつ $k^2+km+m^2+4=11$。

後者の場合、$k=m+1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(m+1)^2+m(m+1)+m^2&=7\\ 3m^2+3m+1&=7\\ m^2+m-2=(m+2)(m-1)&=0,\end{aligned}$$

よって $m=1$（このとき $k=2$）または $m=-2$（このとき $k=-1$）である。対応する値は

$$m=1:\ 1+4+5=10,\qquad m=-2:\ -8-8+5=-11.$$

である。したがって両方の値域に属する整数は $\boxed{10\text{ と }-11}$ である。

元の変数に戻すと、$f_3(2)=8-12+14=10$ かつ $g_3(2)=8+8-6=10$ であり、また $f_3(-1)=-1-3-7=-11$ かつ $g_3(-1)=-1-4-6=-11$ である。興味深いことに、二つの共通の値はどちらも同じ入力 n から得られている。

検算

- 上で行ったように代入して確かめる。f_2 と g_2 はともに $n=4$ で値 2 をとり、f_3 と g_3 は $n=2$（値 10）と $n=-1$（値 -11）で一致する。
- 小さな値を書き出すのは、小問 (ii) の手早い確認になる。f_1 は $2,3,6,11,18,27,\ldots$ を、g_1 は $4,5,8,13,20,29,\ldots$ を与える。どちらの列にも、もう一方の列の数は現れない。
- $|n|\leq 3000$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、(i) の値域は一致し、(ii) の値域は共通部分をもたず、共通の値は (iii) では 2、(iv) では 10、-11 のみであることが確認された。

よくある間違い

- 同じ n について $f(n) = g(n)$ を解いて共通の値を求めてしまう。二つの入力は異なってよいので、独立な二つの未知数が必要である。(iii) では $f_2(n) = g_2(n)$ でたまたま正しい答えが得られるが、方法としては誤りである。
- (ii) で、$(m-k)(m+k) = 2$ から $\{m-k, m+k\} = \{1, 2\}$ であるとだけ論じ、負の因数の組を忘れてしまう。偶奇による議論なら、すべての場合を一度に扱える。
- (iv) で、11×1 という因数分解を除外し忘れる。これを除外するのが、あの不等式の役割である。

STEP のその先へ

$m^2 - k^2 = 5$ や $k^3 + 4k = m^3 + 4m + 11$ のように、整数解のみを考える方程式を**ディオファントス方程式**（Diophantine equation）という。一方の辺を因数分解し、もう一方の辺の約数を利用する方法は、これらを解くための最も強力な初等的手法の一つである。(ii) の偶奇の工夫は一般化できる。整数が二つの平方数の差として表せるのは、それが奇数であるか 4 の倍数であるときに限る。さらに学びたい人には、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）が、大学 1 年生向けの整数論入門として優れている。

解答例

STEP II 2024、第 6 問

純粋数学 ・ 二項級数の係数

STEP II 2024、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの小問も、隣り合う項の比が鍵となる。二項係数（binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ も二項級数の係数も、一段進むごとに因数が一つずつ増える積であるから、第 n 項と第 $(n-1)$ 項を比べると簡潔な漸化式（recurrence）が得られる。同じ漸化式に従い、同じ値から始まる二つの数列は等しい。最後の恒等式は、$(1-x)^{-3/2}$ を $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$ と書いて係数を比較することで得られる。$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$ を掛けると、係数の列がその累積和の列に変わるからである。

解答

小問 (i)

$P(n)$ を命題 $T_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ とする。

基本ステップ（*base case*）。 $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}=1=T_0$ であるから、$P(0)$ は成り立つ。

帰納ステップ（*inductive step*）。ある $n\geq 1$ に対して $P(n-1)$ が成り立つと仮定する。$\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$ かつ $\binom{2n-2}{n-1}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$ であるから、割り算をすると

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

これと漸化式および $P(n-1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n}\,T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4\cdot 2^{2n-2}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

となり、これは $P(n)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $P(n)$ が成り立つ。

小問 (ii)

一般の指数に対する二項定理（binomial theorem）により、$(1-x)^{-1/2}$ における x^r の係数は

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!},$$

である。分子の r 個の因数はいずれも負であり、$(-x)^r$ から生じる $(-1)^r$ がその符号を打ち消すからである。a_{r-1} から a_r に進むと、分子に因数 $\frac{2r-1}{2}$ が一つ、分母に因数 r が一つ加わるので、$r \geq 1$ に対して

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{すなわち} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r}\,a_{r-1}.$$

? **考えてみよう** なぜこの漸化式から直ちに $a_r = T_r$ が得られるのか。

二つの数列はどちらも 1 から始まり（定数項である $a_0 = 1$ と $T_0 = 1$ による）、第 $r-1$ 項から第 r 項を得る規則も同じである。一行の帰納法で証明は完了する。$a_{r-1} = T_{r-1}$ ならば、$a_r = \frac{2r-1}{2r}a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r}T_{r-1} = T_r$ である。よってすべての $r \geq 0$ に対して $a_r = T_r$ であり、(i) より

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}.$$

小問 (iii)

同様にして、$(1-x)^{-3/2}$ における x^r の係数は

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}.$$

である。a_r と b_r の分子は、どちらも連続する r 個の「奇数の半分」の積である。b_r の積は、a_r の最初の因数 $\frac{1}{2}$ を失い、最後に因数 $\frac{2r+1}{2}$ が加わったものである。$r!$ は約分されるので、

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1.$$

（$r=0$ のときは両方の積が空積であり、$b_0 = a_0 = 1$ となって一致する。）したがって

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

小問 (iv)

$(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$ かつ $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$ であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right).$$

右辺において、x^n の項は、各 $r = 0, 1, \ldots, n$ について一つ目の括弧から $a_r x^r$ を、二つ目の括弧から x^{n-r} を選ぶことで生じる。これらの選び方の係数はそれぞれ $a_r \cdot 1$ であるから、x^n の係数は $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ である。両辺の x^n の係数を比較すると、

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r.$$

(ii) と (iii) で得た式を代入すると

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r},$$

となり、示すべき式が得られた。（この議論は $n = 0$ の場合にも成り立ち、そのとき両辺はともに 1 である。）

検算

- 小さい場合：$a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$ であり、$\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$ と一致する。
- $n = 3$ のとき、(iv) の左辺は $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$、右辺は $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$ である。
- 直接計算すると $(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$ であり、$b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$ である。
- 厳密な分数を用いたコンピュータによる検証で、$n \leq 29$ のすべてについて (i)–(iv) が確認された。$x = 0.3$ において各級数の最初の 30 項を足すと 1.19523 と 1.70747 が得られ、これは $(0.7)^{-1/2}$ と $(0.7)^{-3/2}$ に一致する。

よくある間違い

- 二項係数の符号の誤り：$\binom{-1/2}{r}$ は符号が交互に変わるが、$(-x)^r$ から生じる因数 $(-1)^r$ がこれを打ち消すので、a_r と b_r はすべて正である。
- 基本ステップを忘れる、あるいは漸化式だけから $a_r = T_r$ を主張する：初期値 $a_0 = T_0 = 1$ が一致することも必要である。

STEP のその先へ

べき級数に $(1-x)^{-1}$ を掛けて部分和を作るのは、**母関数**（generating functions）の基本的な道具である。母関数は、数列に関する問題をべき級数の代数に置き換えるものである。数 $\binom{2n}{n}/4^n$ は確率にも現れる。これは公平な硬貨を $2n$ 回投げたとき表がちょうど n 回出る確率であり、スターリング（Stirling）の公式によって、n が大きいとき $1/\sqrt{\pi n}$ のように振る舞うことがわかる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの趣旨の問題がさらに収められており、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は母関数を本格的に展開している。

解答例

STEP II 2024、第 7 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

STEP II 2024、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

それぞれの括弧は円の方程式なので、C_1 は単に 2 つの円である。C_2 については、括弧を展開するとすべてが x^2+y^2 と x^2 にまとまるので、水平な直線で切ると x^2 についての 2 次方程式（quadratic）が得られる。したがって交点の個数を数えることは、その 2 次方程式の正の解の個数を数えることに帰着し、それは判別式（discriminant）、解の和、解の積の 3 つによって決まる。

解答

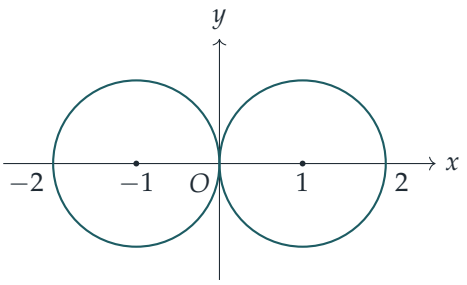
以下を通して、

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

とおく。

小問 (i)

積が 0 になるのは、いずれかの因数が 0 になるときであり、かつそのときに限る。よって C_1 は円 $A=0$ と円 $B=0$ の和集合（union）である。これらはそれぞれ $(1,0)$ と $(-1,0)$ を中心とする半径 1 の円である。どちらも原点を通り、原点で互いに接する（そこでの共通接線（tangent）は y 軸である）。最も高い点は $(\pm 1,1)$ であり、曲線は $x=-2,0,2$ で x 軸と交わる。



小問 (ii)(a)

$s = x^2 + y^2$ とすると、A と B はそれぞれ $s - 2x$、$s + 2x$ の形をしているので、

$$AB = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2.$$

である。直線 $y = k$ 上では、方程式 $AB = \frac{1}{16}$ は

$$\begin{aligned}(x^2 + k^2)^2 - 4x^2 &= \tfrac{1}{16}\\ x^4 + 2k^2x^2 + k^4 - 4x^2 - \tfrac{1}{16} &= 0\\ x^4 + 2(k^2 - 2)x^2 + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) &= 0,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

ここで $u = x^2$ とおくと、

$$u^2 + 2(k^2 - 2)u + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) = 0. \qquad (*)$$

を得る。解 $u > 0$ はそれぞれ 2 つの交点 $x = \pm\sqrt{u}$ を与え、解 $u = 0$ は 1 つの点 $(x = 0)$ を与え、解 $u < 0$ は交点を与えない。したがって $(*)$ の解の符号を知る必要がある。それは次の 3 つの量からわかる。

- 判別式の 4 分の 1、$(k^2 - 2)^2 - \left(k^4 - \frac{1}{16}\right) = \frac{65}{16} - 4k^2$。これは k が $\frac{\sqrt{65}}{8}$ より小さい、等しい、大きいに応じて、正、0、負となる。
- 解の和 $2(2 - k^2)$。
- 解の積 $k^4 - \frac{1}{16}$。これは $k > 0$ のとき $k - \frac{1}{2}$ と同じ符号をもつ。

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{65}}{8} \approx 1.008$ であること、また解が実数であるときは常に $k^2 \leq \frac{65}{64} < 2$ となるので解の和が正であることに注意する。

考えてみよう 解の積が負であるとき、判別式を調べる必要はあるだろうか？

その必要はない。積が負ならば、解は必ず実数であり（このとき判別式 $b^2 - 4ac$ は正となる）、しかも符号が異なる。では、場合を順に調べよう。

- $0 < k < \frac{1}{2}$：積が負なので、正の解はちょうど 1 つである。**交点は 2 個**。
- $k = \frac{1}{2}$：$(*)$ は $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$ となるので $u = 0$ または $u = \frac{7}{2}$ であり、$x = 0$ と $x = \pm\sqrt{7/2}$ を得る。**交点は 3 個**。
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$：判別式が正なので、相異なる 2 つの実数解をもつ。その積と和はどちらも正なので、2 つの解はともに正である。**交点は 4 個**。
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$：重解 $u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$ をもち、$x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ を得る。**交点は 2 個**。
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$：実数解をもたない。**交点はない**。

小問 (ii)(b)

(a) より、直線 $y = k$ は $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$ のとき C_2 と交わり、それより大きい k では交わらない。C_2 の方程式には y が y^2 の形でしか現れないので、負の k がより高い点を与えることはない。したがって C_2 上の y 座標の最大値は $\frac{\sqrt{65}}{8}$ であり、それは $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ でとられる。

C_1 上で最も高い点は円の頂上 $(\pm 1, 1)$ である。$\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$ であるから、C_2 の最も高い点は C_1 のそれよりも y **軸に近い**（ただし $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$ なので、わずかに高い）。

小問 (ii)(c)

$A < 0$ かつ $B < 0$ であると仮定する。$A < 0$ から $2x > x^2 + y^2 \geq 0$ となるので $x > 0$ である。$B < 0$ から $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$ となるので $x < 0$ である。これらは互いに矛盾するので、A と B がともに負になることはない。（幾何学的には、2 つの開円板（open disc）は重ならないということである。）

C_2 上では $AB = \frac{1}{16} > 0$ なので、A と B は 0 でなく、同じ符号をもつ。ともに負になることはないので、ともに正である。$A > 0$ は $(x-1)^2 + y^2 > 1$ を意味するので、その点は $(1, 0)$ を中心とする円の真に外側にある。同様に $B > 0$ より、その点は $(-1, 0)$ を中心とする円の真に外側にある。よって C_2 のすべての点は両方の円の外側にある。すなわち、C_2 は全体が C_1 の外側にある。

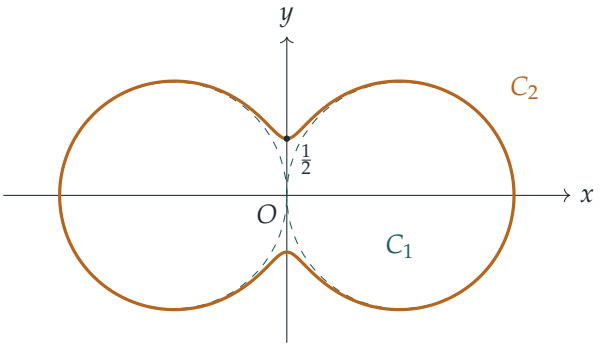
小問 (ii)(d)

概形を描くのに役立つ C_2 の特徴は次のとおりである。

- x^2 と y^2 しか現れないので、両方の座標軸に関して対称である。
- $y = 0$ のとき、$(*)$ から $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$ となるので、C_2 は $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$ で x 軸と交わる。これは ± 2 のわずかに外側である。

- $x = 0$ のとき $k^4 = \frac{1}{16}$ なので、C_2 は $(0, \pm\frac{1}{2})$ で y 軸と交わる。
- 最も高い点と最も低い点は $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$ である。

(a) で数えた交点の個数から形がわかる。$|y| < \frac{1}{2}$ では交点は 2 個だけ（外側の両脇）である。$\frac{1}{2} < |y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$ では 4 個なので、曲線は 2 つのこぶの間で $(0, \pm\frac{1}{2})$ まで下がってくぼむ。したがって C_2 は両方の円を囲む 1 つの閉じた「ピーナッツ」形の曲線であり、y 軸のところでくびれている。



（C_2 を極形式（polar form）で表すと $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$ となる。上の曲線はこの式を用いて描いた。）

検算

- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ のとき判別式 $\frac{65}{16} - 4k^2$ は 0 となり、曲線の頂上と一致する。重解 $u = \frac{63}{64}$ からは $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$ および $4x^2 = \frac{63}{16}$ が得られ、確かに $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$ である。
- 点 $(0, \frac{1}{2})$：$A = B = \frac{1}{4}$ なので $AB = \frac{1}{16}$ である。
- $k = 0.1$、0.49、0.51、1.0、1.007、1.01 について、$y = k$ と C_2 の交点の個数をコンピュータで数えると、それぞれ 2、2、4、4、4、0 個となる。また数値的に探索すると、高さの最大値 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$ が $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$ で得られる。

よくある間違い

- $u = 0$ が 2 つの点を与えるとしてしまうこと。$x = \pm\sqrt{0}$ は 1 つの点であり、だからこそ $k = \frac{1}{2}$ のときの交点は 4 個ではなく 3 個になる。
- 交点を数える際に、接する場合 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ を忘れること。
- (c) で、両方が負である可能性を排除せずに「A と B は同じ符号をもつ」と結論するだけで終えてしまうこと。その排除こそが前半の要点である。

STEP のその先へ

C_2 は曲線族 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$、すなわち関数 AB の等高線（level curve）の 1 つである。c が増加するにつれて曲線の形は変化する。まず（$c<0$ のとき）円の内側にある 2 つの離れた卵形となり、$c=0$ で 8 の字（figure-of-eight）の C_1 となり、その後 1 つのピーナッツ形となる。そのくぼみは $c\geq 4$ になると消える。位相（topology）の変化は、ちょうど原点にある AB の臨界点（critical point）の値のところで起こる。臨界点を通過するときに等高線がどのように変化するかを追うことは、モース理論（Morse theory）の出発点となる考え方である。また、これと密接に関係するカッシーニの卵形線（Cassini ovals）も、ベルヌーイ（Bernoulli）のレムニスケート（lemniscate）を 8 の字として、まったく同じように振る舞う。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、このような陰関数表示の曲線の概形を描く、STEP 形式の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2024、第 8 問

純粋数学 ・ 算術幾何平均

> **STEP II 2024、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.6 節「**算術幾何平均**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/agm.html

鍵となる考え方

2 つの数列は互いに挟み込むように近づいていく。算術平均は減少し、幾何平均は増加し、その差は毎回少なくとも半分になる。したがって両者は共通の極限 M に落ち着く。これが x_0 と y_0 の**算術幾何平均**（arithmetic–geometric mean）である。小問 (ii) では、置換（substitution）によって組 (p, q) に対する積分が、それらの平均の組に対する積分に変わる。したがって反復を進めても積分の値は決して変わらない。$n \to \infty$ とすると、それは計算できる積分に帰着する。

解答

小問 (i)

まず、すべての n について $0 < y_n < x_n$ であることを数学的帰納法（induction）で示す。$n = 0$ のときは成り立つ。$0 < y_n < x_n$ と仮定する。すると $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$ であるから

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

であり、これを整理すると $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$、すなわち $y_{n+1} < x_{n+1}$ を得る。また $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$ である。以上で帰納法が完結し、すべての $n \geq 0$ について $y_{n+1} < x_{n+1}$ が成り立つ。

$y_n < x_n$ を用いると

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

となる。ここで 2 行目では $x_n > y_n > 0$ であることと、平方根が増加関数であることを用いた。

よって (y_n) は増加数列である。さらに上に有界でもある。実際 $y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$ であるから、すべての n について $y_n < x_0$ である。定理より、ある $M \le x_0$ が存在して $y_n \to M$ となる。（数列は y_0 から増加するので、$M \ge y_0 > 0$ でもある。）

差については、左側の不等式 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$ は最初に証明したことである。右側の不等式については、$y_{n+1} > y_n$ であるから

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

これを繰り返し用いると

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

となるので、はさみうちの原理（squeezing）により $x_n - y_n \to 0$ である。最後に、$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ は M に収束する数列と 0 に収束する数列の和であるから、$x_n \to M$ も成り立つ。

小問 (ii)

$a = \frac{1}{2}(p+q)$、$g = \sqrt{pq}$ とおき、t についての積分を J とよぶ。

置換。 $x > 0$ に対して $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

であるから、t は狭義単調増加であり、$x \to 0^+$ のとき $-\infty$ から、$x \to \infty$ のとき $+\infty$ まで動く。すなわち、この置換は $(0, \infty)$ を実数直線全体へ一対一（one-to-one）に写す。次に、根号の中の 2 つの因数を書き直す。

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + pq}{2x}\right)^2,$$
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 &= \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.\end{aligned}$$

$x > 0$ かつ $x^2 + pq > 0$ であるから、積の平方根は

$$\frac{x^2+pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q). \end{aligned}$$

同じ積分を直接読む。 $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$ かつ $pq = g^2$ であるから、J の被積分関数は $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$ であり、これは t について偶関数（even function）である。よって

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

となる。これが正当であるのは、a、g が正であり、かつ $g < a$ だからである（$p \neq q$ なので、小問 (i) の不等式による）。J の 2 つの表示を比べると

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big),$$

が得られ、示すべきことが示された。

$\mathrm{I}(x_0,y_0)$ の計算。 これを $(p,q) = (x_n,y_n)$ に適用すると（$0 < y_n < x_n$ なので適用してよい）、$\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$ が得られるので

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{任意の} n.$$

考えてみよう $n \to \infty$ として、積分が $\mathrm{I}(M,M)$ に収束すると言いたい。無限区間上の積分の中に極限を入れることは、どのようにして正当化できるだろうか？

はさみうちを使えば、微妙な極限の議論を避けることができる。$0 < y_n < x_n$ とすべての x に対して

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

であるから、平方根をとって逆数をとり（これにより不等号の向きが逆になる）、積分すると

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

$c>0$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$ であるから

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{任意の} n.$$

中央の辺は n によらず一定であり、$M>0$ のもとで $x_n \to M$ かつ $y_n \to M$ であるから、両側の評価はともに $\pi/(2M)$ に収束する。したがって

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

検算

- $x_0=2$、$y_0=1$ とする。反復により $(1.5,\ 1.41421)$、続いて $(1.45711,\ 1.45648)$ が得られ、その次には両者が有効数字 5 桁で一致して $M\approx 1.45679$ となる。よって $\pi/(2M)\approx 1.07826$ であり、$\mathrm{I}(2,1)$ を数値的に計算してもやはり 1.07826 となる。
- $p=q$ のとき、$\mathrm{a}(p,p)=\mathrm{g}(p,p)=p$ であるから、恒等式は自明に成り立つ。答え $\pi/(2M)$ はこれと整合的である。実際 $\mathrm{I}(M,M)=\pi/(2M)$ である。
- 収束は極めて速い。最初の数ステップを過ぎると、差はおおよそ毎回 2 乗になり、証明した「半分になる」よりはるかに良い。

よくある間違い

- 帰納法の中で、先に $y_n<x_n$（および平方根が意味をもつための $y_n>0$）を確立せずに $y_{n+1}<x_{n+1}$ を使ってしまう。
- t についての積分が実数直線全体にわたるので、$\mathrm{I}(a,g)$ の 2 倍になることを忘れる。2 つの因数 2 は打ち消し合わなければならない。
- 何の正当化もなしに $\mathrm{I}(x_n,y_n)\to\mathrm{I}(M,M)$ と書いてしまう。上のはさみうちが、きちんとした根拠を与える。

STEP のその先へ

共通の極限 M はガウス（Gauss）の算術幾何平均であり、積分 I は**完全楕円積分**（complete elliptic integral）である。ガウスは 1799 年にこの恒等式を発見した。これは楕円積分を、さらには π そのものを驚くほど速く計算する方法を与える（ガウス–ルジャンドル（Legendre）のアルゴリズム）。冒頭で引用した単調収束定理（monotone convergence theorem）や、極限と積分を入れ替える際に必要な注意は、

解析学（analysis）の最初の講義の中心的なテーマである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらにきちんと出会うのに最適な一冊である。

解答例

STEP II 2024、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2024、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

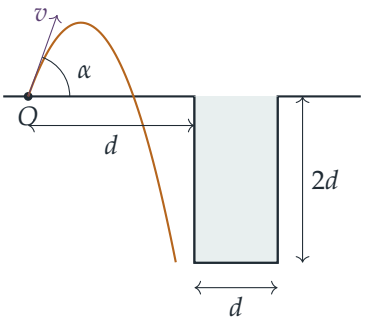
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては軌道の方程式 $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ を $t = \tan\alpha$ についての 2 次式（quadratic）とみることから導かれる。底面にきれいに着地するということは、次の 2 つを意味する。粒子が手前の縁に達したときにはまだ地面の高さより上にあり、向こう側に達するはずの時点では、すでに底面の高さより下にあるということである。それぞれの条件は t についての 2 次不等式（quadratic inequality）であり、平方完成（completing the square）によって必要な形に変形できる。小問 (ii) は、t の許される 2 つの範囲が重なることを示すだけの問題になる。

解答

粒子を重力のみを受ける質点の放物体（projectile）とみなし、空気抵抗は無視する。投射点を原点とし、x を溝に向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。すると手前の壁は直線 $x = d$、向こう側の壁は $x = 2d$、底面は $d < x < 2d$ における $y = -2d$ である。



時刻 T における水平方向の速度は $v\cos\alpha$、鉛直方向の速度は $v\sin\alpha - gT$ であるから、T を消去すると

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

を得る。ここで $t = \tan\alpha$ であり、$v^2 = \lambda dg$ と $\sec^2\alpha = 1 + t^2$ を用いた。

小問 (i)(a)

溝の手前の地面にも手前の壁にも当たらないためには、$x = d$ のとき粒子が地面の高さより真に上になければならない。（そこで $y = 0$ 以下であれば、すでに地面に当たっているか、手前の壁に当たることになる。）よって

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

となる。ここで $2\lambda/d > 0$ を掛けた。すなわち

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

であり、これが示すべき式である。左辺は平方であるから $\lambda^2 - 1 > 0$ であり、$\lambda = v^2/(dg) > 0$ なので $\lambda > 1$ が得られる。

小問 (i)(b)

次に向こう側の壁を考える。軌道は下に凸でない（上に凸の）放物線であり、$x = d$ では底面の高さ $-2d$ より上にある。軌道が $x = 2d$ より前で $y = -2d$（底面）に達するのは、$x = 2d$ においてすでにその高さより下にあるとき、すなわち $y(2d) < -2d$ のときであり、かつそのときに限る。逆に $y(2d) \geq -2d$ ならば、底面に達しないまま $x = 2d$ に到達するので、向こう側の壁に触れる（あるいは溝を完全に飛び越える）。

? **考えてみよう** なぜ 1 点 $x = 2d$ だけを調べれば十分なのか？

$y(x) + 2d$ は最高次の係数が負の x の 2 次式で、$x = d$ において正だからである。これは $x = d$ より先にちょうど 1 つの根をもち、その根が $2d$ より手前にあるのは、$x = 2d$ においてこの 2 次式がすでに負であるときであり、かつそのときに限る。

よって

$$y(2d) = 2dt - \frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d} < -2d \iff \lambda t - (1+t^2) < -\lambda \iff t^2 - \lambda t + 1 - \lambda > 0,$$

が必要である。ここで $\lambda/(2d) > 0$ を掛けた。4 を掛けて平方完成すると

$$4t^2 - 4\lambda t + \lambda^2 > \lambda^2 - 4 + 4\lambda, \qquad \text{すなわち} \qquad (2\tan\alpha - \lambda)^2 > \lambda^2 + 4(\lambda - 1),$$

となり、これが示すべき式である。

$\alpha > 45^\circ$ **の導出** (a) より $\lambda > 1$ であるから、$\lambda^2 + 4(\lambda - 1) > \lambda^2 > 0$ である。$s = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}$ とおくと $s > \lambda$ である。(b) の不等式は

$$2t > \lambda + s \qquad \text{or} \qquad 2t < \lambda - s.$$

を意味する（「または」）。$s > \lambda$ であるから、2 つ目の場合は $t < 0$ となる。しかし (a) から $t > 0$ が従う。実際、$(t - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1 < \lambda^2$ から $|t - \lambda| < \lambda$ が得られるので、$t > 0$ である。（物理的には、粒子は手前の縁を越えるために上昇しなければならない。）したがって 1 つ目の場合が成り立ち、

$$2t > \lambda + s > \lambda + \lambda = 2\lambda > 2,$$

となるので、$\tan\alpha > \lambda > 1$ である。$0 < \alpha < 90^\circ$ であるから、$\alpha > 45^\circ$ が得られる。

小問 (ii)

逆に、2 つの条件を合わせれば十分である。$y(d) > 0$ ならば、$y(0) = 0$ であり y は上に凸（concave）なので、区間 $0 < x \leq d$ 全体で $y > 0$ となり、粒子は地面にも手前の壁にも当たらない。さらに $y(2d) < -2d$ ならば、粒子は d と $2d$ の真に間にあるある x で底面に達し、それまでは溝の内部にとどまる。よって、任意の $\lambda > 1$ に対して、両方の不等式を満たす $t > 0$ が存在することを示せばよい。

(a) より、許される値は $\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} < t < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ である。(b) と $t > 0$ を合わせると、許される値は $t > \frac{1}{2}(\lambda + s)$ である。両方を満たす t が存在するための条件は

$$\tfrac{1}{2}(\lambda + s) < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \iff s < \lambda + 2\sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

である。（$\frac{1}{2}(\lambda + s) > \lambda > \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ であるから、(a) の下限は問題にならない。）両辺は正であるから、2 乗してよい：

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 4\lambda - 4 < \lambda^2 + 4\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1} + 4(\lambda^2 - 1) \\ \iff \quad & 4\lambda < 4\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1} + 4\lambda^2 \\ \iff \quad & 1 < \sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda, \end{aligned}$$

ここで $4\lambda > 0$ で割った。$\lambda > 1$ であるから最後の行は正しい。よって区間

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

は空でない。$\tan\alpha$ がこの区間に入るように α を選べば（tan は $(0^\circ, 90^\circ)$ 上ですべての正の値をとるので、これは可能である）、粒子はどちらの側面にも触れずに底面に着地する。

検算

- $\lambda = 2$ とする。区間は $1+\sqrt{2} < \tan\alpha < 2+\sqrt{3}$ であり、これはちょうど $67.5^\circ < \alpha < 75^\circ$ である。$y = xt - x^2(1+t^2)/(4d)$ に $\alpha = 70^\circ$ を代入してみると、$y(d) \approx 0.61d > 0$、$y(2d) \approx -3.05d < -2d$ となり、確かにそうなっている。
- $\lambda \to 1^+$ のとき、区間の両端はともに 1 に近づくので、許される範囲は $\alpha = 45^\circ$ に縮む。$v^2 = dg$ のとき粒子は手前の縁にかろうじて届くだけであり、そのためには最大到達距離を与える角度が必要である。
- ランダムに選んだ数千組の (λ, α) について、時間を少しずつ進めて運動を計算するコンピュータによる検証を行ったところ、すべての場合で 2 つの不等式と一致した。

よくある間違い

- 条件を $y(d) > 0$ ではなく $y(d) > -2d$（底面より上）としてしまう。手前の壁は地面の高さまでずっと続いている。
- (b) で $2\tan\alpha < \lambda - s$ の場合を除外し忘れる。これには $\tan\alpha > 0$ という事実が必要である。
- (ii) で、両辺が正であることを先に確認せずに不等式を 2 乗する。

STEP のその先へ

ここでは、物理的な条件（「溝に着地する」）が、発射パラメータの空間において不等式で切り取られる領域となり、問題はその領域が空でないかどうかということになる。これは最適化（optimisation）と制御（control）の出発点である。すなわち、実現可能な入力の集合を記述し、その境界を求めることである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とその拡張（空気抵抗、回転座標系）を大学 1 年生のレベルで扱っている。

解答例

STEP II 2024、第 10 問

力学 ・ 加速するくさび上の摩擦

STEP II 2024、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

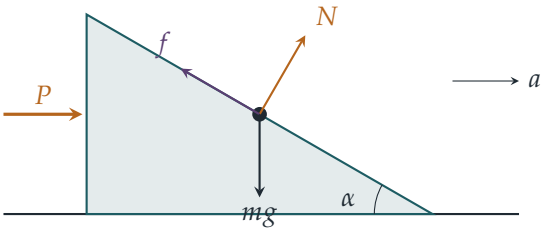
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては二つの観察にかかっている。第一に、平面はなめらかなので、系全体（三角柱と質点）にはたらく水平方向の外力は P だけである。これにより共通の加速度がただちに求まる。第二に、質点は三角柱に対して動かないので、質点もまったく同じ水平方向の加速度をもつ。したがって、質点だけについて斜面に平行な方向と垂直な方向に力を分解すれば、摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）が直接求まる。(iii) の不等式は、結局「摩擦力 $\leq \mu\times$ 垂直抗力」を加法定理（compound-angle formulae）で整理したものにすぎない。

解答

質点を質点として、三角柱（prism）をなめらかな水平面上をすべる剛体（rigid body）としてモデル化し、質点と斜めの面との接触は摩擦係数 μ のあらい面とする。鉛直な面を左側に置き、斜めの面が右下がりになるようにする。このとき P は三角柱を右向きに押す。



質点には、重力 mg、斜めの面に垂直な垂直抗力 N、そして摩擦力がはたらく。摩擦力

は斜面に沿って**上向き**にはたらく符号つきの量 f として扱う（f が負になれば、摩擦力は実際には斜面に沿って下向きにはたらいている）。摩擦力の大きさは $F = |f|$ である。

小問 (i)

系が釣り合い（equilibrium）の状態にあり、すべてが静止していると仮定する。質点について斜面に垂直な方向と平行な方向に力を分解すると、

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

質点がすべらないためには $|f| \le \mu N$、すなわち $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$、つまり $\mu \ge \tan\alpha$ が必要である（α は鋭角なので $mg\cos\alpha > 0$ で割ってよい）。したがって $\mu < \tan\alpha$ ならば釣り合いは不可能であり、質点は必ずすべる。

小問 (ii)

加速度。三角柱と質点をまとめて考える。平面はなめらかなので、平面は鉛直方向の力しか及ぼさない。質点と三角柱の間の力は内力である。よって水平方向の外力は P だけであり、両者は同じ加速度 a（水平右向き）をもつので、

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

質点についての力の分解。質点の加速度は水平方向に a である。その斜面に沿って上向きの成分は $-a\cos\alpha$（斜面は左に向かって上がり、質点は右向きに加速する）であり、外向き法線方向の成分は $a\sin\alpha$ である。

> ? **考えてみよう** なぜ水平・鉛直方向ではなく、斜面に平行・垂直な方向に分解するのか。

斜面に平行な方向に成分をもつのは f と重力だけであり、斜面に垂直な方向に成分をもつのは N と重力だけである。したがって各方程式には未知数が一つしか含まれず、連立方程式を解かずに済む。その代わりに加速度も分解しなければならないが、これは簡単である。

斜面に沿って上向き：

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

$a = P/(M+m)$ を代入すると、

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

となり、摩擦力の大きさは

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

であり、これが示すべき式である。絶対値は本当に必要である。P が小さいときは摩擦力は斜面に沿って上向きにはたらくが、P が大きいときは斜面が質点に強く押しつけられるため、質点が斜面をはい上がるのを止めるには摩擦力が斜面に沿って下向きにはたらかなければならない。

斜面に垂直な方向（外向き法線）：

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

$P > 0$ かつ α は鋭角なので、これは正である。よって絶対値は不要であり、質点は面から離れない。

小問 (iii)

質点が三角柱に対して静止し続けるのは、必要な摩擦力を供給できるとき、すなわち $F \le \mu N$ のときであり、かつそのときに限る。$G = (M+m)g$ とおき、正の因数 $m/(M+m)$ を約すと、

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

$\cos\lambda > 0$ を掛けると、これは次の二つの不等式の組になる。

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

? **考えてみよう** これらはどのようにして $\alpha \pm \lambda$ の正接になるのか。

G の項を一方の辺に、P の項をもう一方の辺に集める。すると各括弧は加法定理による展開の形になる。

右側の不等式（斜面に沿って上向きの摩擦力が限界を超えてはならない）：

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

$0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$ より $\cos(\alpha-\lambda) > 0$ なので、これは $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$ となる。

左側の不等式（斜面に沿って下向きの摩擦力が限界を超えてはならない）：

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

ここで条件 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ を用いる。これより $0 < \alpha + \lambda < \frac{1}{2}\pi$ なので $\cos(\alpha+\lambda) > 0$ であり、割り算をして $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$ を得る。

両方が成り立たなければならないので、

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $P = 0$ のとき、下限の条件は $0 \ge G\tan(\alpha-\lambda)$ となるが、$\lambda < \alpha$ なのでこれは成り立たない。$\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$ であるから、これは小問 (i) と整合する。
- $P = G\tan\alpha$ のとき $f = 0$ となる。これは、なめらかな面上の質点がちょうど静止していられる押し方であり、よく知られた「加速するくさび」の結果 $a = g\tan\alpha$ である。この値は、当然ながら区間の内部にある。
- 数値で確かめる。$M = 3$、$m = 1$、$g = 9.8$、$\alpha = 30^\circ$、$\lambda = 10^\circ$ とすると、許される範囲は $14.27 \le P \le 32.89$（ニュートン）である。$P = 20$ のとき、公式から $F \approx 0.570$、$N \approx 10.99$ となり、$F/N \approx 0.052 < \tan 10^\circ \approx 0.176$ である。数千通りのランダムな場合について質点の運動方程式をコンピュータで直接解いた結果も、両方の公式および区間と一致する。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $N = mg\cos\alpha$ としてしまう。斜面は加速しているので、垂直抗力は静止しているときの値とは異なる。
- 絶対値を落として P の下限しか求めない。上限は、摩擦力が斜面に沿って**下向き**にはたらく場合から得られる。
- $\cos(\alpha+\lambda)$ が正であることに触れずにこれで割ってしまう。まさにここで $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ が使われる。

STEP のその先へ

より見通しのよい方法は、加速度 a で加速する三角柱の座標系で考えることである。その座標系では、質点には後ろ向きに余分な「見かけの」力、すなわち慣性力（fictitious force）ma がはたらき、問題は、実効的な重力が角 $\arctan(a/g)$ だけ傾いた、あらい斜面上の通常の静力学の問題になる。すると条件は、この傾きが α から摩擦角（angle of

friction）λ 以内になければならないということになり、これはまさに求めた区間である。非慣性系（non-inertial frame）と慣性力については、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で丁寧に展開されている。

解答例

STEP II 2024、第 11 問

確率・統計 ・ グループ検査の期待値

STEP II 2024、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

検体をまとめて検査する方法（pooling）が得になるのは、グループ検査がたいてい陰性で返ってくる場合に限られる。1 人あたりの検査回数の期待値（expected value）は $1+\frac{1}{k}-(1-p)^k$ となる。これが 1 以下となるのはいつかを問うと、$(1-p)$ と $k^{-1/k}$ の比較に帰着する。小問 (i) で $x^{1/x}$ について問われているのはまさにこのためである。すなわち、p が大きいときに最適なグループの大きさは、$k^{1/k}$ を最大にする整数なのである。

解答

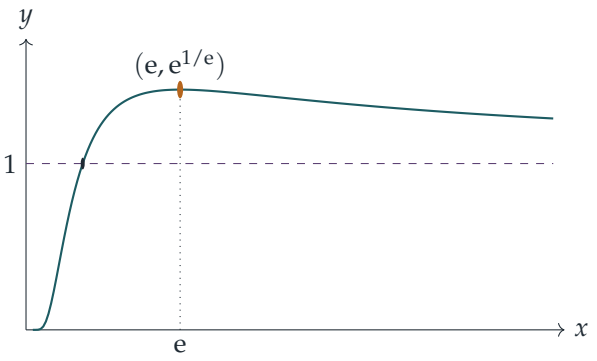
小問 (i)

$x>0$ に対して $y=x^{1/x}=\mathrm{e}^{(\ln x)/x}$ とおくと、$\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$ である。微分すると

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$y>0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の符号は $1-\ln x$ の符号と一致する。すなわち $0<x<\mathrm{e}$ で正、$x=\mathrm{e}$ で 0、$x>\mathrm{e}$ で負である。したがって停留点（turning point）はただ 1 つであり、それは $(\mathrm{e},\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}})\approx(2.72,\,1.44)$ における極大（maximum）である。

グラフの両端について調べる。$x\to 0^+$ のとき $(\ln x)/x\to-\infty$ であるから $y\to 0$ である。$x\to\infty$ のとき $(\ln x)/x\to 0$ であるから、y は上から 1 に近づく（$x>1$ では $\ln y>0$ であるため）。曲線は点 $(1,1)$ を通る。



正の整数 n について考える。この関数（function）は $(0, \mathrm{e}]$ で増加し、$[\mathrm{e}, \infty)$ で減少するから、$1^{1/1} < 2^{1/2}$ かつ $3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5} > \cdots$ である。よって最大値は $2^{1/2}$ か $3^{1/3}$ のいずれかである。両者を 6 乗すると $2^3 = 8$ と $3^2 = 9$ となるので、$3^{1/3} > 2^{1/2}$ であり、

$$\max_n n^{1/n} = 3^{1/3}.$$

小問 (ii)

$q = 1 - p$ とおく。k 人からなる 1 つのグループを考える。独立性（independence）より、グループ内の誰も酵素（enzyme）をもたない確率（probability）は q^k であり、まとめた検体が陰性になるのはその場合に限られる。したがって、このグループが用いる検査の回数は

$$\begin{cases} 1\text{回} & \text{確率} q^k, \\ 1+k\text{回} & \text{確率} 1-q^k, \end{cases}$$

であり、その期待値は $1 + k(1 - q^k)$ である。グループは $r = N/k$ 個あり、期待値は加法的であるから、検査回数の合計の期待値は

$$E = \frac{N}{k}\left(1 + k(1 - q^k)\right) = N\left(1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k\right).$$

小問 (iii)

小問 (ii) より、$E \leq N$ となるための必要十分条件は

$$\frac{1}{k} \leq (1-p)^k \iff 1 - p \geq k^{-1/k} = \frac{1}{k^{1/k}}$$

である。ここで正の k 乗根をとった（両辺は正であり、$t \mapsto t^{1/k}$ は増加関数である）。

? **考えてみよう** どの k のとき、p を最も大きくできるか。

与えられた k に対して条件は $p \leq 1 - k^{-1/k}$ であり、この上界は $k^{1/k}$ が最大のとき最大となる。小問 (i) より、任意の整数 $k > 1$ に対して $k^{1/k} \leq 3^{1/3}$ であるから、どのような k を選んでも $p \leq 1 - 3^{-1/3}$ でなければならない。逆に、N は 3 の倍数であるから $k = 3$ はグループの大きさとして許され、$k = 3$ のとき条件はちょうど $p \leq 1 - 3^{-1/3}$ となる（等号のとき $E = N$ である）。よって求める最大値は

$$p = 1 - 3^{-1/3} \approx 0.307.$$

これが $\frac{1}{4}$ を超えることを示す。

$$1 - 3^{-1/3} > \tfrac{1}{4} \iff 3^{-1/3} < \tfrac{3}{4} \iff \tfrac{1}{3} < \tfrac{27}{64} \iff 64 < 81,$$

途中の段階では 3 乗した（正の数に対して 3 乗は大小関係を保つ）。最後の主張は正しいので、$1 - 3^{-1/3} > \frac{1}{4}$ である。

小問 (iv)

二項展開（binomial expansion）より

$$(1-p)^k = 1 - kp + \binom{k}{2} p^2 - \cdots.$$

pk が小さければ、$\binom{k}{2}p^2 < \frac{1}{2}(pk)^2$ はさらにずっと小さく、それ以降の項も同様であるから、$(1-p)^k \approx 1 - pk$ である。これを小問 (ii) の式に代入すると

$$E \approx N\left(1 + \frac{1}{k} - (1 - pk)\right) = N\left(\frac{1}{k} + pk\right).$$

（実際、ベルヌーイの不等式（Bernoulli's inequality）$(1-p)^k \geq 1 - pk$ により、この近似が E を過小評価することはない。また展開を 1 項先で打ち切れば、誤差が高々 $\frac{1}{2}(pk)^2 N$ であることがわかる。）

$p = 0.01$、$k = 10$ のとき $pk = 0.1$ であり、これは小さい。このとき

$$E \approx N\left(\frac{1}{10} + 0.1\right) = 0.2N,$$

となるので、この方式では、全員を個別に検査する場合の N 回のうち、わずか約 20% の検査で済む。

検算

- $p = 0.01$、$k = 10$ で厳密に計算すると、$E/N = 1.1 - 0.99^{10} \approx 1.1 - 0.9044 = 0.1956$、すなわち約 19.6% であり、近似値との差は誤差の上界 $\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.005$ 以内に収まっている。

- $p = 1 - 3^{-1/3}$、$k = 3$ のとき、$(1-p)^3 = \frac{1}{3}$ であるから $E = N(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = N$ となり、ちょうど境界上にある。
- 小問 (ii) の妥当性：$p \to 0$ のとき $E \to N/k$（各グループ 1 回の検査）、$p \to 1$ のとき $E \to N(1 + \frac{1}{k})$（すべてのグループが再検査される）となる。この公式は、小さなグループについてすべての結果を列挙することにより、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) の答えを $e^{1/e}$ としてしまう。n は整数でなければならないので、$2^{1/2}$ と $3^{1/3}$ を比較する必要がある。
- 小問 (iii) で $k = 3$ の場合だけを確かめ、他のグループの大きさではより大きな p が許されない理由を説明しない。
- 陽性のグループで、まとめた検体の検査そのものを数え忘れ、$k+1$ 回ではなく k 回としてしまう。

STEP のその先へ

これは Dorfman の群検査（group testing）方式であり、第二次世界大戦中に兵士の血液検体をスクリーニングするために考案され、COVID-19 の検査で再び脚光を浴びた。$\frac{1}{k} + pk$ を最小化すると $k \approx 1/\sqrt{p}$（したがってここでは $k = 10$ が最適）となり、検査回数は約 $2\sqrt{p}\,N$ となる。情報理論（information theory）で研究されている、より巧妙な適応的方式を用いれば、さらに効率を上げることができる。背景にある確率論については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP II 2024、第 12 問

確率・統計 ・ 離散順序統計量

STEP II 2024、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

第 1 のゲームにおける勝者とは、**ただ 1 人だけが持つ**最小の数を持つプレイヤーのことであり、そのようなプレイヤーは高々 1 人しか存在しない。したがって「勝者がいる」という事象は、誰がどの数で勝つかによって互いに排反（disjoint）な場合に分けられ、各場合は独立（independent）な確率（probability）の単純な積になる。$\sum i^2$ と $\sum i^3$ の公式が与えられているのは、現れる和が多項式の和になるというヒントである。第 2 のゲームも同様に扱えるが、今度はプレイヤーの順序対（一方が最小、他方が最大）と、和をとるべき 2 つの数を考えることになる。

解答

以下を通して、k 個の数は独立で、それぞれ $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。したがって、特定のプレイヤーが特定の数を受け取る確率は $\frac{1}{n}$ であり、s 個の値からなる与えられた集合に属する数を受け取る確率は $\frac{s}{n}$ である。

小問 (i)

$1 \le a \le n-1$ を満たす a を固定する。Ada は a を受け取らなければならず（確率 $\frac{1}{n}$）、他の $k-1$ 人のプレイヤーはそれぞれ $n-a$ 個の数 $a+1,\ldots,n$ のいずれかを受け取らなければならない（それぞれ確率 $\frac{n-a}{n}$）。独立性より、

$$\mathrm{P}(\text{Ada の数が}a\text{, 他の全員はそれより大きい}) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-a}{n}\right)^{k-1} = \frac{(n-a)^{k-1}}{n^k}.$$

（$a = n$ のときはこれが 0 になるので、a は $n-1$ までとしている。）

勝者がいるという事象を W とする。勝者は他の全員の数より真に小さい数を持つので、勝者が 2 人いることはありえない。もし 2 人いれば、互いに相手より小さくなければならないからである。よって W は、k 人のプレイヤーと $a = 1, \ldots, n-1$ のすべてにわたる事象「このプレイヤーが a を受け取り、他の全員がそれより大きい数を受け取る」の互いに排反な和集合である。対称性（symmetry）より各プレイヤーの寄与は Ada の寄与と等しいので、

$$\mathrm{P}(W) = k \sum_{a=1}^{n-1} \frac{(n-a)^{k-1}}{n^k} = \frac{k}{n^k} \sum_{j=1}^{n-1} j^{k-1},$$

となる。ここで $j = n - a$ と置き換えた。j も 1 から $n-1$ までを動く。

$k = 4$ のとき、$\sum i^3$ の公式を n の代わりに $n-1$ として用いると、

$$\mathrm{P}(W) = \frac{4}{n^4} \cdot \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

$1 \leq d \leq n-2$ かつ $1 \leq a \leq n-d-1$ を満たす d と a を固定する。これらの条件により、$a+d+1 \leq n$ であり、かつ a と $a+d+1$ の間に（両端を除いて）少なくとも 1 つの数が存在することが保証される。Ada は a を、Bob は $a+d+1$ を受け取らなければならず（それぞれ確率 $\frac{1}{n}$）、他の $k-2$ 人のプレイヤーはそれぞれ d 個の数 $a+1, \ldots, a+d$ のいずれかを受け取らなければならない。独立性より、

$$\mathrm{P}(\text{Ada の数が}a,\ \text{Bob の数が}a+d+1,\ \text{他は真にその間}) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{d}{n}\right)^{k-2} = \frac{d^{k-2}}{n^k}.$$

考えてみよう 勝者が 2 人になるあらゆる場合が、プレイヤーと a、d にわたる和の中にちょうど 1 回ずつ現れるのはなぜか。

勝者が 2 人いるとは、あるプレイヤーがただ 1 人だけの最小の数を持ち、それとは別のプレイヤーがただ 1 人だけの最大の数を持つということである。小問 (i) と同様に、小さい側の勝者は一意的であり、大きい側の勝者も一意的である。よって結果から、相異なるプレイヤーの**順序対**（小さい側の勝者、大きい側の勝者）と、小さい側の数 a、および大きい側の数までの間隔 $d \geq 1$ が定まる。$k-2 \geq 2$ 人の他のプレイヤーの数が真にその間にあるので、間隔は少なくとも 1 でなければならない。これらの選び方が異なれば、互いに排反な事象になる。プレイヤーの順序対は $k(k-1)$ 通りあり、それぞれ (Ada, Bob) と同じだけ寄与するので、

$$\mathrm{P}(\text{勝者が 2 人}) = k(k-1) \sum_{d=1}^{n-2} \sum_{a=1}^{n-d-1} \frac{d^{k-2}}{n^k} = \frac{k(k-1)}{n^k} \sum_{d=1}^{n-2} (n-1-d)\, d^{k-2},$$

となる。内側の和は $n-d-1$ 個の等しい項からなるからである。

ここで $k=4$ とし、$m=n-1$ とおくと、d は 1 から $m-1$ までを動く。与えられた 2 つの公式を n の代わりに $m-1$ として用いると、

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{m-1}(m-d)\,d^2 &= m\cdot\tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1)-\tfrac{1}{4}(m-1)^2m^2\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)\big[2(2m-1)-3(m-1)\big]\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)(m+1).\end{aligned}$$

したがって、$m-1=n-2$ かつ $m+1=n$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{勝者が 2 人}) = \frac{12}{n^4}\cdot\frac{1}{12}(n-1)^2(n-2)n = \frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3},$$

となり、これが求める結果である。

$k=4$ のときの勝者 1 人と 2 人の比較

あるプレイヤーがただ 1 人だけの最小の数を持つという事象を L、あるプレイヤーがただ 1 人だけの最大の数を持つという事象を H とする。小問 (i) より $\mathrm{P}(L)=\frac{(n-1)^2}{n^2}$ である。すべての数 x を $n+1-x$ に置き換えると、一様分布に従う数は一様分布に従う数に移り、「最小」と「最大」が入れ替わるので、$\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(L)$ も成り立つ。

勝者がちょうど 2 人であるという事象は $L\cap H$ であるので、$T=\mathrm{P}(L\cap H)=\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}$ と書く。勝者がちょうど 1 人であるとは、L または H が起こるが両方は起こらないということであるから、

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 人}) = \mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-2\,\mathrm{P}(L\cap H) = \frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T.$$

勝者が 2 人である確率が 1 人である確率より大きくなるのは、次の場合であり、かつその場合に限る。

$$\begin{aligned}T > \frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T &\iff 3\cdot\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3} > \frac{2(n-1)^2}{n^2}\\ &\iff 3(n-2)>2n \iff n>6,\end{aligned}$$

ここで正の量 $\frac{(n-1)^2}{n^3}$ で割った（$n\geq 3$ なので正である）。$n=6$ では 2 つの確率は等しいので、求める最小値は

$$n=7.$$

である。

検算

- $n=3$、$k=4$ のとき、結果は全部で 81 通りある。1 で勝つには残り 3 つの数が $\{2,3\}$ に属する必要があり、$4\cdot 2^3=32$ 通りである。2 で勝つには残り 3 つがすべて 3 である必要があり、4 通りである。よって $\mathrm{P}(W)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}=\frac{(3-1)^2}{3^2}$ となる。
- $n=6$ では「ちょうど 1 人」と「ちょうど 2 人」の確率はともに $\frac{25}{54}\approx 0.463$ である。$n=7$ ではそれぞれ $\frac{144}{343}\approx 0.420$ と $\frac{180}{343}\approx 0.525$ である。これらの値と、$n\le 8$、$k=2,3,4$ に対する両小問の公式は、すべての結果をコンピュータで数え上げることによって確認した。
- $n\to\infty$ のとき同じ数が重なることはまれになるので、プレイヤーが 4 人ならば、ほぼ確実にただ 1 人の最小とただ 1 人の最大がともに存在するはずである。実際、$\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}\to 1$ である。

よくある間違い

- 小問 (i) の因子 k、あるいは小問 (ii) の因子 $k(k-1)$ を忘れること。小問 (ii) では、一方が小さい側、他方が大きい側であるから、勝者の組は順序対である。
- 「勝者がちょうど 1 人」を $\mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-\mathrm{P}(L\cap H)$ と計算してしまうこと。これは「少なくとも 1 人」の確率である。重なりの部分は 2 回引かなければならない。
- $n=6$ と答えること。このとき 2 つの確率は等しく、大小が厳密についていない。

STEP のその先へ

事象を「誰が」と「どこで」によってラベル付けされた互いに排反な部分に分けるという手法は、標本の最小値や最大値といった順序統計量（order statistics）の分布を求めることの離散版である。連続的な標本に対しては、同じ議論によって最小値と最大値の同時密度（joint density）が得られ、この問題を面白くしている同点は起こらなくなる。これらの考え方に触れるには、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）がよい出発点である。

解答例

STEP III 2024、第 1 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型級数

STEP III 2024、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで扱う和はすべて同じ方法で処理する。項を部分分数（partial fractions）に分解し、$1/r^2$ の定数倍になっている部分を取り出し（これらを足し合わせると S_N の定数倍になる）、残りはすべて $f(r)-f(r+1)$ という形の差にまとめる。こうした差の和は望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合う。全体を通して N までの有限和（finite sum）で計算し、すべての部分の極限がわかった最後の段階で初めて $N\to\infty$ とする。

解答

小問 (i)

共通の分母 $r^2(r+1)$ で通分すると、

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

となり、示すべき式が得られる。

次に $r=1$ から N まで和をとる。$1/r^2$ の項からは S_N が得られ、残りの 2 つの項は打ち消し合う。

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

したがって

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

$N \to \infty$ のとき $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$ かつ $\frac{1}{N+1} \to 0$ であるから、右辺は $\frac{1}{6}\pi^2 - 1$ に近づく。無限級数の和は定義により部分和（partial sums）の極限であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

小問 (ii)

次のようにおく。

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

両辺に $r^2(r+1)(r+2)$ を掛け、隠蔽法（cover-up rule）を用いる。$r = 0$ とおくと $B = \frac{1}{2}$、$r = -1$ とおくと $C = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 1} = 1$、$r = -2$ とおくと $D = \frac{1}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1}{4}$ が得られる。r が大きいとき左辺は $1/r^4$ のオーダーであるから、右辺の $1/r$ の項は打ち消し合わなければならない。すなわち $A + C + D = 0$ であり、$A = -\frac{3}{4}$ を得る。よって

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

考えてみよう 3 つの項 $-\frac{3}{4r}$、$\frac{1}{r+1}$、$-\frac{1}{4(r+2)}$ は、1 つの打ち消し合う差には見えない。どうすれば打ち消し合う形にできるだろうか。

真ん中の係数を $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ と分け、各部分が隣の項と組になるようにする。

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

これで各括弧が打ち消し合う。

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

$N \to \infty$ とすると、最後の 2 項は 0 に近づき、$S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

小問 (iii)

示すべき式の右辺には $\frac{2}{r^2(r+1)}$ があるので、2 つの項を比較する。小問 (i) より、

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

一方、

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

ここで両方の段階で $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$ を用いた。辺々引くと、

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

すなわち

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

考えてみよう なぜ最初から無限級数を項ごとに足し合わせてはいけないのだろうか。

無限和を組み替えてよいのは各部分が収束（converge）するとわかってからなので、まず N までの和をとる。括弧の部分は打ち消し合う。

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

小問 (i) より、$N \to \infty$ のとき右辺の第 1 の和は（$2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$ に）収束し、$\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$ である。よって左辺も収束し、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

となり、示すべき式が得られる。両辺はともに $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$ に等しい。

検算

- 小問 (ii) で $N = 1$ とすると、和はただ 1 つの項 $\frac{1}{6}$ であり、公式からは $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$ が得られる。
- 数値的には、$\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$、$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$、$\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$ である。各級数の最初の 100 万項をコンピュータで足し合わせると、3 つの値すべてが少なくとも小数第 9 位まで再現される。
- 3 つの小問すべての有限和の恒等式は、59 までのすべての N について、有理数演算によって厳密に確かめた。

よくある間違い

- 打ち消し合う和の両端の項を誤ること。特に $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$ の和は 1 ではなく $\frac{1}{2}$ から始まる点に注意。
- 調和級数（harmonic series）型の部分を有限和の中でまとめておかずに、$\sum \frac{1}{r}$ のような発散（diverge）する別々の無限級数に分けてしまうこと。

STEP のその先へ

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$ という値は、オイラー（Euler）によるバーゼル問題（Basel problem）の解であり、大学では通常フーリエ級数（Fourier series）や $\sin x$ の無限積表示を用いて証明される。ここで有限和に払った注意こそ、解析学（analysis）の講義で厳密に扱われる内容である。すなわち、級数とはその部分和の極限であり、収束する級数どうしは足し合わせてよいが、発散する級数どうしはそうしてはならない。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこの立場で級数を扱っており、次に読む本として適している。

解答例

STEP III 2024、第 2 問

純粋数学 • 不等式と絶対値

STEP III 2024、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで平方根の中に現れる式はどれも常に正の値をとる二次式（quadratic）であり、各不等式の両辺はともに非負である。したがって、解集合（solution set）を変えずに両辺を 2 乗してよい。2 乗すると、どの問題も二次式の符号（あるいは x^2 の項が打ち消し合う場合には一次関数（linear function）の符号）に関する主張に帰着する。幾何的には、$y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$ は双曲線（hyperbola）の上半分であり、問題に登場する直線はその弦（chord）や漸近線（asymptote）である。

解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）すると $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$ となるので、平方根はすべての x に対して定義される。各不等式の両辺は非負であり、$A, B \geq 0$ のとき $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$ が成り立つ。

(a) 両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ または } x \geq 8. \end{aligned}$$

いずれの場合も、等号は $x = 0$（すべての辺が 8 に等しい）と $x = 8$（すべての辺が 16 に等しい）で成り立つ。

小問 (ii)

(a) 平方の差（difference of two squares）を用いると、

$$\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)\right)\mathrm{f}(x) = (4x^2 - 8x + 64) - 4(x-1)^2 = 60.$$

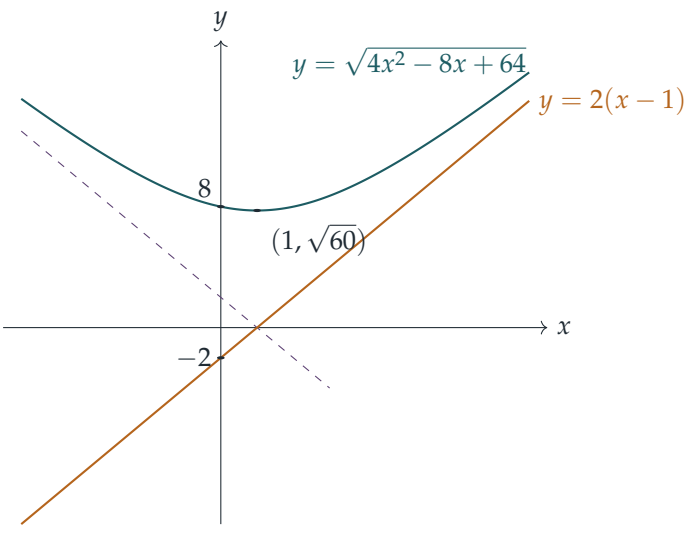
$x > 1$ のとき括弧内は正なので、これで割ってよい：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{60}{\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)}.$$

$x \to \infty$ のとき、分母は $2(x-1)$ 以上であり、これは無限大に発散するので、求めるとおり $\mathrm{f}(x) \to 0$ となる。

(b) $y = \sqrt{4(x-1)^2 + 60}$ とおく。すると $y > 0$ かつ $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$ であるから、この曲線は $(1, 0)$ を中心とする双曲線の上側の枝である。曲線は $x = 1$ に関して対称であり、$x = 1$ で最小値 $\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$ をとり、y 軸と $(0, 8)$ で交わる。

$y > \sqrt{4(x-1)^2} = 2|x-1|$ であるから、曲線は 2 直線 $y = \pm 2(x-1)$ のどちらよりも真に上側にある。小問 (a) より、$x \to \infty$ のとき曲線は $y = 2(x-1)$ に近づく。$x = 1$ に関する対称性により、$x \to -\infty$ のとき曲線は $y = -2(x-1)$ に近づく。直線 $y = 2(x-1)$ は傾き 2 で、$(1, 0)$ と $(0, -2)$ を通る。



破線はもう一方の漸近線 $y = -2(x-1)$ である。

小問 (iii)

ここでも $4x^2-5x+4=4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{39}{16}>0$ であるから、平方根は常に定義される。(非負である) 両辺を2乗すると、不等式は次と同値になる。

$$(m^2-4)x^2+(2mc+5)x+(c^2-4)\geq 0. \qquad (*)$$

考えてみよう $(*)$ の左辺がちょうど $x\geq 3$ のときに限って非負となるのは、どのような種類の式だろうか。

$m^2-4>0$ ならば、$x\to-\infty$ のとき左辺は $+\infty$ に発散するので、絶対値の大きな負の x が $(*)$ を満たしてしまう。$m^2-4<0$ ならば、$x\to+\infty$ のとき左辺は $-\infty$ に発散するので、大きな x が条件を満たさなくなる。どちらも許されないので $m^2=4$ であり、$(*)$ は一次不等式になる。一次不等式 $ax+b\geq 0$ の解集合が $\{x:x\geq 3\}$ となるのは、$a>0$ かつ $3a+b=0$ のとき、かつそのときに限る。

$m=2$ とする。すると $a=4c+5$、$b=c^2-4$ であるから、次が必要である。

$$3(4c+5)+c^2-4=c^2+12c+11=(c+1)(c+11)=0, \qquad 4c+5>0.$$

解 $c=-11$ は $a=-39<0$ を与えるので不適である。解 $c=-1$ は $a=1>0$ を与える。よって

$$m=2, \qquad c=-1$$

が条件を満たす。確認のため計算すると $(2x-1)^2-(4x^2-5x+4)=x-3$ であり、これはちょうど $x\geq 3$ のときに限って非負である。($m=-2$、$c=1$ としても同じ $|mx+c|$ が得られ、同様に正しい。)

小問 (iv)

$g(x)=x^2+px+q$、$L(x)=mx+c$ とおく。$|g|\leq L \iff -L\leq g\leq L$ であるから、不等式が成り立つのは次の両方が成り立つとき、かつそのときに限る。

$$g(x)-L(x)\leq 0 \qquad \text{かつ} \qquad g(x)+L(x)\geq 0.$$

$g-L$ と $g+L$ はどちらも最高次の係数が1の二次式である。

- $g-L\leq 0$ となる集合は閉区間 $[a,b]$ である (空集合や1点である場合もある)。
- $g+L\geq 0$ となる集合は、全体から開区間 (r,s) を除いたものである。$g+L$ が実数解をもたなければ、何も除かれない。

したがって解集合は、$[a,b]$ から (r,s) を除いたものである。これが $[-5,1]\cup[5,7]$ となるためには、$a=-5$、$b=7$ (外側の端点) でなければならず、除かれる隙間はちょう

ど $(1,5)$ でなければならないので、$r=1$、$s=5$ である。よって

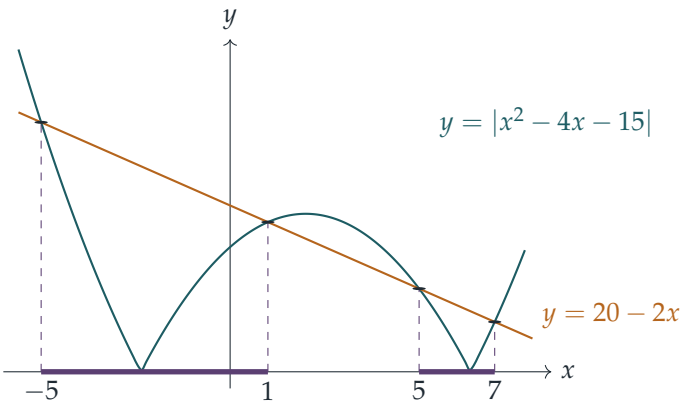
$$g(x)-L(x)=(x+5)(x-7)=x^2-2x-35,$$
$$g(x)+L(x)=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5.$$

両式を足して 2 で割ると $g(x)=x^2-4x-15$ が得られる。引いて 2 で割ると $L(x)=-2x+20$ が得られる。したがって

$$p=-4,\qquad q=-15,\qquad m=-2,\qquad c=20.$$

以上の各段階はすべて逆にたどれるので、これらの値に対して解集合は確かに $[-5,1]\cup[5,7]$ となる。実際、必要なのは $(x+5)(x-7)\le 0$ かつ $(x-1)(x-5)\ge 0$ である。また、条件を満たす値はこれらに限られる。

図において、g の根は $2\pm\sqrt{19}\approx -2.36,\ 6.36$ である。直線 $y=20-2x$ は $|g|$ の外側の腕と $x=-5$ および $x=7$ で交わり、折り返された山の部分を $x=1$ と $x=5$ で横切る。



検算

- (ii)(a) において、$x=100$ とすると $f(100)=\sqrt{39264}-198\approx 0.151$ となり、$60/(\sqrt{39264}+198)\approx 0.151$ と一致する。
- (iv) において、$x=0$ のとき $|-15|=15\le 20$ なので、0 は解である。$x=3$ のとき $|9-12-15|=18>14$ なので、3 は解でない。$x=8$ のとき $|64-32-15|=17>4$ なので、8 は解でない。これらは $[-5,1]\cup[5,7]$ と一致する。細かい格子上の x についてコンピュータで確認したところ、4 つの解集合すべてが正しいことが確かめられた。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに 2 乗してしまうこと。ここで 2 乗が正当なのは、両辺がともに非負だからにほかならない。
- (iii) において、本当の二次式のまま残してしまうこと。二次不等式の解集合が片側に伸びる半直線になることは決してないので、x^2 の項は打ち消し合わなければならない。
- (iv) において、端点の組み合わせを誤ること。外側の端点 $-5,7$ は $g-L$ に、内側の端点 $1,5$（隙間）は $g+L$ に対応する。

STEP のその先へ

曲線 $y^2-4(x-1)^2=60$ は双曲線であり、小問 (ii) は漸近線の求め方を示している。すなわち、曲線と候補となる直線との差を有理化（rationalise）するのである。「共役」（conjugate）を掛けるというこの同じ技法は、大学 1 年の解析学（analysis）における極限の標準的な道具である。(iv) のように $|g|\le L$ を 2 つの片側条件に書き直すことは、解析学で絶対値（absolute value）を含む不等式を扱う際の常套手段である。次の一歩としては、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

STEP III 2024、第 3 問

純粋数学 • 単調関数と導関数

STEP III 2024、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの導関数（derivative）にかかっている。g を微分して通分すると、分子は x の**一次式**にまで簡単になるので、その符号は容易に読み取れる。小問 (iii) とのつながりは、g がちょうど $\ln \mathrm{f}$ の導関数になっていることである。したがって、(ii) のグラフで目に見える形になる g の符号が、f が増加するか減少するかを決める。

解答

小問 (i)

$x > 0$ であるから、$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$ と書ける。すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

となり、また分母を x^2+x として商の微分法（quotient rule）を用いると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x} = \frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

である。差をとると x^2 の項は打ち消し合う：

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

分母は正であるから、$\mathrm{g}'(x)$ の符号は $N(x) = (2c-1)x + c$ の符号と一致する。

(a) $c \geq \frac{1}{2}$ ならば $(2c-1)x \geq 0$ かつ $c \geq \frac{1}{2} > 0$ であるから、すべての $x > 0$ に対して $N(x) > 0$ である。したがって、すべての $x > 0$ で傾き（gradient）は正である。

(b) $0 \le c < \frac{1}{2}$ ならば $1-2c>0$ であり、

$$N(x)<0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

よって傾きが負になるのは、ちょうど $x > \dfrac{c}{1-2c}$ のときである。($c=0$ のときは、これはすべての $x>0$ である。) $x_0 = \dfrac{c}{1-2c}$ とおく。$c>0$ のとき、g は $(0, x_0]$ で増加し、$[x_0, \infty)$ で減少する。

小問 (ii)

x が大きいときの振る舞いも調べる必要がある。g の二つの項はどちらも 0 に近づくので $\mathrm{g}(x) \to 0$ となるが、グラフにはどちら側から近づくかも示すべきである。$t = \frac{1}{x}$ として $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$ を用い、さらに $\dfrac{x+c}{x(x+1)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c-1}{x^2} + \cdots$ を用いると、

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{十分大きい} x.$$

を得る。

> **考えてみよう** g が増加して 0 に近づくならば、グラフは軸のどちら側になければならないか？

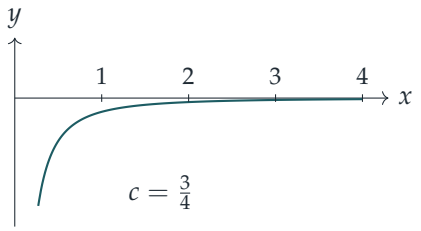
下側でなければならない。g が狭義単調増加（strictly increasing）ならば、任意の x に対して、$y > x$ であるすべての y について $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(y)$ であり、$y \to \infty$ とすると $\mathrm{g}(x) < 0$ が得られる（$\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x+1) \le 0$ であるから不等号は厳密である）。同様に、狭義単調減少で 0 に近づく関数は正である。

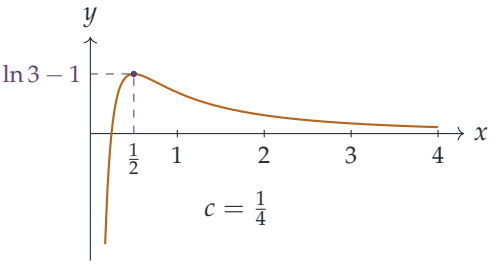
(a) $c = \frac{3}{4}$. (i)(a) より、g は全域で増加する。($x \to 0$ のとき) $-\infty$ から 0 に向かって上昇し、軸の下側にとどまる。$-\frac{1}{4x^2}$ のように近づくので、軸と交わることはなく、極値点（turning point）もない。例えば $\mathrm{g}(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$ である。

(b) $c = \frac{1}{4}$. このとき $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$ である。曲線は $-\infty$ から上昇し、$x = \frac{1}{2}$ で最大値をとる。そこでは

$$\mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

である。その後は $\frac{1}{4x^2}$ のように、上側から 0 に向かって減少する。$[\frac{1}{2}, \infty)$ では 0 に向かって減少するので、そこでは正である。$(0, \frac{1}{2})$ では $-\infty$ から正の値まで増加するので、軸とちょうど一度、$\frac{1}{4}$ より少し小さい点（数値的には $x \approx 0.243$）で交わる。





（縦方向の目盛りは異なる。右側のグラフは、小さな正のこぶが見えるように縦に引き伸ばしてある。どちらのグラフでも y 軸は漸近線（asymptote）である。）

小問 (iii)

$x > 0$ に対して $\mathrm{f}(x) > 0$ であるから、対数をとることができる：

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x + c) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

積の微分法（product rule）で微分し、(i) で求めた導関数を用いると

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x + c) \cdot \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

となる。よって $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$ であり、$\mathrm{f}(x) > 0$ であるから f' は g と同じ符号をもつ。また、その二つの項はどちらも 0 に近づくので、すべての c に対して $x \to \infty$ のとき $\mathrm{g}(x) \to 0$ となることにも注意する。

(a) $c \geq \frac{1}{2}$**.** (i)(a) より、g は $x > 0$ で狭義単調増加であり、0 に近づく。(ii) の枠のあとの議論により、すべての $x > 0$ に対して $\mathrm{g}(x) < 0$ である。したがって $\mathrm{f}'(x) < 0$ であり、f は減少する。

(b) $0 < c < \frac{1}{2}$**.** (i)(b) より、g は $[x_0, \infty)$ で狭義単調減少であり 0 に近づくので、そこでは $\mathrm{g} > 0$ である。特に $\mathrm{g}(x_0) > 0$ である。$(0, x_0]$ では g は連続かつ狭義単調増加であり、$x \to 0$ のとき $\mathrm{g}(x) \to -\infty$ である（$c > 0$ なので、これは問題文で与えられている）。したがって、ちょうど一点 $x_1 \in (0, x_0)$ で値 0 をとり、$(0, x_1)$ で $\mathrm{g} < 0$、(x_1, ∞) で $\mathrm{g} > 0$ となる。よって $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ であり、そこで f' の符号は負から正に変わる。したがって f は x_1 で極値点（極小点）をもつ。

? **考えてみよう** なぜ $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ だけでは不十分なのか？

停留点（stationary point）は必ずしも極値点ではない（原点における $y = x^3$ を考えよ）。x_1 を極値点にしているのは f' の符号の変化であり、それこそが g の形からわかることである。

(c) $c = 0$. このとき、すべての $x > 0$ に対して $g'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$ であるから、g は狭義単調減少であり 0 に近づく。したがって、すべての $x > 0$ に対して $g(x) > 0$ であり、$f'(x) > 0$ となるので、$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は増加する。

検算

- ある点、例えば $x = 1$、$c = \frac{1}{4}$ で g を数値的に微分してみる。公式からは $g'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$ が得られ、これは差分商と一致する。
- $c = \frac{1}{4}$：$g(0.2) \approx -0.083$、$g(0.3) \approx 0.056$ であり、0.243 付近でただ一度交わることと整合する。$c = \frac{3}{4}$ では $g(3) \approx -0.025$ であり、まだ軸のわずかに下にある。
- $c = \frac{1}{4}$ の場合の (iii)(b) では、f の最小値は同じ $x \approx 0.243$ でとられる。また、$(0, \frac{1}{2})$ に属するいくつかの c の値について、細かい格子点上で f をコンピュータで調べると、極値点はちょうど一つ見つかる。
- $c = 0$ のとき $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ は増加して e に近づき、$c = 1$ のとき $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ は減少して e に近づく。これは e を挟み込む、おなじみの二つの数列である。

よくある間違い

- 「g は増加する」ことだけから $g < 0$ と結論してしまう。$x \to \infty$ のとき $g \to 0$ という極限も必要である。
- (ii)(b) で、曲線を常に負であるように描いてしまう。最大値 $\ln 3 - 1$ は小さいが正であるから、曲線は軸と交わり、上側から再び軸に近づかなければならない。
- 指数が定数であるかのように $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$ を微分してしまう。まず対数をとること。

STEP のその先へ

$(1 + \frac{1}{x})^x$ が増加し、$(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ が減少して、どちらも e に近づくという事実は、e を定義する極限が存在することを示す、大学一年次の古典的な方法である。これは単調収束定理（monotone convergence theorem）の一例である。この問題は、振る舞いが切り替わるちょうどの境目 $c = \frac{1}{2}$ を見つけており、展開 $g(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$ がその理由を説明している。単調数列と極限についてさらに学ぶには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 2024、第 4 問

純粋数学 ・ 放物線の接線

STEP III 2024、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては 2 直線のなす角の tan を与える公式にかかっている。これは $\tan(A-B)$ の公式を言い換えたものにすぎない。$x=p$ と $x=q$ における接線（tangent）が点 (X,Y) で交わり、$p+q$ と pq が X と Y で表されることがわかれば、角についての条件は $(p-q)^2$ と pq を含むので、X と Y だけで書き直すことができる。その書き直した条件が軌跡（locus）である。

解答

小問 (i)

2 直線が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α、β とすると、$m_1=\tan\alpha$、$m_2=\tan\beta$ である（どちらの直線も傾き（gradient）をもつので、いずれも鉛直ではない）。2 直線のなす角は、符号と 180° の整数倍の差を除いて $\alpha-\beta$ である。2 直線のなす鋭角（acute angle）が 45° ならば、$\alpha-\beta$ は $\pm45^\circ$ に 180° の整数倍を加えたものであり、tan は周期（period）180° をもつから、

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

特に $\cos(\alpha-\beta)\neq0$ であるから、加法定理（compound-angle formula）が適用でき、$1+m_1m_2\neq0$ である：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

よって $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm 1$ となり、示すべきことが示された。より一般に、2 直線のなす鋭角 θ は $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ を満たす。これは小問 (iii) で用いる。

小問 (ii)

C 上では $y = \dfrac{x^2}{4a}$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{2a}$ である。$\left(p, \frac{p^2}{4a}\right)$ における接線は

$$y - \frac{p^2}{4a} = \frac{p}{2a}(x - p) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{p}{2a}x - \frac{p^2}{4a},$$

であり、同様に $x = q$ における接線は $y = \dfrac{q}{2a}x - \dfrac{q^2}{4a}$ である。辺々引くと、

$$\frac{p - q}{2a}\,x = \frac{p^2 - q^2}{4a} = \frac{(p - q)(p + q)}{4a}.$$

$p \neq q$ であるから $p - q$ で割ることができ、$x = \frac{1}{2}(p + q)$ を得る。これが示すべきことであった。これを 1 本目の接線の式に代入すると、

$$y = \frac{p(p + q)}{4a} - \frac{p^2}{4a} = \frac{pq}{4a}.$$

したがって 2 本の接線は

$$(X, Y) = \left(\tfrac{1}{2}(p + q),\ \frac{pq}{4a}\right), \qquad \text{よって} \qquad p + q = 2X, \quad pq = 4aY. \qquad (*)$$

で交わる。

次に、$x = p$ と $x = q$ における接線のなす角が 45° であるとする。このとき 2 本の接線は明らかに異なる直線であるから、$p \neq q$ であり、$(*)$ が成り立つ。傾きは $m_1 = \frac{p}{2a}$、$m_2 = \frac{q}{2a}$ であるから、

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(p - q)/(2a)}{1 + pq/(4a^2)} = \frac{2a(p - q)}{4a^2 + pq}.$$

小問 (i) よりこれは ± 1 に等しい。2 乗すれば符号が消える：

$$4a^2(p - q)^2 = (4a^2 + pq)^2.$$

> **考えてみよう** 条件に含まれるのが $p + q$ ではなく $p - q$ であるとき、どうすれば p と q を消去できるだろうか。

$(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ を用いる。これは対称式（symmetric expression）であるから、$(*)$ が使える：

$$(p - q)^2 = 4X^2 - 16aY, \qquad 4a^2 + pq = 4a^2 + 4aY = 4a(a + Y).$$

条件は

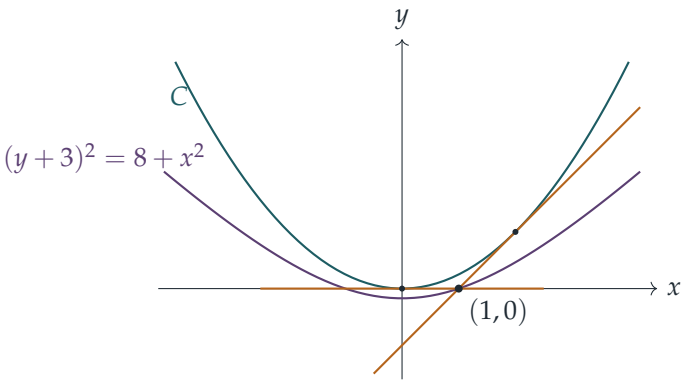
$$4a^2\,(4X^2 - 16aY) = 16a^2(a+Y)^2.$$

となる。$16a^2$ で割ると（$a \neq 0$ であるから割ってよい）、

$$X^2 - 4aY = Y^2 + 2aY + a^2,$$

$$\text{よって} \qquad X^2 + 8a^2 = Y^2 + 6aY + 9a^2 = (Y+3a)^2.$$

したがって交点は $(y+3a)^2 = 8a^2 + x^2$ 上にあり、示すべきことが示された。



$a = 1$ のとき：$x = 2$ における接線（傾き 1）と $x = 0$ における接線（傾き 0）のなす角は 45° であり、2 本は $(1, 0)$ で交わる。この点は双曲線（hyperbola）の上側の枝の上にある。

小問 (iii)

(X, Y) を $(y+7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$ 上の点で、C の 2 本の接線（$x = p$ と $x = q$ における接線、ただし $p \neq q$）が交わる点とする。このとき $(*)$ が成り立つ。小問 (i) の最後の注意により、2 本の接線のなす鋭角 θ は

$$\tan^2\theta = \left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2 = \frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2} = \frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

を満たす。ここでは小問 (ii) と同じ置き換えを用いた。（$Y = -a$ ならば 2 本の接線は直交することになるが、この曲線上ではそれが起こりえないことを以下で示す。）

考えてみよう　$X^2 - 4aY$ を扱うのに、曲線の方程式はどのように役立つだろうか。

曲線の方程式を展開すると $Y^2 + 14aY + 49a^2 = 48a^2 + 3X^2$、すなわち

$$3X^2 = Y^2 + 14aY + a^2.$$

である。すると

$$3(X^2 - 4aY) = Y^2 + 14aY + a^2 - 12aY = Y^2 + 2aY + a^2 = (Y + a)^2.$$

ここから 2 つのことが従う。第一に、$Y \neq -a$ である。もし $Y = -a$ ならば $X^2 - 4aY = 0$、すなわち $X^2 = -4a^2$ となるが、$a \neq 0$ であるからこれは不可能である。よって $X^2 - 4aY = \frac{1}{3}(Y + a)^2 > 0$ であり、これにより点が C の外側にあることも確かめられる。実際、p と q を解とする 2 次方程式 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつので、この曲線上のどの点を通る接線もたしかに 2 本存在する。第二に、

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{3}(Y + a)^2}{(Y + a)^2} = \frac{1}{3}.$$

したがって点が曲線上のどこにあっても $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。すなわち、2 本の接線のなす鋭角は一定であり、30° に等しい。

検算

- $a = 1$ のとき、$x = 2$ と $x = 0$ における接線は $y = x - 1$ と $y = 0$ であり、なす角は 45° である。2 本は $(1, 0)$ で交わり、$(0 + 3)^2 = 9 = 8 + 1^2$ が成り立つ。
- 小問 (iii) で $a = 1$ とし、$X = 0$ をとる。すると $(Y + 7)^2 = 48$ であるから、$Y = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0.072$ である。$(0, Y)$ を通る接線は $x = \pm\sqrt{-4Y} \approx \pm 0.536$ で接し、傾きは ± 0.268 である。$\tan 15° \approx 0.268$ であるから、それぞれの接線は水平方向と 15° の角をなし、2 本のなす角は 30° である。
- a の値を無作為に 1000 通り選び、それぞれの双曲線の両方の枝の上の点についてコンピュータで確かめたところ、45° と 30° の結果が確認された。

よくある間違い

- p と q を個別に求めようとすること。必要なのは対称な組み合わせ $p + q$ と pq だけであり、$(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ を用いればよい。
- 小問 (i) で $\pm$ を忘れること。条件を 2 乗すると 45° の角の両方の向きが保たれ、それによって 1 つの方程式にまとまるのである。
- 小問 (iii) で、約分する前に $Y + a \neq 0$ を確かめないこと。

STEP のその先へ

点 (X, Y) から放物線（parabola）に引いた接線は 2 次方程式 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ によって決まり、接線が一定の角で交わる点の軌跡はつねに双曲線になる（90° の場合は退化して準線（directrix）$y = -a$ となる）。これらの考え方は射影幾何学（projective geometry）に属し、そこでは極と極線の関係（pole–polar relation）が点とその接点弦（chord of contact）を結びつける。この種の問題をさらに、取り組み方の解説とともに知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2024、第 5 問

純粋数学 ・ 行列微分方程式

> **STEP III 2024、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.7 節「**決して変わらない量**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/lax-pairs.html

鍵となる考え方

すべてはトレース（trace）に関する二つの事実にかかっている。トレースは線形（linear）であり、$\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$ が成り立つ。小問 (ii) は行列式（determinant）の変化率を与える公式（ヤコビ（Jacobi）の公式）であり、「$\det \mathbf{M}$ は一定か？」という問いを「あるトレースは 0 か？」という問いに置き換える。(iii) では、交換子（commutator）$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ のトレースはつねに 0 であり、これから三つの不変量（invariant）がすべて得られる。(iv) では、同じ公式から $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ が $\ln|\det \mathbf{M}|$ の変化の速さを測ることがわかるので、問題は「トレースが一定でありながら行列式が変化する行列は存在するか」ということになる。

解答

小問 (i)

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{MN}$ の対角成分（diagonal entries）は $ap + br$ と $cq + ds$ であり、$\mathbf{NM}$ の対角成分は $pa + qc$ と $rb + sd$ である。よって

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

また、$\mathbf{M}+\mathbf{N}$ の対角成分は $a+p$ と $d+s$ であるから

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}+\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

同様に、スカラー（scalar）k に対して $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$ であり、$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ のトレースは $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ の導関数である。以下ではこれらを断りなく用いる。

小問 (ii)

成分 a, b, c, d は t に依存するとする（ダッシュは $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す）。積の微分法則（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad-bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

$\mathbf{M}$ は正則（non-singular）であるから $\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であり、

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da'-bc' & * \\ * & -cb'+ad' \end{pmatrix}.$$

このトレースは $\dfrac{a'd+ad'-b'c-bc'}{\det\mathbf{M}}$ であり、これは $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$ に等しい。以上で示された。

小問 (iii)

行列式。(ii) とトレースの線形性により

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

二つの行列 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ と $\mathbf{M}$ に (i) を用いると、$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$ を得る。よって右辺は 0 である。$\det\mathbf{M} \neq 0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$ が得られる。

トレース。(i) により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\Big(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\Big) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$ である。

2 乗のトレース。因子の順序を保つ限り、積の微分法則は行列に対しても成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

ここで二つの $\mathbf{MNM}$ の項が打ち消し合うことを用いた。これは $\mathbf{M}$ の代わりに $\mathbf{M}^2$ とした同じ交換子の形であるから、(i) によりそのトレースは 0 である。したがって $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$ も一定である。三つの量はいずれも t によらない。

考えてみよう $\mathbf{N}$ も t に依存するとき、$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ はどのように解けばよいか？

$\mathbf{N}$ のうち、あらゆる行列と可換な部分を切り離す。$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$ と書く。単位行列は $\mathbf{M}$ と可換であるから、$\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{MJ} - \mathbf{JM})$ となる。$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\mathbf{MJ} - \mathbf{JM} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

成分を比較すると、四つのスカラーの方程式が得られる。

$$a' = -tc, \qquad b' = t(a-d), \qquad c' = 0, \qquad d' = tc.$$

$t = 0$ における値を A, B, C, D として、これらを順に解く。

- $c' = 0$ より $c = C$ である。
- すると $a' = -Ct$、$d' = Ct$ であるから、$a = A - \frac{1}{2}Ct^2$、$d = D + \frac{1}{2}Ct^2$ となる。
- このとき $a - d = A - D - Ct^2$ であるから $b' = (A-D)t - Ct^3$ となり、$b = B + \frac{1}{2}(A-D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$ を得る。

したがって

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A-D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}.$$

検算として、トレースは $A + D$ であり、$ad - bc$ を展開すると t のべきはすべて打ち消し合って $AD - BC$ が残る。これはこの小問の前半の結果と一致する。

小問 (iv)

今度は $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN}$ であるから $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{N}$ であり、(ii) より

$$\mathrm{tr}(\mathbf{N}) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det \mathbf{M}).$$

よって、すべての t で $\mathrm{tr}\,\mathbf{N} = 0$ となるのは、$\det \mathbf{M}$ が一定であるときに限る。トレースが一定であることは行列式について何も述べていないので、答えは**否**であるはずだ。これを証明するには反例（counterexample）を一つ挙げればよい。

考えてみよう 問題が $\mathbf{N}$ を微分方程式を通してしか与えていないとき、反例はどのように作ればよいか？

逆向きに考える。トレースが 0 でない一定値で、行列式が一定でない正則行列 $\mathbf{M}(t)$ を任意に選び、$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ と**定義**する。すると方程式は自動的に成り立つ。そこで

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = 2, \qquad \det\mathbf{M} = 1 + t^2 \neq 0.$$

とする。すると

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$$

実際に掛け算すると、$\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ であることが確かめられる。また $\det\mathbf{N} = 1/(1+t^2)$ であるから、$\mathbf{N}$ は正則である。ところが

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

であり、これは $t \neq 0$ であるすべての t に対して 0 でない。よって、$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$ は必ずしも成り立つ**とは限らない**。必ず成り立つ**のは** $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$ であり、これは別のことである。

検算

- (iii) で $A = 1$、$B = 0$、$C = 2$、$D = 3$、$t = 1$ とする。公式から $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ となり、そのトレースは 4、行列式は 3 で、$t = 0$ のときと同じである。その 2 乗のトレースは $0 - 3 - 3 + 16 = 10$ であり、初期の行列についても $1 + 0 + 0 + 9 = 10$ となる。
- (iii) の $\mathbf{M}$ の公式は、ランダムな A, B, C, D に対して微分方程式を計算機で数値積分した結果と小数第 8 位まで一致した。時間に依存するランダムな $\mathbf{N}$ を用いて同じ数値積分を行ったときも、三つの不変量は一定に保たれた。
- (iv) で $t = 1$ のとき $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、そのトレースは 1 である。一方 $\det\mathbf{M} = 1 + t^2$ の対数微分（logarithmic derivative）はそこで $2t/(1+t^2) = 1$ であり、(ii) の予測どおりである。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ と書いてしまうこと。行列は可換とは限らないので、両方の順序を残さなければならない。

- $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}\mathbf{M}\operatorname{tr}\mathbf{N}$ と思い込むこと。これは誤りである。成り立つのは線形性と巡回性（cyclic rule）だけである。
- (iv) で $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = 0$ から直ちに $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$ を導いてしまうこと。「否」と答えるには具体的な反例が必要である。

STEP のその先へ

小問 (ii) はヤコビの公式の 2×2 の場合であり、この公式は $n \times n$ 行列に対しても成り立つ。$\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$ と組み合わせると $\det\mathbf{M}(t) = \det\mathbf{M}(0)\exp\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{N}$ が得られる。$\mathbf{N}$ が定数行列のとき、これは有名な恒等式 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{N}}$ となる。$\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ の形の方程式はラックス方程式（Lax equations）とよばれる。量 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k)$ はつねに保存され、そのためこれらは可積分系（integrable systems）の理論に現れる。トレース、行列式、行列指数関数（matrix exponential）について学ぶには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP III 2024、第 6 問

純粋数学 • 線形微分方程式

STEP III 2024、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

制御（control）u はすべての方程式に等しく加えられているので、係数の和が 0 になる座標の一次結合（linear combination）は u の影響をまったく受けない。その一次結合をうまく選べば、その導関数がそれ自身の定数倍になり、u がどうであれ指数関数的（exponentially）に増大または減衰する。指数関数は初期値が 0 でない限り決して 0 にならず、ここから必要条件（necessary condition）が得られる。それらの条件が成り立てば、運動はただ一つの一階微分方程式（first-order differential equation）に帰着し、定数の u を用いて解くことができる。

解答

小問 (i)

(a) 二つの方程式の差をとると、u の項が打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

よって $w = x - y$ は $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$ を満たし、任意の関数 u に対して

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

が成り立つ。粒子がある時刻 $t > 0$ に原点にあるならば、そこで $x - y = 0$ である。$\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$ であるから、$x_0 - y_0 = 0$、すなわち $x_0 = y_0$ でなければならない。

(b) $x_0 = y_0$ のとき、(a) の式から**すべての** t に対して $x - y = 0$ となるので、粒子は直

線 $y = x$ 上にとどまる。第一の方程式に $y = x$ を代入すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

u が定数ならば、これは定数係数の線形微分方程式（linear equation with constant coefficients）である。特殊解（particular solution）は定数 $-\frac{1}{2}u$ であるから

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

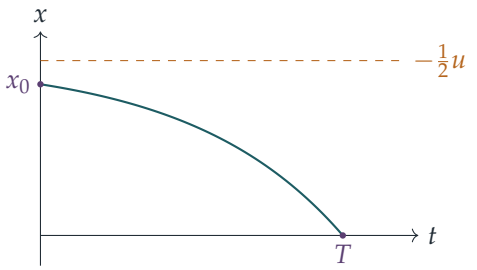
$x(T) = 0$ となればよい（このとき $y(T) = x(T) = 0$ も成り立つ）：

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad \Longrightarrow \quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

$T > 0$ より $\mathrm{e}^{2T} \neq 1$ であるから、両辺を割ることができて

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

符号は理にかなっている。何もしなければ $\dot{x} = 2x$ によって粒子は原点から遠ざけられるので、u は x_0 と逆向きに押さなければならない。（$x_0 = 0$ ならば、粒子は $u = 0$ のもとですでに原点に静止している。）



図は $x_0 = 1$、$T = 1$ の場合である。粒子は不安定な平衡点（unstable equilibrium）$x = -\frac{1}{2}u$ のわずかに下から出発し、そこから遠ざけられて、ちょうど時刻 T に原点に到達する。

小問 (ii)

(a) 小問 (i) にならい、$a + b + c = 0$（これにより u が打ち消される）を満たし、導関数がそれ自身の定数倍となる $ax + by + cz$ を探す。「x、次に $-2y$、次に z」というパターンから $w = x - 2y + z$ が思い浮かぶ：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

したがって、u がどうであれ $x-2y+z=(x_0-2y_0+z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$ である。原点では $w=0$ であり、$\mathrm{e}^{-t}\neq 0$ であるから $x_0-2y_0+z_0=0$ となる。すなわち $y_0=\frac{1}{2}(x_0+z_0)$ であり、y_0 は x_0 と z_0 の平均である。

考えてみよう u の影響を受けない一次結合がもう一つないだろうか？

後の二つの方程式はどちらも $x+u$ を含むので、差をとると u だけでなく x も消える。$v=y-z$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(x-2z+u)-(x-2y+u)=2(y-z)=2v,$$

よって $y-z=(y_0-z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$ である。

(b) 粒子がある時刻 $t>0$ に原点にあるならば、そこで $v=0$ である。$\mathrm{e}^{2t}\neq 0$ であるから $y_0=z_0$ を得る。これを (a) と合わせると $x_0=2y_0-z_0=y_0$ となるので、$x_0=y_0=z_0$ である。

(c) $x_0=y_0=z_0$ のとき、w と v はともに 0 から出発するので、すべての t に対して 0 のままである。よって $y=z$ であり、さらに $x=2y-z=y$ となる。粒子は直線 $x=y=z$ 上を動き、各方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4x-5x+u=-x+u$$

となる（第二式と第三式からも $x-2x+u$ となり、同じである）。u が定数ならば

$$x=u+(x_0-u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

$x(T)=0$ とおくと $u\left(1-\mathrm{e}^{-T}\right)=-x_0\,\mathrm{e}^{-T}$ を得る。$T>0$ より割ることができ、分子と分母に e^{T} を掛けて

$$\boxed{u=-\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T}-1}}$$

この場合、制御なしの運動 $\dot{x}=-x$ はもともと原点に向かって減衰するが、原点に達するのは $t\to\infty$ のときに限られる。原点に向かう小さな後押し（$T\to\infty$ のとき 0 に近づく）によって、粒子は有限時間で原点に到達する。

検算

- 極限：$T\to\infty$ のとき、(ii)(c) の答えは 0 に近づき、自然な減衰と一致する。一方、(i)(b) の答えは $-2x_0$ に近づき、このとき $x_0=-\frac{1}{2}u$ が平衡点となる。粒子はそこにとどまって決して原点に到達しないので、有限の T では u の大きさをわずかに大きくする必要があるのである。$T\to 0^{+}$ のときは、当然ながらどちらの答えも発散する。

- 数値計算：$x_0 = 1$、$T = 1$ のとき、小問 (i)(b) から $u \approx -2.3130$ が得られ、方程式を数値的に時間発展させると、$t = 1$ で誤差 10^{-8} 以内で $(0, 0)$ に到達する。(ii)(c) についても $u = -1/(\mathrm{e} - 1) \approx -0.5820$ で同様である。また、u を時間の定数でない関数としたときも、不変量（invariant）$x - y$、$x - 2y + z$、$y - z$ がそれぞれの指数関数に従うことを確認した。

よくある間違い

- (i)(a) や (ii)(a)、(b) で u を定数と仮定してしまうこと。これらの小問は**任意の** u についてのものであり、u が打ち消されることこそが要点である。
- (i)(b) と (ii)(c) で、すべての時刻で $y = x$（あるいは $x = y = z$）となる**理由**を述べ忘れること。これは初期値が 0 の場合の指数関数の式から従う。

STEP のその先へ

これは**制御理論**（control theory）の最初の一歩である。系を $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$ と書くと、ここで見つけた一次結合は $\mathbf{b}$ に直交する（orthogonal）A の左固有ベクトル（left eigenvector）であり、どのような制御もそれらに影響を与えることはできない。すべての状態を原点へ導けるかどうかは、カルマン（Kalman）の階数条件（rank condition）によって判定される。ここではその条件が成り立たず、まさにそれゆえに特別な初期点しかうまくいかないのである。固有ベクトルの側面については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）が、常微分方程式（ODE）の線形系については Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）が詳しい。

解答例

STEP III 2024、第 7 問

純粋数学 ・ e の 2 乗の無理性

STEP III 2024、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.4 節「e は無理数であり、e^2 もまた無理数である」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/e-irrational.html

鍵となる考え方

2 つの級数（series）はいずれも、指数関数の級数に階乗を掛けたものの裾（tail）である。$\mathrm{e} = \sum 1/r!$ に $(2n)!$ を掛けると、$r = 2n$ までの項はすべて整数となり、それ以降の部分はちょうど $\mathrm{f}(2n)$ になる。$1/\mathrm{e}$ と $\mathrm{g}(2n)$ についても同じことが起こる。もし e^2 が有理数（rational）であれば、これらの小さな裾の組合せは整数でなければならないが、それは 0 と 1 の間に厳密に挟まれてしまう。

解答

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

とおくと、$\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$、$\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$ である。また $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$ であることに注意する。

小問 (i)

すべての a_k は正であるから、$\mathrm{f}(n) > 0$ である。a_k の分母の各因数は $n+1$ 以上であるから $a_k \leq 1/(n+1)^k$ であり、$k \geq 2$ ならば（因数 $n+2$ が現れるので）厳密な不等式（strict inequality）が成り立つ。公比 $\frac{1}{n+1} < 1$ の等比級数（geometric series）と比較す

ると、

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

よって $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$ である。

小問 (ii)

$n+k+1 > 1$ であるから $a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$ となり、隣り合う項は狭義単調減少である。最初から 2 項ずつまとめると、

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

となる。各括弧は正だからである。代わりに第 1 項の後からまとめると、

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

となる。ここでも各括弧は正だからである。したがって $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$ である。

小問 (iii)

$m = 2n$ とおく。$\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0} 1/r!$ を用いると、

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

$r \leq m$ のとき $m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$ は整数であるから、第 1 の和は整数である。これを A とおく。第 2 の和において $m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$ であり、これは $\mathrm{f}(m)$ の第 k 項である。よって $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$ であり、$(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$ は整数である。

同様に $1/\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0}(-1)^r/r!$ から

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

を得る。

考えてみよう なぜこの問題では n ではなく $2n$ を用いるのだろうか。

$m = 2n$ は偶数であるから $(-1)^{m+k} = (-1)^k$ となり、裾は $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$ である（ここで a_k は m から作ったものとする）。したがって $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$ であり、$\dfrac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$ は整数である。（m が奇数ならば裾は $+\mathrm{g}(m)$ となり、代わりに負の符号が必要になる。）

小問 (iv)

小問 (iii) の整数 A と B を用いると、

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\Big(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\Big) \\ &= (2n)!\Big(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\Big) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

となる。$q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ だからである。p, q, A, B は整数であるから、すべての正の整数 n に対して $q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ も整数である。

小問 (v)

背理法（proof by contradiction）のため、e^2 が有理数であると仮定する。$\mathrm{e}^2 > 0$ であるから、正の整数 p, q を用いて $\mathrm{e}^2 = p/q$ と書け、両辺を e で割ると $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ を得る。小問 (iv) より、すべての $n \geq 1$ に対して $N_n = q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ は整数である。

> **考えてみよう** どうすれば N_n が整数になりえないことを示せるだろうか。

小問 (i) と (ii) を $2n$ に適用して挟み込む。$p, q > 0$ であるから、

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

ここで $2n > p + q$ となるように n を十分大きくとる。すると $0 < N_n < 1$ となり、N_n は 0 と 1 の間に厳密に挟まれた整数ということになるが、これはありえない。よって e^2 は無理数（irrational）である。

検算

小さな場合は正確に和を計算できる。$n = 2$ のとき、小問 (iii) は $24\mathrm{e} - \mathrm{f}(4)$ が整数であることを主張している。実際 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$ であり、$\mathrm{f}(4) = 24\mathrm{e} - 65 \approx 0.2388$ は余裕をもって $(0, \frac{1}{4})$ に入っている。同様に $\mathrm{f}(2) = 2\mathrm{e} - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$、$\mathrm{g}(2) = 1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$ である。コンピュータによる検証で、$n \leq 24$ に対する (i) と (ii) の評価、$2n \leq 22$ に対する (iii) の整数性、およびランダムな p, q に対して $0 < q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) < (p+q)/(2n)$ が成り立つことを確認した。

よくある間違い

- すべての k に対して $a_k < 1/(n+1)^k$ と主張すること。$k = 1$ では等号が成り立つので、厳密な不等式は $k \geq 2$ の項から生じる。

- $1/\mathrm{e}$ の展開における裾の符号を忘れること。それが $-\mathrm{g}(2n)$ となるのは、$2n$ が偶数だからにほかならない。
- 「N_n は小さい」で止まってしまうこと。矛盾を導くには $N_n > 0$ も必要であり、だからこそ (i) と (ii) の下からの評価が重要なのである。

STEP のその先へ

これはフーリエ（Fourier）による e が無理数であることの古典的な証明を、$\mathrm{e}^2 = p/q$ を $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ と分けて両方の級数が速く収束するようにすることで拡張したものである。同じ考え方をより丁寧に用いると、0 でないすべての有理数 r に対して e^r が無理数であることが示せる。また、リウヴィル（Liouville）はこれを用いて、e が整数係数のどの 2 次方程式の解にもならないことを示した。級数の裾を評価することは大学 1 年次の解析学（analysis）の中核をなす技法である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

解答例

STEP III 2024、第 8 問

純粋数学 ・ 交わる 2 次曲線

STEP III 2024、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

$y^2 - x^2 + \ldots$ の形の二次式が傾き（gradient）± 1 の 2 直線に分解されるのは、平方完成（completing the square）をしたときに定数項が残らない場合にちょうど限られる。問題の残りの部分での工夫は、一方の曲線の方程式の定数倍を他方の方程式に加えても共有点は失われないという点にある。うまく選んだ定数倍によって、厄介な四次式（quartic）の問題が「どの直線が放物線（parabola）と交わるか」という問題に変わり、これは 2 つの二次方程式を調べるだけで済む。

解答

小問 (i)

積が 0 となるのは因数のいずれかが 0 となるときに限るから、$(y-x+3)(y+x-5)=0$ を満たす点は、$y = x - 3$（傾き 1）上の点と $y = -x + 5$（傾き -1）上の点を合わせたものである。

一般の方程式については、両方の変数について平方完成する：

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = \left(y + \tfrac{1}{2}p\right)^2 - \left(x - \tfrac{1}{2}q\right)^2 - K, \qquad \text{ただし} K = \tfrac{1}{4}\left(p^2 - q^2\right) - r.$$

$Y = y + \frac{1}{2}p$、$X = x - \frac{1}{2}q$ とおく。これは平行移動（translation）であり、傾きを変えない。方程式は $(Y - X)(Y + X) = K$ となる。

$p^2 - q^2 = 4r$ ならば、$K = 0$ であり、方程式は $(Y - X)(Y + X) = 0$ となる。最初の段落により、これは傾き 1 と -1 の 2 直線 $Y = X$ と $Y = -X$ を表す。もとの座標では、

これらは

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p+q) = 0 \quad \text{および} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p-q) = 0.$$

である。

逆に、方程式が傾き ± 1 の 2 直線を表すと仮定し、$K = 0$ を示す。一方の直線は傾き 1 をもつから $Y = X + c$ の形であり、その上のすべての点が方程式を満たす。この直線上では $(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$ であるから、**すべての**実数 X に対して $2cX + c^2 = K$ が成り立つ。X の一次関数が定数となるのはその係数が 0 のときに限るから $c = 0$ であり、したがって $K = c^2 = 0$ である。よって $p^2 - q^2 = 4r$ となり、「必要十分条件」が証明された。

小問 (ii)

点が C_1 上にあれば、そこで $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$ が成り立ち、C_2 上にあれば、そこで $y - x^2 = 0$ が成り立つ。したがって共有点においては、式

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

は k の値によらず $0 + k \cdot 0 = 0$ となる。

$k = 1$ とすると方程式は

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

となり、これは小問 (i) の形で $p = 2s + 1$、$q = -1$、$r = s(s+1)$ としたものである。このとき

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

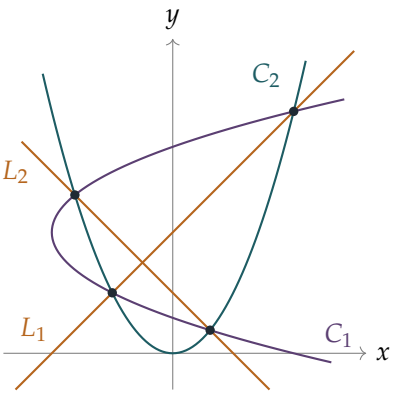
であるから、小問 (i) によりこれは傾き 1 と -1 の 2 直線の組である。小問 (i) の因数分解（factorisation）を $\frac{1}{2}(p+q) = s$、$\frac{1}{2}(p-q) = s + 1$ として用いると、方程式は

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

となるから、2 直線は

$$L_1 : \ y = x - s \qquad \text{および} \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

である。最初の段落により $C_1 \cap C_2$ のすべての点はこの方程式を満たすから、4 つの交点はすべて $L_1 \cup L_2$ 上にある。（これはすべての s について成り立つ。4 つの点が存在することは一度も必要としなかった。）



図は $s=-2$ の場合を示している。C_1 は $x=(y-2)^2-2$ であり、C_1 と C_2 の 4 つの共有点は、直線 $y=x+2$ と $y=1-x$ の上に 2 つずつある。

小問 (iii)

C_1 と C_2 のすべての共有点は、C_2 上にあり、かつ L_1 または L_2 上にある。$y=x^2$ を代入すると：

$$\text{直線}L_1:\quad x^2-x+s=0,$$
$$\text{直線}L_2:\quad x^2+x+s+1=0.$$

C_2 上の点は x 座標によって定まるから、各直線は C_2 と高々 2 点で交わる。したがって相異なる 4 つの共有点があるためには、各二次方程式が相異なる 2 つの実数解をもたなければならず、両方の判別式（discriminant）が正である：

$$1-4s>0 \quad \text{かつ} \quad 1-4(s+1)>0.$$

2 つ目から求める $s<-\frac{3}{4}$ が得られる。（1 つ目の $s<\frac{1}{4}$ はこのとき自動的に成り立つ。）

考えてみよう 小問 (iv) において、C_2 と $L_1\cup L_2$ の上にある 4 点を見つけるだけでは不十分なのはなぜか。

小問 (ii) で示したのは、C_1 と C_2 の共有点が 2 直線上にあることだけである。逆向きも必要であり、さらに 4 点が重ならないことも確かめなければならない。

小問 (iv)

$s<-\frac{3}{4}$ とする。このとき上の 2 つの判別式はともに正であり（$-3-4s>0$、また $1-4s>4>0$）、L_1 は C_2 と相異なる 2 点で交わり、L_2 も同様である。

これら 4 点は相異なる。 2 回数えられる点があるとすれば、それは L_1 と L_2 の両方の上にある。2 直線が交わるのは $x-s=-x-s-1$ のとき、すなわち点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-s\right)$

においてである。この点が C_2 上にあるのは $-\frac{1}{2} - s = \frac{1}{4}$、すなわち $s = -\frac{3}{4}$ のときに限るが、これは除外されている。よって相異なる 4 点が得られる。

それぞれの点は C_1 上にある。各点において $y - x^2 = 0$ が成り立ち（C_2 上にあるから）、小問 (ii) の $k = 1$ の方程式が成り立つ（L_1 または L_2 上にあるから）。辺々引くと

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0,$$

となり、これは C_1 の方程式である。

したがって C_1 と C_2 は少なくとも 4 つの相異なる共有点をもつ。小問 (iii) の議論により、4 つより多くはもちえない。よって両者はちょうど 4 つの相異なる点で交わる。

検算

- $y = x^2$ を C_1 に代入すると四次式 $x^4 + 2sx^2 - x + s^2 + s = 0$ が得られる。$(x^2 - x + s)(x^2 + x + s + 1)$ を展開するとちょうどこれになり、2 直線の組であることが確認できる。
- $s = -2$ のとき 4 点は $(2,4)$、$(-1,1)$ および $\left(\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\right)$ であり、いずれも $x = (y-2)^2 - 2$ を満たす。例えば $(2,4)$ については $(4-2)^2 - 2 = 2$ である。
- 境界 $s = -\frac{3}{4}$ では二次方程式は $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$（解 $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$）と $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ になり、相異なる共有点は 2 つしかなく、$x = -\frac{1}{2}$ が両方の直線で共有される。コンピュータで四次式の実数解の個数を数えると、$s = -0.76, -1, -2$ では 4 個、$s = -0.74, -0.5$ では 2 個であった。

よくある間違い

- 小問 (i) で「ならば」の向きしか証明しないこと。2 直線の組であれば $p^2 - q^2 = 4r$ とならなければならず、そのための議論（上のようなもの）が必要である。
- 小問 (iv) で、2 直線が C_2 上の点を共有しないことの確認を忘れたり、求めた点が実際に C_1 上にあることを示し忘れたりすること。

STEP のその先へ

族 $F + kG = 0$ は**二次曲線束**（pencil of conics）である。その各メンバーは $F = 0$ と $G = 0$ の共有点を通る。メンバーが退化（degenerate）する（2 直線の組になる）ように k を選ぶのは、2 つの二次曲線の交点を求める古典的な方法である。射影幾何学（projective geometry）では、これは 3×3 行列式（determinant）を 0 にすることで行

われ、k についての三次方程式が得られる。ここでは束が s によらず $k = 1$ で退化していたのである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次曲線の背後にある対称行列（symmetric matrix）を扱っている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2024、第 9 問

力学 ・ 斜め衝突

> **STEP III 2024、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべてはテーブルの平面内で起こるので、真上から見下ろして考える。各球は、最下点を中心とする半径 r の円になる。なめらかな（smooth）球どうしでは、撃力（impulse）は中心線（line of centres）に沿って働く。そこで速度を、その直線に沿った成分（運動量保存と反発の法則が適用される）と、それに垂直な成分（変化しない）とに分解する。その後 B は直線運動をするので、B が C に当たるかどうかは点と直線の距離の問題になる。

解答

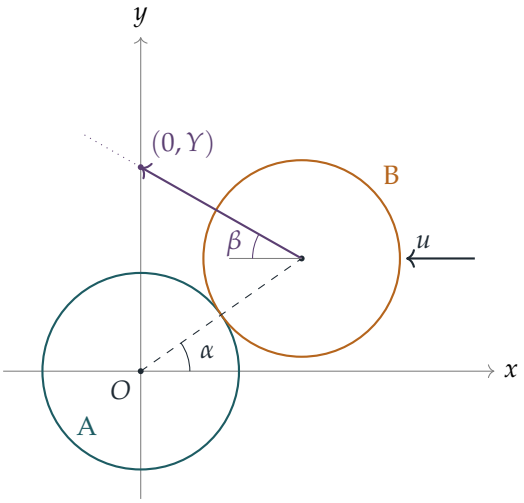
球はなめらかで質量が等しく、テーブルもなめらかであるとモデル化する。したがってどこにも摩擦はなく、各球は衝突の瞬間を除いて一定の速さで直線運動をする。以下では最下点を用いて考える。最下点は水平方向には中心とまったく同じように動く。半径 r の 2 つの球は、最下点どうしの距離が $2r$ のときに接する。

小問 (i)

B の最下点は直線 $y = 2r\sin\alpha$ 上を動く。B が A に接するのは、B の最下点の O からの距離が $2r$ になるときであり、それは点 $(2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$ である（B は x が大きい正の側からやってくるので、x 座標は正の方をとる）。よって衝突の瞬間、A から B へ向かう中心線の単位ベクトル（unit vector）は

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{であり、} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

はこれに垂直である。



衝突前の B の速度は $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、その **n** 方向の成分は $-u\cos\alpha$、**t** 方向の成分は $u\sin\alpha$ である。A は静止している。

球はなめらかなので、両者の間の撃力は **n** 方向に働く。よって B の **t** 成分は $u\sin\alpha$ のままである（また A は **t** 成分をもたない）。衝突後の **n** 成分をそれぞれ v_A、v_B とする。**n** 方向の運動量保存（conservation of momentum）（質量は等しい）とニュートンの反発法則（Newton's law of restitution）から

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}\big(0 - (-u\cos\alpha)\big) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

を得る（**n** 方向の接近の速さは $u\cos\alpha$ であり、**n** の正の側にある B が A から離れていく）。辺々加えると $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$ となり、$v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$ である。

よって衝突後の B の速度は

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

である。ここで $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)

両成分とも o でなく、x 成分は負、y 成分は正である（α は鋭角であるから）。よって B はこのあと左上へ進み、その経路の傾き（gradient）の大きさは

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1+2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

である。ここで β は経路が x 軸の負の向きとなす鋭角である。B の最下点は $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$ から出発する。y 軸に達するには x が $2r\cos\alpha$ だけ減少しなければならず、その間に y は $2r\cos\alpha\tan\beta$ だけ増加する。よって B は y 軸と点 $(0, Y)$ で交わり、

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

となる。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

衝突後、B は一定の速さで直線運動をし、$(0, Y)$ を通り単位方向ベクトル $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$ をもつ直線 ℓ に沿って進む。C は何かが当たるまで $(0, h)$ に静止している。B が C に衝突するのは、$(0, h)$ から B の経路までの距離が $2r$ を下回るときであり、かつそのときに限る。

$(0, h)$ から ℓ への垂直距離（perpendicular distance）は、$(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$ の $\mathbf{d}$ に垂直な成分の大きさである。ℓ の単位法線ベクトル（unit normal）の 1 つは $(\sin\beta, \cos\beta)$ なので、この距離は

$$\big|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)\big| = |h - Y|\cos\beta,$$

となる。β は鋭角なので $\cos\beta > 0$ であることを用いた。$h > Y + 2r\sec\beta$ ならば $h - Y > 2r\sec\beta > 0$ であり、距離は $(h - Y)\cos\beta > 2r$ となる。直線全体のうち最も近い点だけでなく、B の経路上のすべての点が C の最下点から少なくともこの距離だけ離れている。よって B が C から $2r$ 以内に近づくことはなく、B は C に衝突しない。

（ほかに邪魔をするものはない。A は速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$ で $y < 0$ の領域へ動き去り、B からも C からも遠ざかる。）

> **考えてみよう** 小問 (iv) では $Y < 2r\sec\beta$ を証明することが求められている。これを 1 つの三角関数の事実に帰着できるだろうか。

できる。両辺に $\cos\beta > 0$ を掛ければ、左辺は加法定理（compound-angle formula）の形になる。

小問 (iv)

$2r$ で割り、$\cos\beta > 0$ を掛けると、不等式 $Y < 2r\sec\beta$ は

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{すなわち} \qquad \sin(\alpha+\beta) < 1.$$

と同値である。もちろん $\sin(\alpha+\beta) \le 1$ であり、等号は $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ のときに限り成り立つ（$0 < \alpha+\beta < \pi$ であるから）。それは $\tan\beta = \cot\alpha$、すなわち

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

（$\cos\alpha \neq 0$ で割った）を意味するが、これは不可能である。よって $\sin(\alpha+\beta) < 1$ であり、したがって $Y < 2r\sec\beta$ である。

これを用いて。いま

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

であるから、すべての鋭角 α にわたる $\sec\beta$ の上界、すなわち $\tan\beta$ の上界が必要である。分母と分子を $\cos^2\alpha$ で割り、$t = \tan\alpha > 0$ とおくと、

$$\tan\beta = \frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha + 2\tan^2\alpha} = \frac{2t}{1+3t^2} \le \frac{2t}{2\sqrt{3}\,t} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

となる。ここで相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）$1+3t^2 \ge 2\sqrt{3}\,t$ を用いた（等号は $t = 1/\sqrt{3}$、すなわち $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき）。よって $0 < \beta \le \frac{\pi}{6}$ であり、$\sec\beta \le \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ を得る。したがって、すべての鋭角 α に対して

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta \le \frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

が成り立つ。$h > \dfrac{8r}{\sqrt{3}}$ ならば $h > Y + 2r\sec\beta$ であり、小問 (iii) より、α の値にかかわらず B は C に衝突しない。

検算

- 運動量：A の速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ と小問 (i) の B の速度を加えると $(-u, 0)$ になる。質量が等しいので、こうなるべきである。
- $\alpha = 0$（正面衝突）のとき、公式から B の速度は $(-\frac{1}{3}u, 0)$、A の速度は $(-\frac{2}{3}u, 0)$ となる。これは質量が等しく $e = \frac{1}{3}$ の場合のおなじみの 1 次元の答えである。
- $\alpha = \frac{\pi}{6}$ とすると $\tan\beta = 1/\sqrt{3}$ なので $\beta = \frac{\pi}{6}$、$\alpha+\beta = \frac{\pi}{3}$ であり、$Y = 2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}) = 2r$ となる。これは $2r\sec\beta = 4r/\sqrt{3} \approx 2.31r$ より十分小さい。このとき $Y + 2r\sec\beta \approx 4.31r$ であり、$8r/\sqrt{3} \approx 4.62r$ を下回る。

- 20,000 個のランダムな α の値についてコンピュータで確認した。B の直線経路を少しずつ進めると上記の交点 Y が得られること、$h = Y + 2r\sec\beta$ のわずかに上では B は C に当たらず、わずかに下では当たること、そして $\sec\beta$ の最大値が $1.1547\ldots = 2/\sqrt{3}$ であることである。

よくある間違い

- 中心線に沿った成分ではなく、x 成分に反発の法則を適用してしまう。なめらかな球どうしの撃力は中心線に沿って働き、ここでは中心線は x 軸と角 α をなしている。
- 衝突の瞬間の中心線を x 軸方向や y 軸方向にとってしまう。接触点は、球どうしの距離が $2r$ であることによって定まる。
- 小問 (iii) で、C の最下点が経路全体からではなく、1 点 $(0, Y)$ から $2r$ 以内にあるかどうかを調べてしまう。

STEP のその先へ

速度を、選んだ単位ベクトルに沿った成分とそれに垂直な成分とに分解することは、正規直交基底（orthonormal basis）への射影（projection）にほかならない。これは大学 1 年の線形代数（linear algebra）と力学（mechanics）を貫く考え方である。なめらかな球の斜め衝突（oblique collision）は散乱（scattering）の最初のモデルであり、物理学者は気体や粒子の衝突を研究するのにこれを用いる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このベクトルによる方法で 2 次元の衝突を扱っている。

解答例

STEP III 2024、第 10 問

力学 ・ 転倒と滑り

STEP III 2024、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

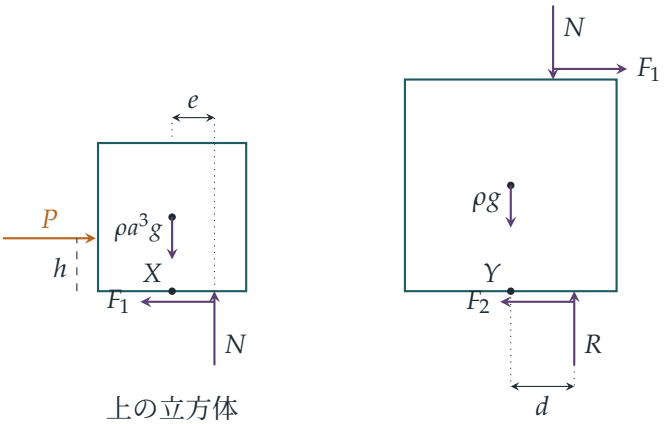
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの小問も、平衡（equilibrium）が破れる四つの仕方の比較である。すなわち、上の立方体が滑る、下の立方体が滑る、上の立方体が転倒する、二つの立方体が一緒に転倒する、の四つである。それぞれは P のある臨界値で起こり、P を 0 から増やしていくと、臨界値が最も小さいものが最初に起こる。適切な点のまわりの力のモーメント（moments）、すなわち系全体については Y、上の立方体だけについては X のまわりのモーメントを考えれば、小問 (i) の垂直抗力（normal reaction）の作用位置はほとんど手間をかけずに求まる。そして転倒（toppling）は、これらの垂直抗力の作用点が、それが働く面の端に達したときに始まる。

解答

立方体を剛体（rigid body）としてモデル化する。下の立方体の質量は ρ、上の立方体の質量は ρa^3 である。P は水平右向きに、下の立方体の上面から高さ h、すなわち地面から高さ $1+h$ の位置に働くものとする。P は水平なので、任意の点のまわりのそのモーメントは高さだけで決まり、面上のどこに働くかにはよらない。



ここで N と F_1 は二つの立方体の間の垂直抗力と摩擦力（friction）であり（ニュートン（Newton）の第三法則により、それぞれの立方体に図示してある）、X から距離 e の位置に働く。R と F_2 は地面からの垂直抗力と摩擦力であり、Y から距離 d の位置に働く。

小問 (i)

系全体。外力は P、二つの重力、R および F_2 だけである。力の成分に分けて、

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

Y のまわりのモーメントを考える。二つの重力はどちらも Y を通る鉛直線に沿って働き（それぞれの重心（centre of mass）は Y の真上にある）、F_2 は Y を通る地面に沿って働くので、これらはいずれもモーメントをもたない。残るのは高さ $1 + h$ に働く P と、距離 d に働く R であり、これらがつり合う：

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

ただし d は Y から P の向きに測る。これが求める結果である。

上の立方体のみ。力の成分に分けると $F_1 = P$、$N = \rho a^3 g$ を得る。X のまわりのモーメントを考えると、重力と F_1 はモーメントをもたないので $Ne = Ph$ となり、

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

ここでも e は X から P の向きに測る。

小問 (ii)

何も動いていない間、摩擦力は立方体の間で $F_1 = P$、地面で $F_2 = P$ である。ある接触面で必要な摩擦力が、垂直抗力の μ 倍を超えるとそこで滑り（slipping）が起こる

ので、

$$\text{上の立方体が下の立方体の上で滑る条件：} P > \mu\rho a^3 g,$$
$$\text{下の立方体が地面の上で滑る条件：} P > \mu(1+a^3)\rho g.$$

$a^3 < 1 + a^3$ なので、前者のしきい値は常に真に小さい。P を 0 から増やしていくと（転倒が先に起こらなければ）、地面の摩擦力がまだ限界に十分余裕のあるうちに、上の立方体が先に限界に達して滑り始める。上の立方体が滑っている間、それが下の立方体に及ぼす摩擦力は $\mu\rho a^3 g$ であり、地面が供給できる $\mu(1+a^3)\rho g$ よりなお小さいので、下の立方体は動かない。したがって、平衡は下の立方体の滑りではなく、上の立方体の滑りによって破れる。

小問 (iii)

平らな面の上にある物体は、その物体に働く垂直抗力の作用点が面の端に達したとき、まさに転倒しようとしている。上の立方体の底面の半幅は $\frac{1}{2}a$、下の立方体の底面の半幅は $\frac{1}{2}$ である。そこで、すべての力を ρg を単位として測ると、P の四つの臨界値は

$$P_{\text{滑り}} = \mu a^3 \text{（上の立方体が下の立方体の上で）}, \quad P_{\text{地面}} = \mu(1+a^3),$$
$$P_{\text{上}} = \frac{a^4}{2h} \left(e = \tfrac{1}{2}a \text{ より}\right), \quad P_{\text{両方}} = \frac{1+a^3}{2(1+h)} \left(d = \tfrac{1}{2} \text{ より}\right).$$

下の立方体が転倒すれば上の立方体もそれに伴って倒れる。$d = \frac{1}{2}$ が二つの立方体の同時転倒を意味するのはこのためである。

ここで $a = 1$ とおくと、$P_{\text{滑り}} = \mu$、$P_{\text{上}} = \frac{1}{2h}$、$P_{\text{両方}} = \frac{1}{1+h}$ である。小問 (ii) により $P_{\text{地面}}$ は無視してよい。

考えてみよう 上の立方体が単独で転倒する可能性を気にする必要はあるだろうか？

その必要はないが、確かめておかなければならない。$h < a = 1$ より $2h < 1 + h$ なので、

$$P_{\text{上}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{両方}}.$$

上の立方体が単独で転倒するより前に、二つの立方体が一緒に転倒する。したがって、競合するのは $P_{\text{滑り}} = \mu$ と $P_{\text{両方}} = 1/(1+h)$ だけである：

- $\mu(1+h) < 1$ ならば $\mu < \frac{1}{1+h}$ であり、滑りのしきい値に先に達するので、上の立方体が下の立方体の上で滑る。
- $\mu(1+h) > 1$ ならば $\frac{1}{1+h} < \mu$ であり、転倒のしきい値に先に達するので、二つの立方体が一緒に転倒する。

小問 (iv)

滑りが起こらないならば、競合するのは $P_{\text{上}}$ と $P_{\text{両方}}$ である。上の立方体が先に転倒するのは、ちょうど

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

のときである。ここで両辺に正の量 $2h(1+h)$ を掛けた。これはまさに与えられた条件であり、この条件のもとで平衡は上の立方体の転倒によって破れる。

小問 (v)

$a = \frac{1}{2}$ のとき、次の三つが必要である。

- (iv) の条件：$h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$、すなわち $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$ なので $h > \frac{1}{17}$。
- 設定から $h < a = \frac{1}{2}$ が必要である。
- 転倒より前に滑りが起こらないこと：$P_{\text{上}} < P_{\text{滑り}}$、すなわち $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$、つまり $\mu > \dfrac{1}{4h}$。（(ii) により、地面での滑りが最初に起こることはない。）さらに $\mu < 1$ も必要なので、$h > \frac{1}{4}$ でなければならない。

そこで $h = \frac{2}{5}$ を選ぶ。これは $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$ と $h > \frac{1}{17}$ を満たす。このとき $\frac{5}{8} < \mu < 1$ が必要であり、$\mu = \frac{3}{4}$ とする。すると臨界値（ρg 単位）は

$$P_{\text{上}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{滑り}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{両方}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{地面}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

最小は $P_{\text{上}}$ なので、P を増やしていくと、何かが滑るより前に上の立方体が転倒する。すなわち (iv) の状況は実際に起こりうる。

検算

- $P \to 0$ のとき、d と e はともに 0 に近づく。押す力がなければ、それぞれの垂直抗力は重心の真下に働くはずであり、そのとおりになっている。
- 下の立方体だけについてモーメントを考えると（その重力、距離 d に働く R と F_2、および X から距離 e に逆向きに働く N と F_1）、$Rd = Ne + F_1 \cdot 1$ を得る。これは $P(1+h) = Ph + P$ である。よって (i) の二つの答えは整合している。
- $a = \frac{1}{2}$、$h = \frac{2}{5}$、$\mu = \frac{3}{4}$ について上の四つのしきい値は厳密に計算した。また (ii)–(iv) の比較は、a、h、μ を無作為に多数選んでコンピュータで確認した。

よくある間違い

- (iii) で、滑りと二つの立方体の同時転倒だけを比較し、上の立方体が先に転倒しえないことを示さない。
- 上の立方体について地面上の点のまわりのモーメントを考えてしまい、接触面の摩擦力 F_1 が式に入り込む。X のまわりのモーメントならこれを避けられる。
- 系全体のモーメントの式で、地面からの P の高さとして $1+h$ ではなく h を用いる。

STEP のその先へ

ここでの破壊の仕方はそれぞれ力に関する不等式であり、平衡はそれらがすべて同時に成り立つ限り保たれる。最初に破れるのはしきい値が最も小さいものである。線形な制約の集まりのうちの一つが「効いている（binding）」制約になるというこの考え方は、工学において石積みや積み重ねた構造物に用いられる極限解析（limit analysis）の核心であり、より広くは線形計画法（linear programming）の核心でもある。摩擦、トルク、剛体の静力学を丁寧に扱ったものとしては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2024、第 11 問

確率・統計 ・ 二項分布の期待値

STEP III 2024、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

(i) の恒等式（identity）は、和の下半分にある各項 $r\binom{2n}{r}$ を上半分の項と対応させるものである。この対称性こそが X に必要なものである。表と裏の多い方の枚数は、表の枚数か裏の枚数のどちらかであり、表と裏の役割を入れ替えると、期待値（expectation）は和の上半分へと折り返される。その後、(iii) は比（ratio）を調べる問題であり、(iv) は一行で済む。

解答

小問 (i)

$1 \le r \le 2n$ のとき、r と $r!$ を約分すると

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)!\,(2n-r)!}.$$

一方、$2n-(2n+1-r) = r-1$ であるから

$$(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \frac{(2n+1-r)\,(2n)!}{(2n+1-r)!\,(r-1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,(r-1)!},$$

となる。ここでも分子の因数を階乗と約分した。（$2n+1-r$ が 1 から $2n$ の間にあり、両方の階乗が意味をもつためには $1 \le r \le 2n$ が必要である。）二つの式は一致するので、恒等式が成り立つ。

和については、$r = 0$ の項は 0 である。残りを $1 \le r \le n$ と $n+1 \le r \le 2n$ に分ける。下側のまとまりで $s = 2n+1-r$ とおく。r が 1 から n まで動くとき、s は $2n$ から

$n+1$ まで減少しながら動き、恒等式より

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n}{r} = \sum_{r=1}^{n} (2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}.$$

よって下側のまとまりは上側のまとまりに等しく、

$$\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r},$$

が示された。

小問 (ii)

表の枚数を H とすると、$H \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ であり、$\mathrm{P}(H=r) = \binom{2n}{r}/2^{2n}$ である。裏の枚数は $2n-H$ であるから、$X = \max(H, 2n-H)$ である。すなわち、$H \geq n+1$ のとき $X=H$、$H=n$ のとき $X=n$、$H \leq n-1$ のとき $X=2n-H$ である。したがって

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = \sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} + n\binom{2n}{n} + \sum_{r=0}^{n-1}(2n-r)\binom{2n}{r}.$$

最後の和で $s=2n-r$ とおくと、s は $2n$ から $n+1$ まで減少しながら動く。$\binom{2n}{r} = \binom{2n}{2n-r}$ であるから、この和は $\sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}$ となり、最初の和と同じになる。（これが表と裏の対称性である。裏が s 枚出る確率は、表が s 枚出る確率と等しい。）

> **考えてみよう** 範囲の半分しか動かない $\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r}$ をどのように計算すればよいか。

ここで (i) が役に立つ。全範囲にわたる和は問題文で与えられており、n の代わりに $2n$ とすると $\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1}$ である。よって (i) より

$$2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1} = n\,2^{2n}.$$

したがって

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = n\,2^{2n} + n\binom{2n}{n}, \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right),$$

が示された。

小問 (iii)

$a_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$ とおくと、これは正である。このとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{n!\,n!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

となる。ここで $2n+2 = 2(n+1)$ を用いた。この比は 1 より小さく、$a_n > 0$ であるから、すべての $n \geq 1$ に対して $a_{n+1} < a_n$ である。よってこの数列は狭義単調減少（strictly decreasing）である。

小問 (iv)

受け取る賞金はちょうど (ii) の X であり、支払う額は £n であるから、支払った 1 ポンドあたりの賞金の期待値は

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 + a_n.$$

(iii) より、a_n は n が最小のときに最大となるので、$n = 1$ を選ぶべきである。このとき支払った 1 ポンドあたり $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ポンドが戻ってくるので、1 ポンドあたりの利益の期待値は 50 ペンスである。（「賞金」が利益を意味するとしても $\mathrm{E}(X)/n - 1 = a_n$ であり、結論は同じである。）

検算

- $n = 1$（2 回投げる）のとき、HH または TT なら $X = 2$、HT または TH なら $X = 1$ であるから、$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$ である。公式からは $1\cdot(1+\frac{2}{4}) = \frac{3}{2}$ が得られる。
- $n = 2$ のとき、公式は $2(1+\frac{6}{16}) = \frac{11}{4}$ を与えるので、1 ポンドあたりの戻りは $\frac{11}{8} = 1.375 < 1.5$ である。$n = 3$ のときは $\frac{21}{16} = 1.3125$ であり、(iii) の予想どおり減少し続けている。
- $\mathrm{E}(X)$ の公式は、$n \leq 5$ について、2^{2n} 通りすべての投げ方の列をコンピュータで調べることにより確認した。

よくある間違い

- $H = n$ の項を二重に数えたり、まったく数えなかったりすること。この項は分割のどちら側にも属さず、$n\binom{2n}{n}$ をちょうど一度だけ寄与する。
- (iv) で、支払った 1 ポンドあたりの $\mathrm{E}(X)$ ではなく、限りなく大きくなる $\mathrm{E}(X)$ そのものを最大化しようとすること。

STEP のその先へ

超過分 $\mathrm{E}(X) - n = na_n$ は、単純ランダムウォーク（simple random walk）の出発点からの距離の期待値の半分である。スターリングの公式（Stirling's formula）により $a_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$ であるから、この超過分は $\sqrt{n/\pi}$ のように増大する。すなわち、表と裏の典型的な偏りは投げる回数の平方根のように大きくなる。一方、1 ポンドあたりの超過分 a_n は 0 に収束（converge）する。これは大数の法則（law of large numbers）の表れである。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）では、ランダムウォークとこれらの極限が扱われている。

解答例

STEP III 2024、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 2024、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

単位正方形の中から一様に（uniformly）選んだ点について、$\mathrm{P}(R \le r)$ は、原点を中心とする半径 r の円の内側にある正方形の部分の面積にほかならない。$r > 1$ となると円は正方形の 2 辺からはみ出し、正方形の中に残る領域は、2 つの直角三角形（right-angled triangle）と 1 つの扇形（sector）にきれいに分かれる。期待値（expectation）を求めるには、微分して確率密度関数（density）を得てから $rf(r)$ を積分すればよい。部分積分（integration by parts）によって扱いにくい $\cos^{-1}$ の項が消え、双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）で計算が完了する。

解答

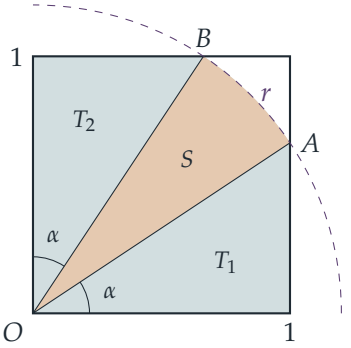
小問 (i)

確率は面積に等しいので、$\mathrm{P}(R \le r)$ は、正方形の点のうち O からの距離が r 以下であるものの集合の面積である。

$0 \le r \le 1$ のとき、四分円 $x, y \ge 0, x^2 + y^2 \le r^2$ は完全に正方形の内側にあるから、

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

$1 \le r \le \sqrt{2}$ のとき、円 $x^2 + y^2 = r^2$ は辺 $x = 1$ と $A = \left(1, \sqrt{r^2 - 1}\right)$ で、辺 $y = 1$ と $B = \left(\sqrt{r^2 - 1}, 1\right)$ で交わる。$0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$ であるから、どちらの点も正方形の上にある。OA が x 軸となす角を α とすると $\cos\alpha = 1/r$、すなわち $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$ である。直線 $y = x$ に関する対称性から、OB も y 軸と同じ角 α をなす。



正方形のうち円の内側にある部分は、次のものからなる。

- 頂点 $O, (1,0), A$ をもつ三角形 T_1：$(1,0)$ で直角をなし、直角をはさむ 2 辺の長さは 1 と $\sqrt{r^2-1}$ であるから、面積は $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$ である。
- 頂点 $O, (0,1), B$ をもつ三角形 T_2：T_1 の鏡像であり、面積はやはり $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$ である。
- OA と OB の間にある半径 r の扇形 S：中心角は $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ であるから、面積は $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$ である。

これらを足し合わせると、

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

となり、求める結果が得られる。（$r=1$ ではどちらの式も $\frac{1}{4}\pi$ を与え、$r=\sqrt{2}$ では $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$ となって、あるべき値になっている。）

小問 (ii)

$F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$ とおき、確率密度関数を $f=F'$ とする。$0<r<1$ では $f(r)=\frac{1}{2}\pi r$ である。$1<r<\sqrt{2}$ では

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

が必要になる。ここで $r>0$ に対して $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$ を用いた。すると、積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

2 つの $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ の項が打ち消し合っており、これはよい兆候である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) &= \int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r - 2\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6} - 2I = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - 2I,\end{aligned}$$

ただし $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$ である。

考えてみよう I の中にある逆余弦（inverse cosine）をどうやって取り除けばよいか。

$\cos^{-1}(r^{-1})$ を微分し（その導関数が代数的であることは上で確かめた）、r^2 を積分する形で部分積分を行う。

$$\begin{aligned}I &= \left[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

ここで $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ と $\cos^{-1}1 = 0$ を用いた。（被積分関数は $r=1$ で非有界であるが、そこでは $1/\sqrt{2(r-1)}$ のようにふるまうので、積分は収束する。）したがって

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

となり、これが求める結果である。

小問 (iii)

$\sqrt{r^2-1}$ があることから $r = \cosh t$ とおくことが思いつく。このとき $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$、また（$t \geq 0$ であるから）$\sqrt{r^2-1} = \sinh t$ である。積分区間の端は $t=0$ と $t=T$ になる。ここで $\cosh T = \sqrt{2}$ であるから $\sinh T = 1$ であり、

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\bigl(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\bigr) = \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr).$$

すると

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\right]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}.\end{aligned}$$

これに $\frac{2}{3}$ を掛けて、

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Bigl(\sqrt{2} + \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr),$$

となり、求める結果が得られる。

検算

- F は $r = 1$ で連続であり（どちらの式も $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ を与える）、最も遠い角である $r = \sqrt{2}$ で 1 に達する。
- 確率密度関数 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$ は $r = \sqrt{2}$ で 0 になっており、そうでなければならない。それほど遠くにあるのは角のただ 1 点だけだからである。
- 数値的には $\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$ であり、$\frac{1}{2}$ と $\sqrt{2}$ の間という妥当な値である。4×10^5 個のランダムな点によるコンピュータ・シミュレーションでは平均距離は約 0.766 となり、その経験分布関数（empirical distribution function）は、いくつかの r の値において F と 0.002 以内で一致した。

よくある間違い

- 扇形の中心角を $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ではなく $\frac{\pi}{2} - \alpha$ としてしまう。2 辺の**それぞれ**で三角形が切り取られていることに注意。
- $\cos^{-1}(r^{-1})$ の導関数の符号を間違える。（$\cos^{-1}$ と r^{-1} から来る）2 つの負号は打ち消し合うので、導関数は正である。

STEP のその先へ

これは幾何確率（geometric probability）の入門である。ここで求めたのは、単位正方形の角から、その内部のランダムな点までの平均距離であった。これと対になる問題、すなわち単位正方形内の **2 つの**ランダムな点の間の平均距離にも、$\ln(1+\sqrt{2})$ を含む、似ているがより複雑な閉じた式がある。これは重積分（double integral）と変数変換（change of variables）の古典的な演習問題である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、幾何によって定まる分布や、分布関数（distribution function）から期待値を計算する方法が扱われている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2024 年解答例. 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.