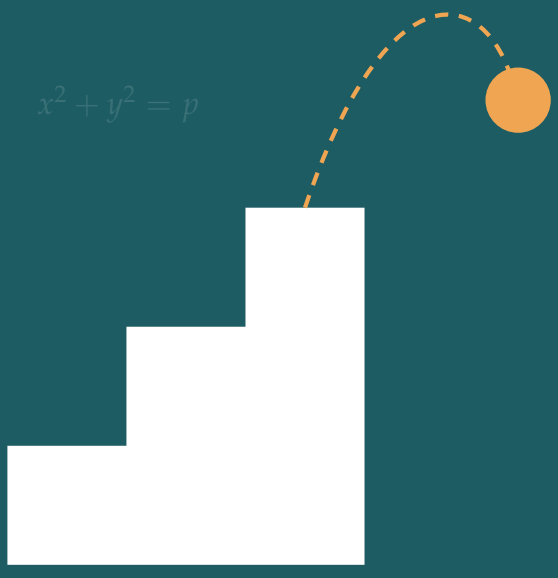
STEP 対策 · 大学の数学

# Beyond STEP

## STEP II と III

2023 年解答例



KEITH McNULTY

# Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP II と III

2023 年解答例

Keith McNulty

**Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問**

**2023 年解答例**

2023 年の STEP 問題（STEP II と III）の全 24 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

# 目次

## STEP II


Q1 置換積分 純粋数学 . . . 3
Q2 三角関数による置換 純粋数学 . . . 7
Q3 多項式と導関数 純粋数学 . . . 12
Q4 多項式からの根号の消去 純粋数学 . . . 16
Q5 漸化式と収束 純粋数学 . . . 20
Q6 フィボナッチ数の行列恒等式 純粋数学 . . . 24
Q7 2つの平方数の和 純粋数学 . . . 28
Q8 空間ベクトル 純粋数学 . . . 33
Q9 坂の上の連結質点 力学 . . . 38
Q10 放物運動の包絡線 力学 . . . 42
Q11 混合分布 確率・統計 . . . 47
Q12 最大値の分布 確率・統計 . . . 51


## STEP III


Q1 2次曲線の接線 純粋数学 . . . 55
Q2 極方程式で表された曲線の面積 純粋数学 . . . 59
Q3 3次方程式の複素数解 純粋数学 . . . 63
Q4 チェビシェフ多項式の係数 純粋数学 . . . 68
Q5 整数論 純粋数学 . . . 72
Q6 双曲線関数と単調性 純粋数学 . . . 77
Q7 積分の不等式 純粋数学 . . . 82
Q8 区分的な微分方程式 純粋数学 . . . 86
Q9 糸でつながれた2粒子の運動 力学 . . . 91
Q10 梁のつり合い 力学 . . . 95

Q11 条件付き期待値 確率・統計 . . . . . 99
Q12 組合せ論的確率 確率・統計 . . . . . 103

解答例

# STEP II 2023、第 1 問

純粋数学 ・ 置換積分

**STEP II 2023、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

置換（substitution）$x = 1/t$ は $\frac{1}{2}$ と 2 を入れ替えるので、区間 $[\frac{1}{2}, 2]$ をそれ自身の上に（向きを逆にして）写す。したがって、この区間上の積分は、同じ区間上の**見かけの異なる**積分に書き換えることができる。区間は**同じ**である。新しい被積分関数（integrand）がそのまま簡単に積分できることもあれば、もとの被積分関数と対になるものになっていて、両者を足し合わせる（あるいは比較する）ことで答えが得られることもある。

## 解答

### 小問 (i)

$x = 1/t$ とおくと、$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ である。$a > 0$ であるから、$[a, b]$ に属するすべての $x$ は正であり、対応する $t$ も正である。このとき

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

となる。ここで $t > 0$ であるから $\sqrt{t^2} = t$ を用いた。積分範囲の端 $x = a$ と $x = b$ はそれぞれ $t = a^{-1}$ と $t = b^{-1}$ になる。よって

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

となり、示すべき式が得られた。

### 小問 (ii)

**(a)** $a = \frac{1}{2}$、$b = 2$ とすると、新しい積分範囲の端は 2 と $\frac{1}{2}$ になる。上端と下端を入れ替えることで負号が消える：

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

新しい被積分関数は $1+t^2$ のべきの導関数（の定数倍）である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$ であるから、

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

**(b)** 被積分関数は偶関数（even function）であるから、$[-2,2]$ 上の積分は $[0,2]$ 上の積分の 2 倍である。これを $[0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},2]$ と分ける。後半の部分は (a) で求めたものである。

> **考えてみよう** 小問 (i) には $a > 0$ が必要である。0 から始まる部分はどう扱えばよいだろうか？

小問 (i) が適用できる $0 < a < \frac{1}{2}$ に対して $[a, \frac{1}{2}]$ 上で計算し、そのあとで $a \to 0^+$ とする。$b = \frac{1}{2}$ として小問 (i) を用いると

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

$a \to 0^+$ のとき $a^{-2} \to \infty$ となり、最後の項は 0 に収束する。左辺は $[0,\frac{1}{2}]$ 上の積分に収束する。被積分関数がそこで連続だからである。したがってこの部分も $\frac{1}{\sqrt{5}}$ であり、

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

### 小問 (iii)

**(a)** $J = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ とおき、再び $x = 1/t$ と置換する。今度は $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$ であるから、

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

となり、積分変数（ダミー変数、dummy variable）$t$ を $x$ と書き直せば、これが最初の等式である。この 2 番目の積分を $K$ とおくと、$J = K$ である。2 つの被積分関数を足し合わせると

$$J + K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、$J = K$ であるから $J = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ が得られ、一連の等式が完成する。

よって

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan \tfrac{1}{2}).$$

これは次の 2 通りのどちらの方法でも整理できる。$\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ であること（直角をはさむ 2 辺が 1 と 2 の直角三角形における余角（complementary angles））から、$J = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2}$ となる。あるいは、tan の減法定理（subtraction formula）により $\tan(\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}) = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$ であり、この差は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので、

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

**(b)** 求める積分を $L$ とおく。難しい原始関数（antiderivative）を探しにかかる前に、もう一度 $x = 1/t$ を試してみる。被積分関数は

$$\frac{1 - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}},$$

となる。ここでも $t > 0$ を用いた。$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ を掛け、積分範囲が 2 から $\frac{1}{2}$ までであることに注意すると、

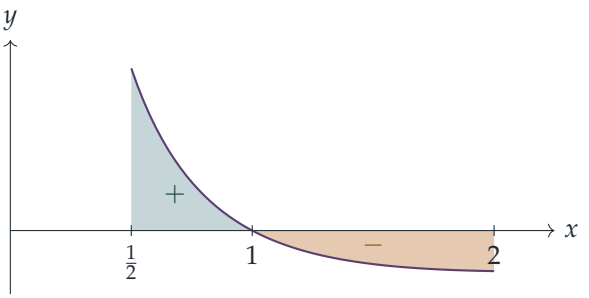
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

**考えてみよう** 置換によって $L$ が $-L$ になってしまった。これは矛盾だろうか？

そうではない。これは値を教えてくれているだけである。$L = -L$ から $2L = 0$ が得られるので、

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

図もこれと合っている。$[\frac{1}{2}, 1]$ 上の正の面積は $[1, 2]$ 上の負の面積とちょうど打ち消し合う。$x \mapsto 1/x$ はこの 2 つの部分を入れ替え、上の計算により、一方の面積を他方の面積の符号を変えたものに移すからである。



## 検算

- $(1+x^2)^{-3/2}$ の原始関数の 1 つは $x(1+x^2)^{-1/2}$ である（微分して確かめよ）。これを用いると (ii)(a) は $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$、(ii)(b) は $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$ となり、上の答えと一致する。
- (iii)(a) では、$\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$ と $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$ が一致する。一連の等式に現れる 3 つの積分を数値積分（numerical quadrature）しても同じ値が得られる。
- (iii)(b) では、被積分関数は $x < 1$ で正、$x > 1$ で負であるから、答えが 0 になるのはもっともである。数値積分でも丸め誤差の範囲で 0 が得られる。

## よくある間違い

- $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ の負号を落とすこと。あるいは、その負号が積分範囲の上端と下端を入れ替えることで打ち消されるのを忘れること。
- (ii)(b) で $a = 0$ として小問 (i) を適用すること。これには $t = 1/0$ という端が必要になってしまう。極限（limit）を用いるか、単に原始関数を用いればよい。
- $t > 0$ が必要であることに触れずに $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$ と書くこと。

## STEP のその先へ

写像 $x \mapsto 1/x$ は区間 $[\frac{1}{2}, 2]$ の対称性（symmetry）であり、積分の対称性を利用するのは繰り返し現れる技法である。たとえば $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$ を $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ によって求める場合がそうである。小問 (ii)(b) は広義積分（improper integral）への最初の入り口である。置換によって有限の端点が無限大に送られ、慎重に極限をとる必要があった。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は積分の極限を厳密に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）には STEP 形式の積分の演習問題がさらに収められている。

解答例

# STEP II 2023、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数による置換

> **STEP II 2023、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

各右辺は、見慣れた倍角の公式（multiple-angle formula）が姿を変えたものである。$t = \tan\alpha$ のとき $\frac{2t}{1-t^2}$ は $\tan 2\alpha$ であり、$\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ は $\tan 3\alpha$ である。また $t = \cos\alpha$ のとき $2t^2 - 1$ は $\cos 2\alpha$ である。置換（substitution）を行うと、連立した 3 つの方程式は 1 つの角についてのただ 1 つの三角方程式になる。これは解きやすく、しかも肝心なことに、解の個数を**数え**やすい。注意すべきなのは、この置換がすべての解をちょうど 1 回ずつ捉えていることを確かめる点だけである。

## 解答

### 小問 (i)

すべての実数は、$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内のちょうど 1 つの $\alpha$ に対する $\tan\alpha$ として表せる。したがって、$\alpha$ をこの区間にとって $x = \tan\alpha$ とおいても何も失わない。第 1 式が意味をもつには $x \neq \pm 1$ が必要であり、これは $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$ ということである。よって $2\alpha$ は $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍ではなく、2 倍角の公式（double-angle formula）が使える。

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

まったく同じ手順を $y = \tan 2\alpha$ に適用すると（$z$ が定義されているので $y \neq \pm 1$ である）$z = \tan 4\alpha$ が得られ、さらに $z$ に適用すると（$z \neq \pm 1$ である）$x = \tan 8\alpha$ が得られる。一方 $x = \tan\alpha$ でもあるから、

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。2 つの角の正接（tangent）が等しいのは、それらの差が $\pi$ の整数倍であるときに限る。よって、ある整数 $k$ に対して $8\alpha = \alpha + k\pi$、すなわち

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

である。条件 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ は $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$ を意味するので、$k = -3, -2, \ldots, 3$ である。

逆に、これら 7 つの値はいずれも本当に解を与える。$2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ と $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$ は決して $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍にならない（そうなるには $4k$ または $8k$ が 7 と奇数の積に等しくなければならず、したがって $7 \mid k$ となって $k = 0$ に限られるが、そのときの値は 0 であって奇数倍ではない）。よって $x, y, z$ のいずれも $\pm 1$ に等しくなく、分母はどれも零にならず、上の推論の連鎖は逆にたどることができる。異なる $k$ は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内の異なる $\alpha$ を与え、したがって異なる $x$ を与える。ゆえに解はちょうど 7 個である。

求められた形で答えるには、$\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$ を用いて、$2\alpha$ と $4\alpha$ から $\pi$ の整数倍を引き、$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入れればよい。たとえば $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$、$\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$ である。$t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$ と書くと、解 $(x, y, z)$ は次のとおりである。

| $k$ | $(x, y, z)$ |
|---|---|
| 0 | $(0, 0, 0)$ |
| 1 | $(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$ |
| 2 | $(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$ |
| 3 | $(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$ |

| $k$ | $(x, y, z)$ |
|---|---|
| $-1$ | $(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$ |
| $-2$ | $(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$ |
| $-3$ | $(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$ |

$(0, 0, 0)$ を除くと、解は $(t_1, t_2, t_{-3})$ の巡回的な並べ替えと $(t_{-1}, t_{-2}, t_3)$ の巡回的な並べ替えとして現れていることに注意しよう。連立方程式は $x \to y \to z \to x$ という入れ替えで変わらないので、これは当然である。

### 小問 (ii)

まず 3 倍角の公式（triple-angle formula）を導く。$t = \tan\alpha$ とすると、

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

前と同様に、$-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ として $x = \tan\alpha$ とおく。方程式が意味をもつには $1 - 3x^2$、$1 - 3y^2$、$1 - 3z^2$ が零でないことが必要であり、そのもとでこの公式から順に $y = \tan 3\alpha$、$z = \tan 9\alpha$、$x = \tan 27\alpha$ が得られる。よって $\tan\alpha = \tan 27\alpha$ であり、$26\alpha = k\pi$、すなわち

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

となる。これで $\alpha$ の候補は 25 個あり、それらはすべて異なる $x$ の値を与える。

**考えてみよう** これら 25 個の候補の中に、分母を零にしてしまい、実際には解でないものがありうるだろうか？

ここが確認すべき点である。分母 $1-3\tan^2\beta$ は $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$ のとき零になり、また $\beta$ が $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍のときは正接そのものが定義されない。ここで現れる角は、$j=0,1,2$ に対する $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$ である。

- $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$ とすると $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$ となる。左辺は 3 の倍数であるが、右辺はそうではない（78 は 3 の倍数であり、13 はそうでないから）。よってありえない。
- $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$ とすると $3^j k = 13(2m+1)$ となるので、13 は $k$ を割り切り、$k=0$ に限られる。しかしそのとき左辺は 0 であり、これは 13 の奇数倍ではない。よってありえない。

したがって、すべての候補は本当に解であり、連立方程式はちょうど 25 個の実数解をもつ。（区間から除かれる値 $k=\pm 13$ は $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ に対応し、そこでは $\tan\alpha$ が存在しない。）

### 小問 (iii)(a)

今度は $|x| \le 1$ なので、ちょうど 1 つの $\alpha \in [0,\pi]$ を用いて $x = \cos\alpha$ と書ける。2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ から $y = \cos 2\alpha$ が得られ、続いて $z = \cos 4\alpha$、$x = \cos 8\alpha$ が得られる。これらは自動的に $|y| \le 1$ と $|z| \le 1$ を満たす。したがって、3 つとも $[-1,1]$ に属する解は、次を満たす $\alpha \in [0,\pi]$ とちょうど対応する。

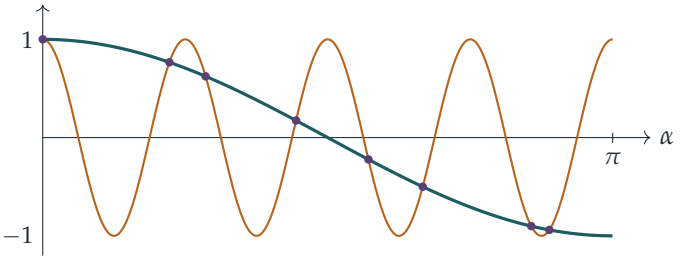
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

2 つの角の余弦が等しいのは、$2\pi$ の整数倍の差を除いて、両者が等しいか符号が逆であるときに限る。よって

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{または} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{または} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

$[0,\pi]$ において、第 1 の族からは $m=0,1,2,3$、すなわち $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ が得られ、第 2 の族からは $n=0,1,2,3,4$、すなわち $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$ が得られる。重なるのは $\alpha=0$ のみである（共通の値があるとすれば $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$、すなわち $9m = 7n$ が必要であり、$7 \mid m$ となる）。よって $\alpha$ の相異なる値は $4+5-1=8$ 個である。余弦は $[0,\pi]$ 上で単射（one-to-one）なので、これらは 8 個の相異なる $x$ の値を与え、それぞれが $y$ と $z$ を定める。したがって、$|x|, |y|, |z| \le 1$ を満たす解はちょうど 8 個である。

図は、$[0,\pi]$ 上で $\cos 8\alpha$（琥珀色）と $\cos\alpha$（青緑色）が交わる 8 つの点を示している。




**小問 (iii)(b)**

今度は制限を外す。$y$ と $z$ を消去しよう。$y = 2x^2 - 1$ は $x$ の 2 次式なので、$z = 2y^2 - 1$ は $x$ の 4 次多項式であり、そして $x = 2z^2 - 1$ は

$$x = 2\Big(2\big(2x^2 - 1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

となる。これは $x$ についての 8 次の多項式方程式である（右辺の最高次の項は $2 \cdot (2 \cdot 2^2)^2 x^8 = 128x^8$ であり、これを打ち消すものはない）。展開すると

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

となる。連立方程式の任意の解 $(x, y, z)$ について、$x$ はこの 8 次方程式の根であり、$x$ が $y$ と $z$ を定める。8 次の多項式は高々 8 個の実数根しかもたないが、(a) ですでに 8 個の相異なる実数根、すなわちそこで求めた 8 つの $\alpha$ の値に対する $\cos\alpha$ が得られている。よってこれらが根の**すべて**であり、連立方程式のどの解も (a) の 8 つのいずれかである。特に、どの解も $|x| \le 1$、$|y| \le 1$、$|z| \le 1$ を満たす。これが示すべきことであった。

? **考えてみよう** なぜ (b) では、(a) の 8 つの解だけでなく次数が必要なのだろうか？

(a) で求めたのは $[-1, 1]$ 内の解だけであり、それだけでは、たとえば $x = 5$ については何もわからない。それ以外の解を排除するのが次数による上限である。8 次方程式がもちうる根は 8 個までであり、(a) でそれを使い切っているのである。

## 検算

- (i) で $k = 1$ のとき：$\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$ であり、$\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2} \approx 1.2540 = \tan\frac{2\pi}{7}$ となる。さらに 2 ステップで 0.4816 に戻る。
- コンピュータで実数直線上を $f(f(f(x))) = x$ の根について探索したところ、$f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$ に対してはちょうど 7 個、$f(t) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ に対してはちょうど 25 個の根が見つかり、後者は $\tan\frac{k\pi}{26}$、$|k| \le 12$ と一致した。

- (iii) では、$x = 1$ から $y = z = 1$ が得られ、これは $\alpha = 0$ の解である。実際 $128 - 256 + 160 - 32 - 1 + 1 = 0$ である。$[-50, 50]$ でこの 8 次方程式の根を探索したところ、ちょうど 8 個見つかり、すべて $[-1, 1]$ 内にあった。

## よくある間違い

- (ii) で $k = \pm 13$ を許してしまう（あるいは $\alpha$ をまったく制限しない）ことで、解を 27 個としてしまう。$\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ はどの実数 $x$ にも対応しない。
- (iii)(a) で第 2 の族 $8\alpha = -\alpha + 2n\pi$ を忘れる、あるいは $\alpha = 0$ を 2 回数える。
- (i) で、角は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていなければならないのに、$\tan\frac{4\pi}{7}$ のような答えを変形しないまま残す。

## STEP のその先へ

$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ を満たす多項式 $T_n$ は**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）である。小問 (iii) は方程式 $T_8(x) = x$ であり、上の 8 次式は $T_8(x) - x$ にほかならない。$x \mapsto 2x^2 - 1$ のような写像を反復し、3 ステップ後に戻ってくる点を求めることは、力学系（dynamical systems）の理論の出発点である。この写像は $[-1, 1]$ 上で「カオス的」（chaotic）であり、角による置換によって単純な倍角写像 $\alpha \mapsto 2\alpha$ に変わる。同じ工夫により、(i) と (ii) の正接写像がなぜこれほど多くの周期点（periodic points）をもつのかも説明できる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

# STEP II 2023、第 3 問

純粋数学 ・ 多項式と導関数

**STEP II 2023、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

$q$ を微分すると、和の各項がちょうど一つずつずれ、最後の導関数は消える。したがって $q' = q - p$ である。この一つの関係式がすべてを動かしている。$q > 0$ の三通りの証明は、この関係式を三通りに読むものである。すなわち、停留点（stationary point）についての事実として、$\mathrm{e}^{-x}q(x)$ の導関数（積分因子（integrating factor））として、そして部分積分（integration by parts）を何度も繰り返して得られる積分表示として読むのである。

## 解答

以下を通して、$p(x) = ax^n + \ldots$（ただし $a \neq 0$）と書く。$k \geq 1$ に対して $p^{(k)}$ の次数は $n$ 未満である（または零である）。また $p^{(n+1)} \equiv 0$ である。

### 小問 (i)

**(a)** 奇数次の多項式は、実数直線の一方の端で $+\infty$ に、もう一方の端で $-\infty$ に発散する。多項式は連続であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により、どこかで値 0 をとる。しかしすべての $x$ に対して $p(x) > 0$ であるから、$p$ は実数解をもたない。よって $n$ は偶数でなければならない。

また $a > 0$ である。実際、$a < 0$ ならば $x \to \infty$ のとき $p(x) \to -\infty$ となり、$p > 0$ に矛盾する。$q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$ において、第 2 項以降の各項の次数は $n$ 未満であるから、$q$ もまた次数 $n$ で、最高次の係数（leading coefficient）は $a > 0$ である。したがって $x \to \infty$ のとき $q(x) \to +\infty$ である（さらに $n$ は偶数なので、$x \to -\infty$ のときも同様

である)。よって $q$ は確かに正の値をとる。($n=0$ のときは、$q=p$ は正の定数である。)

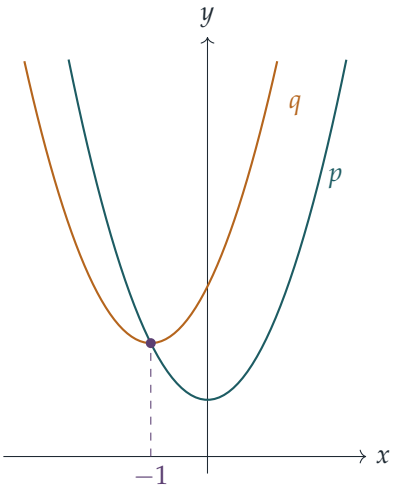
**(b)** 項別に微分すると、

$$q'(x)=\sum_{k=0}^{n}p^{(k+1)}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}p^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)-p(x)+p^{(n+1)}(x)=q(x)-p(x),$$

となる。ここで、次数 $n$ の多項式に対しては $p^{(n+1)}\equiv 0$ であることを用いた。

### 小問 (ii)

**(a)** $y=q(x)$ の停留点 $x_0$ においては $q'(x_0)=0$ であるから、(i)(b) により $q(x_0)=p(x_0)$ となる。すなわち、二つの曲線はそこで交わる。




(図は $p(x)=x^2+1$ の場合であり、このとき $q(x)=x^2+2x+3$ である。$q$ の最小値は $x=-1$ でとられ、そこはちょうど二つの曲線が交わる点である。)

次に $q>0$ を示す。$n=0$ ならば $q=p>0$ であるから、$n\geq 2$ と仮定する。(i)(a) により $x\to\pm\infty$ のとき $q(x)\to+\infty$ であるから、$|x|>R$ ならば常に $q(x)>q(0)$ となるような $R>0$ をとることができる。

**考えてみよう** そもそも $q$ に最も低い点があること、そしてそれが停留点であることは、どうしてわかるのだろうか？

閉区間 (closed interval) $[-R,R]$ 上で、連続 (continuous) 関数 $q$ はある点 $x_0$ で最小値をとり、$q(x_0)\leq q(0)$ である。この区間の外では $q$ は $q(0)$ より大きいから、$q(x_0)$ は実数全体における $q$ の最小値である。$x_0$ は $\mathbb{R}$ の内点であり、$q$ は微分可能 (differentiable) であるから、$q'(x_0)=0$ である。最初の結果により $q(x_0)=p(x_0)>0$ となる。よって

すべての $x$ に対して

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

**(b)** (i)(b) を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x}q(x)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(q'(x) - q(x)\right) = -\mathrm{e}^{-x}p(x) < 0$$

がすべての $x$ に対して成り立つ。これは $p > 0$ による。よって $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ は（狭義（strictly））単調減少である。

$q > 0$ について：$q$ は多項式であるから、$X \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-X}q(X) \to 0$ である（指数関数はべき関数に勝つ）。単調減少関数は $+\infty$ における極限より小さくなることはないから、すべての $X$ に対して $\mathrm{e}^{-X}q(X) \geq 0$ である。すると任意の $x$ に対して、狭義単調減少性から

$$\mathrm{e}^{-x}q(x) > \mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1) \geq 0,$$

が得られ、両辺に $\mathrm{e}^{x} > 0$ を掛けると $q(x) > 0$ を得る。

**(c)** ここに現れる積分はすべて収束（converge）する。$t$ の多項式と $\mathrm{e}^{-t}$ の積は $[0,\infty)$ 上で積分可能だからである。$x$ を定数とみなし、$u = p(x+t)$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ として部分積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= p(x) + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

となる。ここで、$t \to \infty$ のとき $p(x+t)\mathrm{e}^{-t} \to 0$ であることを用いた。これが一つ目の結果である。

この計算では、$p$ について多項式であること以外は何も用いていない。したがって、すべての導関数に対して同じことが成り立つ。すなわち、

$$I_k(x) = \int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{とおくと} \qquad I_k(x) = p^{(k)}(x) + I_{k+1}(x)$$

が $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して成り立つ。また $p^{(n+1)} \equiv 0$ であるから $I_{n+1}(x) = 0$ である。この関係を繰り返し用いると、

$$I_0(x) = p(x) + I_1(x) = p(x) + p^{(1)}(x) + I_2(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) + I_{n+1}(x) = q(x),$$

となり、これが二つ目の結果である。

**考えてみよう** なぜこの式によって $q(x) > 0$ が明らかになるのだろうか？

各 $x$ を固定すると、被積分関数（integrand）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ はすべての $t \geq 0$ に対して連続かつ正である。これは至るところで $p > 0$ だからである。正の長さをもつ区間上での、

連続かつ常に正の関数の積分は正である。よってすべての $x$ に対して $q(x) = I_0(x) > 0$ である。

## 検算

- $p(x) = x^2 + 1$ のとき $q(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ となる。実際 $q' = 2x + 2 = q - p$ であり、$q$ の最小値は $x = -1$ における 2 で、(ii)(a) が予言するとおり $p(-1) = 2$ である。
- 同じ $p$ について、$x = 0$ では $\int_0^\infty (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2! + 1 = 3 = q(0)$ である。
- コンピュータを用いて、次数 6 以下で至るところ正となるランダムな多項式 300 個について、$q' = q - p$ が厳密に成り立つこと、$[-20, 20]$ 上の格子点で $q > 0$ かつ $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ が減少すること、そして数値積分が $q(x)$ を有効数字約 10 桁で再現することを確認した。

## よくある間違い

- (ii)(a) で、理由を述べずに最小値の存在を仮定してしまう。最小値の存在には両端で $q \to +\infty$ となることが必要であり、それには (i)(a) で得た $n$ が偶数であることと $a > 0$ を用いる。
- (ii)(b) で、極限から $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$ だけを結論してしまう。これを $q(x) > 0$ に格上げするのは狭義単調減少性である。
- 境界項（boundary term）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ を捨てる前に、それが $t \to \infty$ のとき消えることを確かめるのを忘れる。

## STEP のその先へ

(ii)(b) の関数 $\mathrm{e}^{-x}$ は積分因子であり、(ii)(c) は $q' - q = -p$ を陽に解いている。式 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ はラプラス変換（Laplace transform）型の積分であり、$D$ を微分を表すものとしたときの恒等式 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$ は、線形微分方程式（linear differential equations）に対する作用素の方法（operator methods）への最初の入口である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は積分因子とラプラス変換を扱っている。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は、(ii)(a) の最大値・最小値の定理（extreme value theorem）による議論を厳密にしている。

解答例

# STEP II 2023、第 4 問

純粋数学 ・ 多項式からの根号の消去

**STEP II 2023、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.3 節「$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/field-extensions.html

## 鍵となる考え方

方程式から根号（surd）を消すには、根号を含むものをすべて一方の辺に、それ以外をもう一方の辺に集め、両辺を 2 乗（あるいは 3 乗）する。どの小問も同じ手順である。数を「扱いやすい部分と根号の和」の形に書き、その根号を一方の辺に孤立させ、根号が消えるまで累乗する。展開した後にも根号が残る場合は、その項を一方の辺に集めて同じことを繰り返す。

## 解答

### 小問 (i)

$(x-\sqrt{2})^2=3$ を展開すると $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$、すなわち

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

となる。これで根号が一方の辺に孤立したので、両辺を 2 乗する。

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

これが示すべき式である。（2 乗すると一方向の含意しか得られないが、ここではそれで十分である。最初の方程式を満たすすべての $x$ は、2 番目の方程式も満たす。）

後半の結論を導くため、$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく。すると $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$ であるから

$(x-\sqrt{2})^2=3$ となり、いま示したことから $\mathrm{f}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$ である。

**小問 (ii)**

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$、$y=x-\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく。小問 (i) より $y^4-10y^2+1=0$ である。これを $x$ で書き直す。まず

$$y^2=(x-\sqrt{5})^2=(x^2+5)-2\sqrt{5}\,x,$$

であり、したがって

$$\begin{aligned}y^4&=(x^2+5)^2-4\sqrt{5}\,x(x^2+5)+20x^2\\&=x^4+30x^2+25-4\sqrt{5}\,x^3-20\sqrt{5}\,x.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}0&=y^4-10y^2+1\\&=\left(x^4+30x^2+25-4\sqrt{5}\,x^3-20\sqrt{5}\,x\right)-10\left(x^2+5-2\sqrt{5}\,x\right)+1\\&=x^4+20x^2-24-4\sqrt{5}\,x^3.\end{aligned}$$

都合のよいことに、$\sqrt{5}\,x$ の項は打ち消し合う。根号を含む項は一つしか残らないので、それを孤立させて 2 乗する。

$$x^4+20x^2-24=4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4+20x^2-24)^2=80x^6.$$

左辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x^4+20x^2-24)^2&=x^8+40x^6+400x^4-48x^4-960x^2+576\\&=x^8+40x^6+352x^4-960x^2+576.\end{aligned}$$

$80x^6$ を引けば、

$$\mathrm{g}(x)=x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576,$$

ととることができる。これは次数（degree）8 で整数係数（integer coefficients）をもち、$\mathrm{g}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$ を満たす。

**考えてみよう** 一から始めるのではなく、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ について小問 (i) を利用し、$\sqrt{5}$ を最後に消去するのはなぜか？

小問 (i) ですでに三つの根号のうち二つが消えているので、残り一つを処理すればよい。根号を一つ 2 乗で消すと次数は 2 倍になり、4 から 8 になる。これはちょうど求められている次数である。一から始めると、三つの根号すべてを同時に扱わなければならない。

**小問 (iii)**

$x = a + \sqrt{2}$ とおくと $a = x - \sqrt{2}$ であり、$a^3 - 3a + 1 = 0$ である。展開すると

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

であるから

$$0 = (x - \sqrt{2})^3 - 3(x - \sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

根号を孤立させて 2 乗する。

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3 + 3x + 1)^2 = 2(3x^2 - 1)^2.$$

両辺はそれぞれ

$$(x^3 + 3x + 1)^2 = x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,$$
$$2(3x^2 - 1)^2 = 18x^4 - 12x^2 + 2,$$

となるので、

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

ととることができる。ここで用いたのは $a$ が $t^3 - 3t + 1 = 0$ を満たすという事実だけであるから、同じ計算が $b$ と $c$ にもそのまま当てはまる。よって $\mathrm{h}(a + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(b + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(c + \sqrt{2}) = 0$ である。

**小問 (iv)**

2 乗しても 3 乗根は消えないので、別の恒等式が必要である。$p = \sqrt[3]{2}$、$q = \sqrt[3]{3}$、$x = p + q$ とおく。二項展開（binomial expansion）により

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = 5 + 3pq\,x.$$

**考えてみよう** まだ無理数である $pq$ はどうすれば消せるか？

ここで残っている無理数は $pq = \sqrt[3]{6}$ だけであり、しかもそれは因数としてしか現れない。これを孤立させ、$(pq)^3 = 6$ を用いて 3 乗する。

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3 - 5)^3 = 27 \cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

$(x^3 - 5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$ であるから、

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

ととることができる。これは整数係数をもち、$\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$ を満たす。

## 検算

- 小問 (ii) において、$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 5.38233$ である。$x^2 \approx 28.9695$ から $x^8 \approx 704\,310$、$40x^6 \approx 972\,485$ を得る。さらに $352x^4 \approx 295\,410$、$960x^2 \approx 27\,811$ であり、g の各項は丸め誤差の範囲で打ち消し合う。
- $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ の符号をどう変えても $\mathrm{g}(x)$ は変わらないので、$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ の八つの数はすべて根である。これで次数が 8 であることの説明がつく。同様に、h は六つの根 $a\pm\sqrt{2}$、$b\pm\sqrt{2}$、$c\pm\sqrt{2}$ をもつ。
- $t^3-3t+1=0$ の根は $2\cos 40^\circ$、$2\cos 160^\circ$、$2\cos 280^\circ$ である。たとえば $a \approx 1.53209$ から $a+\sqrt{2} \approx 2.94630$ となり、$\mathrm{h}(2.94630)$ は丸め誤差の範囲で零である。
- 小問 (iv) において、$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \approx 2.70217$ であり、$\mathrm{k}(2.70217)$ は丸め誤差の範囲で零である。コンピュータによる検算で、四つの多項式（polynomial）すべてが約 $10^{-10}$ の精度で確認された。

## よくある間違い

- 根号を孤立させる前に 2 乗してしまう。$\sqrt{5}$ を含む項が両辺に残っていると、それらは打ち消し合わない。
- 小問 (iv) で 2 乗しようとしたり、$x^3=5+3pqx$ に気づかないまま $x$ を 3 乗したりする。展開式 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$ こそが解法の要である。
- 小問 (iii) の 3 次式の展開での符号の誤り。特に定数項 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$ に注意する。

## STEP のその先へ

整数係数の多項式の根となる数を**代数的**（algebraic）であるという。この問題は、代数的数の和が代数的であることを手計算で示している。一般の場合の証明には線形代数（linear algebra）を用いる。$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間（finite-dimensional vector space）である。したがって、累乗 $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, \ldots$ はいずれ線形従属（linearly dependent）にならなければならない。ここに現れた次数 4、8、6、9 は、これらの**体の拡大**（field extensions）の次元である。さらに詳しくは、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

解答例

# STEP II 2023、第 5 問

純粋数学 • 漸化式と収束

> **STEP II 2023、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.7 節「*6* 桁か、*600* 桁か」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/newton-speed.html

## 鍵となる考え方

どちらの漸化式（recurrence）も $\sqrt{2}$ を近似するための装置であり、この問題の主題は誤差（error）がどれほど速く小さくなるかである。各小問の要点は、誤差を正しい方法で測ることにある。(i) では $x_n^2 - 2$ に注目する。これは各段階で大きさが高々 $\frac{1}{4}$ の因子を掛けられる（そして符号が変わる）。(ii) では $y_n - \sqrt{2}$ に注目する。これは各段階で（おおよそ）2 乗される。定数を掛けるのでは着実に進むだけだが、2 乗すると正しい桁数が毎回 2 倍になる。だからこそ小問 (ii) は同じ 10 段階で $10^{-600}$ に到達するのである。

## 解答

### 小問 (i)

**(a)** 漸化式は次のように書き直せる。

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

$x_0 = 1 \geq 1$ である。$x_n \geq 1$ ならば $x_n + 1 > 0$ であるから $\frac{1}{x_n+1} > 0$ となり、$x_{n+1} > 1$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n$ について $x_n \geq 1$ である。

**(b)** 全体を通分する。

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

分母は正であるから、$x_{n+1}^2 - 2$ と $x_n^2 - 2$ は異符号である。（どちらも決してゼロにはならない。帰納法によりすべての $x_n$ は有理数（rational）であり、$\sqrt{2}$ は無理数（irrational）だからである。）

絶対値（modulus）をとり、(a) より $x_n + 1 \geq 2$、したがって $(x_n+1)^2 \geq 4$ であることを用いると

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

となり、求める不等式が得られる。

**(c)** $x_0^2 - 2 = -1$ であるから、(b) を 10 回適用すると

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

符号については、$x_0^2 - 2 < 0$ であり、符号は各段階で反転するので、偶数の $n$ ではつねに $x_n^2 - 2$ は負である。特に $x_{10}^2 - 2 < 0$ であり、したがって

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{すなわち、} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

**小問 (ii)**

**(a)** まず、すべての $y_n$ は正である。実際、$y_0 = 1 > 0$ であり、$y_n > 0$ ならば $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$ である。よって漸化式でゼロによる割り算が起こることはない。さて

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n},$$

である。$(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$ だからである。これが求める恒等式である。

ここから導かれることについて。$y_0 = 1$ である。$n \geq 1$ のとき、恒等式（$n-1$ に適用したもの）により、$y_n - \sqrt{2}$ は平方数を正の数 $2y_{n-1}$ で割ったものであるから $y_n - \sqrt{2} \geq 0$ であり、したがって $y_n \geq \sqrt{2} > 1$ である。よってすべての $n \geq 0$ について $y_n \geq 1$ である。

**(b)** $e_n = y_n - \sqrt{2}$、$r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ とおく。(a) より $n \geq 1$ について $e_n \geq 0$ であり、また $y_n \geq 1$ であるから

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

$n \geq 1$ について $e_n \leq 2r^{2^n}$ であることを帰納法で証明する。

**基底段階** $n = 1$。$y_1 = \frac{3}{2}$ であるから $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ であり、一方

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

よって不等式は等号で成り立つ。

**帰納段階。** ある $n \geq 1$ について $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$ が成り立つと仮定する。

**考えてみよう** なぜ $e_n \leq 2r^{2^n}$ の両辺を2乗してよいのか？

2乗しても不等式が保たれるのは**非負**の数どうしの場合であり、$e_n \geq 0$ はまさに小問 (a) で得られたことである。（評価が $n = 0$ ではなく $n = 1$ から始まるのはこのためである。$e_0 = 1 - \sqrt{2}$ は負である。）よって

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

となり、帰納法が完結する。

**(c)** 下界 $y_{10} \geq \sqrt{2}$ は (a) で示した。上界については、$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ より $0 < r < \frac{1}{4}$ であるから、(b) より

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

これを10の累乗と比較するために、$2^{10} = 1024 > 10^3$ を用いる。

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

よって $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$ であり、まとめると

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

**考えてみよう** (ii) の驚異的な速さはどこから来るのか？

(i) では誤差は毎回高々 $\frac{1}{4}$ 倍されるだけなので、10段階で得られるのは小数点以下およそ6桁にすぎない。(ii) では誤差は毎回（おおよそ）2乗されるので、指数 $2^n$ が倍々になる。10段階で、誤差はおよそ $\frac{1}{10}$ から $10^{-600}$ 未満にまで小さくなる。

## 検算

- 最初のいくつかの項は $x_1 = \frac{3}{2}$、$x_2 = \frac{7}{5}$、$x_3 = \frac{17}{12}$ であり、$x_n^2 - 2$ は $-1$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{144}$ と変化する。符号が交互に変わり、毎回少なくとも 4 分の 1 に小さくなっている。
- 分数で厳密に計算すると $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$ であり、区間 $[2 - 10^{-6}, 2]$ に余裕をもって収まっている。
- $y_2 = \frac{17}{12}$ であるから $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$ であり、評価 $2r^4 \approx 0.00368$ と比べて小さい。厳密な分数を用いたコンピュータでの確認では $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$ となり、保証された $2^{-2047} \approx 10^{-616}$ を大きく下回る。

## よくある間違い

- (i)(c) で符号を考え忘れること。絶対値の評価だけからは $2 - 10^{-6} \le x_{10}^2 \le 2 + 10^{-6}$ しか得られない。上界 2 を得るには符号が交互に変わることが必要である。
- $e_n \ge 0$ を確認しないまま $e_n \le 2r^{2^n}$ を 2 乗すること。
- $2^{-2047}$ で止めてしまい、実際に $10^{-600}$ と比較しないこと。不等式 $2^{10} > 10^3$ を使うのが最もすっきりした方法である。

## STEP のその先へ

(ii) の漸化式は $f(y) = y^2 - 2$ にニュートン（Newton）法（Newton's method）を適用したものであり、(ii)(a) の恒等式は、ニュートン法が単根の近くで **2 次収束**（quadratic convergence）するという事実を表している。一方、(i) は収束率が高々 $\frac{1}{4}$ の **1 次収束**（linear convergence）の例である。また、数 $x_n$ は $\sqrt{2}$ の連分数（continued fraction）の近似分数（convergents）でもある。収束の次数（order of convergence）と不動点反復（fixed-point iteration）は、大学で最初に学ぶ数値解析（numerical analysis）の講義の標準的な話題であり、その背後にある解析学は Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に展開されている。

解答例

# STEP II 2023、第 6 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の行列恒等式

> **STEP II 2023、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

フィボナッチ数（Fibonacci numbers）をひとつの $2 \times 2$ 行列（matrix）の累乗の成分としてまとめてしまえば、それらに関する恒等式（identity）はすべて $\mathbf{Q}$ の累乗に関する恒等式となり、通常の代数（指数法則（index laws）、行列式（determinant）、二項定理（binomial theorem））がその仕事を引き受けてくれる。各小問は同じ手順に従う。すなわち、同じ行列を 2 通りに表し、ひとつの成分を読み取るのである。その成分はほとんどの場合右上の成分であり、それは $F_n$ そのものである。

## 解答

### 行列の公式

$n = 1$ のとき、左辺は $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$ である。$F_2 = F_1 + F_0 = 1$ だからである。よって $n = 1$ のとき結果は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について成り立つと仮定する。すると

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

となる。ここで漸化式（recurrence）を 2 回用いた。これは公式の $n$ を $n+1$ に置き換えたものであるから、数学的帰納法（induction）により、すべての正の整数 $n$ について成り立つ。

**小問 (i)**

行列式は乗法的であるから、$\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$ である。同じ行列式を成分から計算すると

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

となり、したがって求めるとおり $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ である。（これはカッシーニ（Cassini）の恒等式である。）

**小問 (ii)**

指数法則より $\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ である：

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

積の右上の成分は $\mathbf{Q}^m$ の第 1 行と $\mathbf{Q}^n$ の第 2 列の積、すなわち $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$ である。右上の成分を比較すると

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

を得る。

**小問 (iii)**

直接計算すると

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

である。（これは黄金比（golden ratio）が満たす方程式 $x^2 = 1 + x$ の行列版である。）

以下の小問では、$\mathbf{Q}^k$ の右上の成分がすべての $k \geq 1$ について $F_k$ であること、さらに $k = 0$ についても、$\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$ の右上の成分が $0 = F_0$ であることから同様であることに注意する。行列の和の右上の成分をとる操作は線形であるから、$\sum c_k\mathbf{Q}^k$ の右上の成分は $\sum c_kF_k$ である。

**(a)** $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$ と、$\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ とした二項定理を用いると

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

となる。左辺の右上の成分は $F_{2n}$ であり、右辺のそれは $\sum_k \binom{n}{k}F_k$ である。よって $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}F_k$ である。

**(b)** まず同じやり方で $\mathbf{Q}^3$ を求める：

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}+\mathbf{I}+\mathbf{Q} = \mathbf{I}+2\mathbf{Q}.$$

次に $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$ として二項定理を適用すると

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I}+2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \mathbf{Q}^k,$$

となり、右上の成分を比較すると $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$ を得る。

2 つ目の恒等式については、$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q}^{2n}$ と書き、(a) の展開を用いる：

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k}.$$

$\mathbf{Q}^{n+k}$ の右上の成分は $F_{n+k}$ であるから、$F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n+k}$ である。

**(c)**

> **考えてみよう** 符号 $(-1)^{n+k}$ を生み出すには、どの行列を $n$ 乗すればよいだろうか？

符号 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$ は、$(\mathbf{Q}-\mathbf{I})^n$ を展開したときに現れるものである。使うことが許されている二項定理の形に合わせるため、$\mathbf{Q}-\mathbf{I} = -\big(\mathbf{I}+(-\mathbf{Q})\big)$ と書くと

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{I})^n = (-1)^n\big(\mathbf{I}+(-\mathbf{Q})\big)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

となる。$\mathbf{Q}^n$ を掛けると

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n(\mathbf{Q}-\mathbf{I})^n = \big(\mathbf{Q}(\mathbf{Q}-\mathbf{I})\big)^n,$$

である。最後の変形が許されるのは、$\mathbf{Q}$ と $\mathbf{Q}-\mathbf{I}$ が可換（commute）であり（どちらも $\mathbf{Q}$ の多項式（polynomial）である）、因子を組み替えられるからである。ところが (iii) より $\mathbf{Q}(\mathbf{Q}-\mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2-\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ であるから、和全体は $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$ に等しい。

$\mathbf{I}$ の右上の成分は 0 であり、一方、左辺のそれは $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k}$ である。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k} = 0.$$

である。おまけとして、左上の成分からは $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k+1} = 1$ が得られる。

## 検算

▶ (i) で $n = 5$ とすると：$F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$。

- (ii) で $m=3$、$n=4$ とすると：$F_4F_4+F_3F_3=9+4=13=F_7$。
- (a) で $n=4$ とすると：$0+4\cdot1+6\cdot1+4\cdot2+1\cdot3=21=F_8$。
- (b) で $n=3$ とすると：$3\cdot2\cdot1+3\cdot4\cdot1+8\cdot2=34=F_9$、また $F_3+3F_4+3F_5+F_6=2+9+15+8=34$。
- (c) で $n=3$ とすると：$-F_3+3F_4-3F_5+F_6=-2+9-15+8=0$。

5 つの恒等式はすべて、59 以下のすべての $n$ について（(ii) では 49 以下のすべての $m,n$ について）コンピュータでも確認した。

## よくある間違い

- (ii) で誤った成分を比較したり、行と行を掛けたりすると、もっともらしく見えるが誤った公式が得られる。$\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ の右上の成分には、$\mathbf{Q}^m$ の第 1 行と $\mathbf{Q}^n$ の第 2 列を用いる。
- 可換でない行列に対して $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n$ の二項定理を用いること。ここではすべての行列が $\mathbf{Q}$ の多項式なので、すべて可換であるが、そのことは明記しておく価値がある。
- $k=0$ の項を忘れること：この項は $\mathbf{I}$ を与え、その右上の成分は $F_0=0$ である。

## STEP のその先へ

関係式 $\mathbf{Q}^2=\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ は、$\mathbf{Q}$ に対するケーリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）である。すなわち、すべての正方行列は自身の特性方程式（characteristic equation）を満たし、ここではそれが $\lambda^2-\lambda-1=0$ である。固有値（eigenvalue）が $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ である $\mathbf{Q}$ を対角化（diagonalisation）すると、$F_n$ に対するビネ（Binet）の閉じた公式が得られる。また、行列の累乗は、繰り返し二乗法（repeated squaring）によって $F_n$ を高速に計算する方法も与える。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、固有値を導入する際に、まさにこの方法でフィボナッチ数を扱っている。

解答例

# STEP II 2023、第 7 問

純粋数学 • 2 つの平方数の和

> **STEP II 2023、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.6 節「**二つの平方数の和**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/two-squares.html

## 鍵となる考え方

2 つの平方数の和（sum of two squares）$x^2+y^2$ は $|x+y\mathrm{i}|^2$ に等しい。すると小問 (i) は、2 つの平方数の和どうしの積はふたたび 2 つの平方数の和になることを述べており、複素数（complex number）を掛け合わせればそれがどの平方数の和になるかがわかる。以降の小問もすべて同じ方針で解ける。各因数を 2 つの平方数の和として表し（近くにある平方数を見つけるとうまくいくことが多い）、それらを掛け合わせればよい。最後の小問ではこの手順を逆にたどり、掛ける代わりに割る。

## 解答

### 小問 (i)

$zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$ であるから、

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

$|zw|$ と $|z||w|$ はともに 0 以上であるから、平方根をとると $|zw|=|z||w|$ が得られ、示すべきことが示された。

以下では 2 乗した形を用いる。すなわち、$z$ と $w$ の実部（real part）と虚部（imaginary part）がともに整数ならば、

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

**小問 (ii)**

ここでは $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$ かつ $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$ である。積は

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

であるから、小問 (i) より $9^2+32^2 = 5\times 221$ となる（実際、$81+1024 = 1105$ である）。したがって $h=9$、$k=32$ とすればよい。

代わりに（絶対値（modulus）が等しい）$10-11\mathrm{i}$ を用いると $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$ となるので、$h=31$、$k=12$ としてもよい。

**小問 (iii)**

この数は一の位が 5 であるから $8045 = 5\times 1609$ であり、先ほどと同様に $5 = |2+\mathrm{i}|^2$ である。次に 1609 を 2 つの平方数の和として表す必要がある。これは $40^2 = 1600$ よりわずかに大きく、$1609-1600 = 9 = 3^2$ であるから、$1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$ となる。すると

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

であり、小問 (i) より

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

したがって $m=77$、$n=46$ である（代わりに $3+40\mathrm{i}$ を用いると $-34+83\mathrm{i}$ が得られ、$34^2+83^2 = 8045$ も成り立つ）。

**小問 (iv)**

ここで余分な因数は $36 = 6^2 = |6|^2$、すなわち実数 6 の絶対値の 2 乗である。$102+201\mathrm{i}$ に 6 を掛けると、実部と虚部がともにそのまま定数倍される：

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

したがって $p=612$、$q=1206$ である。

**小問 (v)**

方針は、25 をガウス整数（Gaussian integer）を用いて $|\alpha|^2$ と表す異なる方法を 2 通り見つけ、それぞれに 1002082 の 1 つの固定した表し方を掛けることである。

まず、1002082 は $1001^2 = 1002001$ よりわずかに大きく、

$$1002082 - 1002001 = 81 = 9^2,$$

であるから、$1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$ となる。

次に、$25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$ である。これらそれぞれに $1001 + 9\mathrm{i}$ を掛けると、1 組ずつ得られる：

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

小問 (i) より、いずれも絶対値の 2 乗は $25 \times 1002082$ である。実部と虚部の絶対値をとり、小さいほうを先に並べると、$r < s$ を満たす相異なる 3 組は

$$(r, s) = (45, 5005), \qquad (2967, 4031), \qquad (3039, 3977).$$

**考えてみよう** 4 組目を得るために $4 + 3\mathrm{i}$ も使えばよいのではないか？

$4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$ であり、$\mathrm{i}$ を掛けることは（符号を除いて）実部と虚部を入れ替えるだけだからである。これは $(3039, 3977)$ を順序を逆にして再現するだけなので、新しいものは何も得られない。本当に異なる選択は 5、$3 + 4\mathrm{i}$、$3 - 4\mathrm{i}$ の 3 つである。

### 小問 (vi)

今度はこの方法を逆にたどる。ここでも近くの平方数を見つける：$1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$ であるから、

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

であり、さらに $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$ である。整数 $t$、$u$ を用いて $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$ と書くことができれば、小問 (i) より

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

となり、109 で割れば（$109 \times 9193 = 1002037$ を用いて）$t^2 + u^2 = 9193$ が得られる。

そこで、分母と分子に共役複素数（conjugate）$10 - 3\mathrm{i}$ を掛けて割り算を行う：

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

ここで $109 \times 92 = 10028$ および $109 \times 27 = 2943$ を用いた。割り算はちょうど割り切れるので $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$ であり、したがって

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

よって $t = 92$、$u = 27$ である。検算として、$8464 + 729 = 9193$ となる。

**考えてみよう** 割り算が割り切れなかったらどうするか？

そのときはもう一方の共役を試す。代わりに $10 - 3\mathrm{i}$ で割ると $(9992 + 3063\mathrm{i})/109$ となり、これはガウス整数ではない（9992 は 109 の倍数ではない）。109 は素数（prime）であるから、2 つの選択のうちどちらか一方は必ずうまくいく。これは後の「STEP のその先へ」で触れるガウス整数の性質である。$1001 - 6\mathrm{i}$ を割っても、これらの共役が得られるだけで新しいものは何も得られない。

## 検算

各答えは直接計算で確かめられる：$9^2 + 32^2 = 1105 = 5 \times 221$、$77^2 + 46^2 = 5929 + 2116 = 8045$、$612^2 + 1206^2 = 1828980 = 36 \times 50805$、(v) については $45^2 + 5005^2$、$2967^2 + 4031^2$、$3039^2 + 3977^2$ のいずれも 25052050 に等しく、さらに $92^2 + 27^2 = 9193$ である。コンピュータで探索するとこれらが確認でき、さらに $25 \times 1002082$ には $0 < r < s$ を満たす表し方が実は 6 通りあることがわかる（残りの 3 組は $(721, 4953)$、$(2079, 4553)$、$(2395, 4395)$ である）。これらは 1002082 自身の 2 つ目の表し方から生じるものなので、相異なる 3 組であればどれを答えてもよい。同様に、$9193 = 48^2 + 83^2$ も成り立つ。

## よくある間違い

- (v) で、$(3 + 4\mathrm{i})$ と $(4 + 3\mathrm{i})$ が異なる組を与えると数えてしまう。実際には、これらは順序が逆なだけの同じ組を与える。
- (vi) で、誤った共役で割って整数でない結果を得てしまい、そこであきらめてしまう。もう一方を試すこと。
- 積を展開するときに $\mathrm{i}^2 = -1$ の符号を誤る。最終的な平方和は必ず直接確かめること。

## STEP のその先へ

$a, b$ を整数とする数 $a + b\mathrm{i}$ 全体は**ガウス整数**をなし、これは通常の整数と同様に素因数分解（factorisation into primes）が一意的である環（ring）である。通常の素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ は $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$ と分解する。これがフェルマー（Fermat）の二平方定理（two-squares theorem）である。これらの因数の振り分け方を数えると、ある数が何通りの表し方をもつかが正確に説明でき、1002082 が今回用いた表し方以外にも表し方をもつ理由もわかる。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は 2 つの平方数の和を見事に扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）はガウス整数を環として扱っている。

解答例

# STEP II 2023、第 8 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP II 2023、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

3 組の対辺（opposite edges）に名前をつければ、小問 (i) は 3 つの 1 次方程式になる。その後はすべて、$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を用いて各辺の長さの条件を内積（dot product）の式に書き換えることから導かれる。3 つの内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ をすべて $|\mathbf{a}|^2$、$|\mathbf{b}|^2$、$|\mathbf{c}|^2$ で表してしまえば、小問 (iii) と (iv) は括弧を展開するだけである。

## 解答

### 小問 (i)

四面体（tetrahedron）を $OABC$ とする。その 6 本の辺は、頂点を共有しない辺の組 3 つに分けられる：

$$OA \text{ と } BC, \qquad OB \text{ と } CA, \qquad OC \text{ と } AB.$$

$OA = p$、$BC = p'$、$OB = q$、$CA = q'$、$OC = r$、$AB = r'$ とおく。4 つの面の周長（perimeter）は

$$OAB : p+q+r', \qquad OAC : p+r+q',$$
$$OBC : q+r+p', \qquad ABC : p'+q'+r'.$$

である。

**四面体が等面四面体**（*isosceles tetrahedron*）**ならば**、$p = p'$、$q = q'$、$r = r'$ であり、4 つの周長はいずれも $p+q+r$ に等しい。

**逆に**、4 つの周長がすべて等しいと仮定する。$X = p - p'$、$Y = q - q'$、$Z = r - r'$ と

おく。はじめの 3 つの面をそれぞれ $ABC$ と比べると

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

3 式をすべて加えると $2(X+Y+Z)=0$ を得る。$X+Y+Z=0$ から各式を順に引くと $Z=0$、$Y=0$、$X=0$ を得る。よって $p=p'$、$q=q'$、$r=r'$ であり、四面体は等面四面体である。これで両方向が示された。

**小問 (ii)**

$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ であるから、条件 $OA=BC$ は

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

を意味し、これを整理すると求める式 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$ が得られる。

残り 2 組の対辺（$OB=CA$ と $OC=AB$）について同じ議論を行うと

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

を得る。この 2 式を加えると、$|\mathbf{b}|^2$ と $|\mathbf{c}|^2$ の項が打ち消し合う：

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad \text{よって}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

3 つの内積の公式は $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ について対称であるから、同様にして

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

が成り立つ。

**小問 (iii)**

$S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$ とおく。小問 (ii) で得た $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$、$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ の 3 つの公式を加えると、各長さの 2 乗は正の符号で 2 回、負の符号で 1 回現れるから

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

である。

$O$ からの距離。

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}\big(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\big)=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

**$A$ からの距離。** このとき $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$ であり、

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + 9|\mathbf{a}|^2 \\ &= |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} - 6|\mathbf{a}|^2 + 9|\mathbf{a}|^2 \qquad \text{次を用いた：}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 \\ &= |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + \left(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2\right) + 3|\mathbf{a}|^2 \\ &= 2S.\end{aligned}$$

よって $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$ でもある。

**$B$ と $C$ からの距離。** $\mathbf{a}$ について用いた事実はすべて、$\mathbf{b}$ についても $\mathbf{c}$ についても同様に成り立ち（小問 (ii) の最後）、$S$ も対称である。よって全く同じ計算により $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$ を得る。

したがって、$G$ は 4 つの頂点すべてから距離 $\sqrt{S/8}$ にある。

### 小問 (iv)

与えられたベクトルを展開する：

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \qquad \text{小問 (ii) より} \\ &= \left(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2\right) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

であり、角 $BOC$ は鈍角（obtuse angle）ではない。

> **考えてみよう** これは 12 個ある角のうちの 1 つにすぎない。同じ作業を繰り返さずに、残りすべての角を扱うにはどうすればよいだろうか？

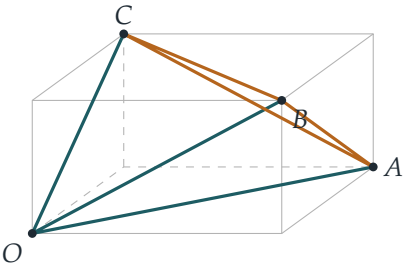
$\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$ で同じ計算をすると $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$ と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$ が得られ、$O$ における角はどれも鈍角ではない。等面四面体であることは四面体そのものの性質であり、頂点の名前のつけ方にはよらないから、どの頂点を $O$ と呼んでもよかった。したがって同じ議論が $A$、$B$、$C$ でも成り立つ。（別の見方として、どの面も 3 辺が $p$、$q$、$r$ であるから、4 つの面はすべて合同な三角形である。その角はちょうど $O$ における 3 つの角 $BOC$、$COA$、$AOB$ である。）以上より、1 つの頂点で交わる辺のなす角はどれも鈍角ではない。

**直角になりうるか？** 等号 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ が成り立つのは $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$、すなわち $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ のときに限る。しかしこのとき $A$ は $O$、$B$、$C$ を通る平面上にあり（実際 $OBAC$ は長方形になる）、$OABC$ は平らになって四面体ではない。どの角についても同じことが

言えるので、**どの角も直角にはなりえない**。すなわち、本当の等面四面体では面の角はすべて鋭角である。

## 検算

- 具体例：辺の長さが $x, y, z$ の直方体（cuboid）をとり、どの 2 つも直方体の辺で結ばれていないような 4 つの頂点を選ぶ。例えば $O = (0,0,0)$、$A = (x,y,0)$、$B = (x,0,z)$、$C = (0,y,z)$ とする。対辺は向かい合う面の対角線なので等しい。$x = 1$、$y = 2$、$z = 3$ とすると $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$、$\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$ であり、確かに $\frac{1}{4}\cdot 36 = 9$ となる。また $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ は直方体の中心であり、どの頂点からも距離 $\sqrt{14}/2$ にある。これは $S = 5+10+13 = 28$ のときの $\sqrt{S/8}$ と一致する。
- 平らな場合：$\mathbf{b} = (3,0,0)$、$\mathbf{c} = (0,4,0)$、$\mathbf{a} = (3,4,0)$ とすると長方形が得られ、その向かい合う「辺」（辺と対角線）は等しく、直角をもつ。これはまさに除外した退化した場合である。
- これらの恒等式は、直方体をもとにした数千個のランダムな例でコンピュータによっても確認した。




## よくある間違い

- 小問 (i) で一方向しか証明しない。「必要十分条件（if and only if）」には両方向が必要であり、中身があるのは逆の方である。
- 小問 (iv) で、直角の場合をきちんと除外し忘れる。$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ ならば $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ となり、4 点が同一平面上にあることになる。
- $O$ における角だけを調べて終わりにしてしまう。残り 3 つの頂点でも同じことが成り立つ理由を述べること。

## STEP のその先へ

上の直方体の図がすべてを物語っている。すべての等面四面体（**ディスフェノイド**（disphenoid）とも呼ばれる）は、直方体の頂点を 1 つおきに選ぶことで得られる。すると小問 (iii) は重心（centroid）が直方体の中心であることを、小問 (iv) は直方体の辺の長さが正であることを述べていることになる。長さの条件を内積の式に、さらには内積を並べた**グラム行列**（Gram matrix）に書き換えることは、大学 1 年の線形代数（linear algebra）と幾何学における標準的な道具である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この考え方が展開されるのを見るのによい本である。

解答例

# STEP II 2023、第 9 問

力学 ・ 坂の上の連結質点

**STEP II 2023、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

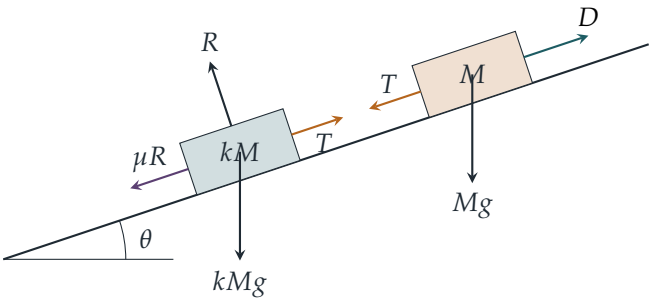
## 鍵となる考え方

3 つの状況それぞれについて、トラックとトレーラーに対して別々にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を書き下す。坂を下ることは、傾斜角 $-\alpha$ の坂を上ることにほかならないので、1 組の方程式で 3 つの場合すべてを扱える。(i) の関係式は、トラックの方程式だけからほぼ自動的に得られる。(ii) は、結局のところ $1-\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ の大小比較に帰着する。

## 解答

トラックとトレーラーを、運動の方向に沿った軽い剛体の棒でつながれた質点としてモデル化する。両者はトラックの進む向きに動くので、トレーラーにはたらく摩擦力（friction）は運動を妨げる向きにはたらき、その大きさは $\mu R$ である。ここで $R$ はトレーラーにはたらく垂直抗力（normal reaction）である。張力（tension）$T$ はトレーラーを前方へ、トラックを後方へ引く。（もし $T$ が負になれば、棒には圧縮力（thrust）がはたらいていることになるが、計算は変わらない。）

坂の傾斜角を $\theta$ とし、$\theta=\alpha$ が上り坂、$\theta=0$ が水平、$\theta=-\alpha$ が下り坂となるように測る。




坂を上る向きの加速度（acceleration）を $a$ とし、各物体について坂に沿った方向に、またトレーラーについては坂に垂直な方向に（$R = kMg\cos\theta$）力を分解すると、次を得る。

$$\text{トラック：} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{トレーラー：} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

(1) と (2) を辺々加えると $T$ が消去される。

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu kg\cos\theta}{1+k}.$$

これを (1) に代入すると $T = D - Mg\sin\theta - Ma$ であるから、

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

$\sin\theta$ の項は打ち消し合うので、張力は $\cos\theta$ を通してのみ $\theta$ に依存する。

**小問 (i)**

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ であるから、$\theta = \alpha$ の場合と $\theta = -\alpha$ の場合の張力は等しい。

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

2 つ目の結果には、3 つの場合のトラックの方程式 (1) だけを用いればよい。

$$Ma_1 = D - T_1 - Mg\sin\alpha,$$
$$Ma_2 = D - T_2,$$
$$Ma_3 = D - T_3 + Mg\sin\alpha.$$

1 つ目と 3 つ目の式を加え、$T_3 = T_1$ を用いると $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$ を得る。ここから中央の式の 2 倍を引くと、

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

となり、示すべき式が得られた。

**小問 (ii)(a)**

**1 つ目の不等式。** (i) より、$a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ は $T_2 > T_1$ と同値である（$M > 0$ であるから）。上の式から、

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu k M g\,(1 - \cos\alpha)}{1 + k} > 0,$$

である。なぜなら、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より $\cos\alpha < 1$ であり、摩擦がはたらくので $\mu > 0$ だからである。したがって $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ である。

**2 つ目の不等式。** $\frac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3$ は $a_1 < a_3$ と同値である。$a$ の式において、$D$ の項と摩擦の項は $\theta = \pm\alpha$ で等しいので、

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

（同じことだが、$T_1 = T_3$ を用いてトラックの方程式どうしを引けば $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$ となる。）よって

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3.$$

**小問 (ii)(b)**

$a$ の式に $\theta = 0$ と $\theta = \alpha$ を用いると、

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1 - \cos\alpha)}{1 + k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1 + k}(1 - \cos\alpha)\right].$$

**考えてみよう** 坂を上ると加速度が $g\sin\alpha$ だけ失われるが、垂直抗力が小さくなる分だけ摩擦は減る。どちらの効果が勝つだろうか。

摩擦の減少分のほうが小さい。まず、$\dfrac{k}{1 + k} < 1$ かつ $\mu < 1$ であるから、$0 \le \dfrac{\mu k}{1 + k} < 1$ である。次に、半角の公式（half-angle formulae）

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

を用いると、$0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$ であるから $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$ となる。したがって

$$\frac{\mu k}{1 + k}(1 - \cos\alpha) < 1 - \cos\alpha < \sin\alpha,$$

である。ここで 1 つ目の不等号が狭義であるのは、$1 - \cos\alpha > 0$ だからである。よって $a_2 - a_1 > 0$、すなわち $a_1 < a_2$ である。$\mu < 1$ が使われるのはこの箇所である。トレーラーが非常に重く、$\mu$ が大きく、坂が急であれば、摩擦の減少分が $g\sin\alpha$ を上回ることもありうる。

## 検算

- $M = 1000\,\mathrm{kg}$、$k = 0.5$、$\mu = 0.4$、$\alpha = 30°$、$D = 5000\,\mathrm{N}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする。このとき $a_1 \approx -2.698$、$a_2 \approx 2.027$、$a_3 \approx 7.102\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ であり、$T_1 = T_3 \approx 2798\,\mathrm{N}$、$T_2 \approx 2973\,\mathrm{N}$ である。実際、$\frac{1}{2}(a_1 + a_3) \approx 2.202$ は $a_2$ と $a_3$ の間に（等号なしで）あり、$a_1 < a_2$ も成り立つ。$\mu < 1$ を満たす多数のランダムなパラメータの組についてコンピュータで確かめたところ、すべての恒等式と不等式が成り立つことが確認された。
- $\mu = 0$ ならば、張力はどの坂でも $kD/(1+k)$ であり、$a_2$ はちょうど $a_1$ と $a_3$ の平均になる。(ii)(a) で摩擦の存在が必要なのはこのためである。
- $\mu = 3$、$k = 100$、$\alpha = 1.5$ ラジアンとすると $a_1 > a_2$ となるので、(b) における条件 $\mu < 1$ は本当に重要である。

## よくある間違い

- 坂の上での摩擦力を $\mu kMg$ としてしまう。坂の上での垂直抗力は $kMg\cos\alpha$ であり、この違いこそが小問 (ii) の内容のすべてである。
- 坂を下るときに重力の成分の符号を間違える。すべてを $\theta$ を用いて書き、その後で $\theta = -\alpha$ とおけば、この間違いは避けられる。
- (ii)(b) で、$1 - \cos\alpha$ と $\sin\alpha$ を比較せずに $\mu k/(1+k) < 1$ だけを論じてしまう。両方の事実が必要である。

## STEP のその先へ

系をいくつかの物体に分け、それぞれにニュートンの法則を適用し、内力が大きさが等しく向きが反対の対として現れるようにするのは、剛体（rigid body）および多粒子系の力学の基本的な方法である。方程式を足し合わせると重心（centre of mass）の運動が得られ、内力は消える。また、不等式 $1 - \cos\alpha < \sin\alpha$ は、半角の公式を用いて関数を比較するという手法の小さな例であり、この手法は解析学のいたるところで役に立つ。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

# STEP II 2023、第 10 問

力学 ・ 放物運動の包絡線

> **STEP II 2023、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

軌道（trajectory）と曲線 $E$ が**接する**（touch）のは、共有点を求める方程式が重解（repeated root）をもつときであり、またそのときに限る。したがって小問 (i) は判別式（discriminant）の計算である。これがすべての角度について成り立つことを要求すると、$E$ はすべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち速さ $u$ の粒子が到達できる範囲の境界でなければならなくなる。問題の残りの部分では、この境界を三つの観点から調べる。どの点に到達できるか、決まった時刻に粒子がどこにあるか、そして包絡線そのものに沿って滑る第二の粒子である。

## 解答

以下を通して、粒子は空気抵抗（air resistance）のない重力のもとで自由に運動する点としてモデル化し、$c = \cos\alpha, s = \sin\alpha$ とおく。

### 小問 (i)

投射からの時間を $t$ とすると、$P_\alpha$ は平面 $y = 0$ 内にとどまり、

$$x = uct, \qquad z = ust - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(uc)$ を用いて $t$ を消去すると、軌道は

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

$E$ との共有点は $A - Bx^2 = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$ を満たす。すなわち

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right)x^2 - x\tan\alpha + A = 0. \qquad (*)$$

もし $x^2$ の係数が 0 であれば、$\tan\alpha \neq 0$ より $(*)$ は 1 次方程式となり、接するのではなく 1 回交わるだけになる。よって $(*)$ は真の 2 次方程式である。二つの曲線がちょうど 1 回接するのは $(*)$ が重解をもつとき、すなわち判別式が 0 になるときである：

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

両辺に $u^2c^2$ を掛けると

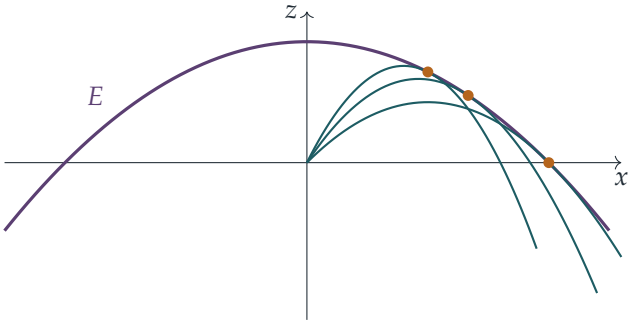
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (s^2 = 1 - c^2 \text{ を用いた}) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1 - 4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

これが $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内のすべての $\alpha$ について成り立つならば、左辺は定数である一方、$\cos^2\alpha$ は $(0,1)$ 内のあらゆる値をとる。これらすべての値に対して定数が $k\cos^2\alpha$ に等しいならば $k = 0$ でなければならず、そのとき定数は 0 である。よって $u^2 = 2gA$ かつ $4AB = 1$ であり、

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

逆に、これらの値のもとでは恒等式はすべての $\alpha$ について成り立つ。接点は重解 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$ で与えられる。




図（$u^2/g = 2$ として描いたもの）は、三つの軌道がそれぞれ琥珀色の点で $E$ に 1 回ずつ接する様子を示している。

**小問 (ii)**

各粒子は初速度を含む鉛直平面内を運動し、全体は $z$ 軸に関して対称である。そこで、$z$ 軸からの水平距離が $r$、高さが $z$ である点をとり、その点を通る鉛直平面内で考える。投射角を、その点の方向へ水平面から上向きに測った角 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ とする。

$r = 0$ のときは、真上または真下に打ち出された粒子しか到達できない。上向きに打ち出された粒子は高さ $u^2/(2g)$ までのすべての高さに達し、下向きに打ち出された粒子はすべての負の高さに達する。よって軸上で到達可能な点は $z \leq u^2/(2g)$ を満たす点である。

$r > 0$ のときは、小問 (i) とまったく同様に、$1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いると、粒子がその点を通るのは

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1 + \tan^2\theta),$$

のときである。任意の実数値をとりうる $T = \tan\theta$ を用いると、これは 2 次方程式

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

となり、これが実数解をもつのは、$2gr^2/u^2 > 0$ で割ることにより

$$r^2 \geq \frac{2gr^2}{u^2}\left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

のとき、かつそのときに限る。

したがって $r^2 = x^2 + y^2$ とすると、到達可能な点はちょうど回転放物面（paraboloid）

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2 + y^2),$$

の上またはその下にある点であり、この曲面は（小問 (i) の値をもつ）$E$ を $z$ 軸のまわりに回転して得られる。曲面より真に下にある点には平面内の二つの方向から到達でき、曲面上の点にはちょうど一つの方向から到達でき（これは重解であり、小問 (i) の接することに対応する）、曲面より上の点にはどの方向からも到達できない。

**小問 (iii)**

粒子の初速度を $u\mathbf{n}$ とする。ただし $\mathbf{n}$ は単位ベクトルである。時間 $t$ 後の位置は

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

である。ここで $\mathbf{k}$ は上向きの単位ベクトルである。したがって

$$\left|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})\right| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

よって時刻 $t$ において、すべての粒子は中心 $(0,0,-\frac{1}{2}gt^2)$、半径 $ut$ の球面上にある。物理的には次のように解釈できる。重力はすべての粒子を等しく加速させるので、原点から自由落下する点から見ると、すべての粒子は速さ $u$ で直線的に外向きに飛んでいく。

**小問 (iv)**

$Q$ が投射されてからの時間を $\tau$ とすると、$Q$ は $y=0$ であり、

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

$\tau = x/u$ を代入すると

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

となる。ここで小問 (i) の $B = g/(2u^2)$ を用いた。よって $Q$ は常に $E$ 上にある。

**小問 (v)**

$Q$ が爆発から時間 $T$ 後に投射され、爆発から時間 $t$ $(\geq T)$ 後に $Q$ と $P_\alpha$ が同じ点にあるとする。このとき $\tau = t - T$ であり、$y$ 座標はどちらも 0 なので、$x$ 座標と $z$ 座標が一致すればよい：

$$uct = u(t-T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t-T)^2.$$

第 1 式から $t - T = ct$、よって $T = t(1-c)$ である。第 2 式に $t - T = ct$ を代入し、$1 - c^2 = s^2$ を用いると

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

**考えてみよう** 面倒な公式を使わずに、これを $t$ について解くにはどうすればよいか？

両辺に $2g$ を掛けて一方の辺にまとめると $g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$ となり、これは完全平方式

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

である。重解になるのはまさに予想どおりである。二つの経路が共有する点はそこしかないので、衝突は $P_\alpha$ の軌道が $E$ に接する点で起こらなければならない。実際、そのとき $P_\alpha$ は $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$ にあり、これは小問 (i) で求めた接点である。したがって

$$T = t(1-\cos\alpha) = \frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

となり、示すべき式が得られる。$0 < 1 - \cos\alpha < 1$ であるから $0 < T < t$ となり、確かに $Q$ は爆発の後、衝突の前に打ち出される。

## 検算

- 小問 (i) で $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ とすると接点は $x = u^2/g, z = 0$ となる。これは水平な地面上での最大到達距離であり、到達可能領域の境界は確かにこの点を通るはずである。
- 小問 (ii) で、軸 $r = 0$ 上では条件は $z \le u^2/(2g)$ となり、これは真上に打ち出された粒子の最高点の高さである。
- 小問 (v) で $u = 7, g = 9.8, \alpha = 0.5$ とすると、公式から $T \approx 0.182$ が得られる。二つの運動を時間を追って数値的に進めると、粒子が $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$ で出会うこと、また $Q$ の打ち出しを 0.05 遅らせるだけで粒子がすれ違ってしまうことが確かめられる。
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $T \to u/g$ かつ $t \to u/g$ となる。$P_\alpha$ はほぼ真上に上がって時刻 $u/g$ に $E$ の頂点 $(0, 0, A)$ に達し、ちょうどそのとき $Q$ がそこから出発する。

## よくある間違い

- 共有点の方程式を $x$ についての一つの 2 次方程式に書き直さないまま判別式を 0 とおき、その結果 $x^2$ の係数から $-B$ の項を落としてしまう。
- 小問 (ii) で境界の曲面だけを答えてしまう。問題が求めているのは集合全体、すなわち回転放物面の上およびその下にある立体領域である。
- 小問 (v) で二つの粒子に同じ時間変数を使ってしまう。$Q$ は $t - T$ の間しか運動していない。

## STEP のその先へ

曲線 $E$ は軌道の族の**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線である。一般に、族 $F(x, z, \alpha) = 0$ の包絡線は、$F = 0$ と $\partial F/\partial\alpha = 0$ から $\alpha$ を消去することで求められる。これはここで用いた重解条件の微分による表現である。小問 (ii) の回転放物面はしばしば**安全放物面**（paraboloid of safety）と呼ばれ、小問 (iii) は重力が消える自由落下系（freely falling frame）への座標変換の一例である。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これら両方の考え方が展開されている。

解答例

# STEP II 2023、第 11 問

確率・統計 ・ 混合分布

**STEP II 2023、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.5 節「答えにくい質問をする」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/awkward-questions.html

## 鍵となる考え方

$Y$ は**混合分布**（mixture）に従う確率変数である。すなわち、まず分布を無作為に一つ選び、次にその分布から値を取り出す。$Y$ の平均は二つの平均の加重平均になるが、分散には余分な項が加わる。二つの平均どうしの隔たりそのものが、ばらつきを生むからである。小問 (ii) と (iii) はどちらもさいころを使う前に硬貨を投げるが、その振る舞いはまったく異なる。(ii) では一回振るたびに新たに硬貨を投げるので、混合の効果は平均化されて消える。(iii) では一回の硬貨投げがすべてを決めるので、その余分な項が支配的になる。

## 解答

### 小問 (i)

どちらの確率変数を使うかの選択は $X_1$ と $X_2$ の値とは独立に行われるので、

$$\mathrm{P}(Y = x_i) = p\,a_i + q\,b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

である。したがって

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_i x_i(pa_i + qb_i) = p\sum_i x_i a_i + q\sum_i x_i b_i = p\mu_1 + q\mu_2.$$

同様に、$\mathrm{E}(Y^2) = p\,\mathrm{E}(X_1^2) + q\,\mathrm{E}(X_2^2) = p(\sigma_1^2+\mu_1^2) + q(\sigma_2^2+\mu_2^2)$ である。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + p\mu_1^2 + q\mu_2^2 - (p\mu_1+q\mu_2)^2\\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + p(1-p)\mu_1^2 + q(1-q)\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2\\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq\mu_1^2 + pq\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2\\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq(\mu_1-\mu_2)^2,\end{aligned}$$

となる。ここで $1-p=q$ と $1-q=p$ を用いた。これが求める結果である。

**小問 (ii)**

硬貨が表を出す事象を $H$、さいころが 6 の目を出す事象を $S$ とする。硬貨とさいころは独立であるから、

$$\mathrm{P}(B=1) = \mathrm{P}(H)\mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(H^c)\mathrm{P}(S^c) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

である。よって各 $B$ はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で 0 または 1 をとる。$Z_1$ は、$B$ の $n$ 個の独立なコピーのうち 1 となるものの個数であり、各コピーは同じ確率 $\frac{1}{2}$ で成功となる。これはまさに二項分布（binomial distribution）の設定であるから、$Z_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$ であり、平均は $\frac{n}{2}$、分散は $\frac{n}{4}$ である。

$n$ が大きいとき、$Z_1$ を $\mathrm{N}(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ で近似する。その標準偏差（standard deviation）は $\frac{\sqrt{n}}{2}$ である。平均との差が平均の 10% 以内であるとは、$|Z_1 - \frac{n}{2}| \le \frac{n}{20}$ ということである。$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ として標準化（standardising）すると、

$$\mathrm{P}\big(|Z_1 - \tfrac{n}{2}| \le \tfrac{n}{20}\big) \approx \mathrm{P}\Big(|Z| \le \frac{n/20}{\sqrt{n}/2}\Big) = \mathrm{P}\Big(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{10}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{10}\Big) - 1.$$

$n \to \infty$ のとき $\sqrt{n}/10 \to \infty$ であるから $\Phi(\sqrt{n}/10) \to 1$ となり、確率は $2-1=1$ に収束する。（連続修正（continuity correction）を施しても、境界は標準偏差の $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍しか変わらず、極限には影響しない。）

**小問 (iii)**

$n$ 個のさいころのうち、6 の目の個数を $X_1$、6 以外の目の個数を $X_2$ とする。すると $X_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$、$X_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$ である。$Z_2$ は確率 $p = \frac{1}{2}$ で $X_1$ の値を、確率 $q = \frac{1}{2}$ で $X_2$ の値をとり、硬貨はさいころと独立である。これはまさに小問 (i) の状況であり、

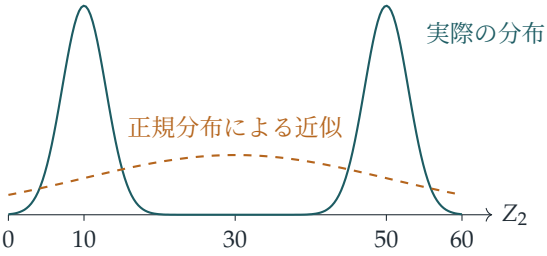
$$\mu_1 = \tfrac{n}{6}, \quad \mu_2 = \tfrac{5n}{6}, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = n\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{5n}{36}.$$

である。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{6} = \tfrac{n}{2},\\ \mathrm{Var}(Z_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{36} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{36} + \tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{4n}{6}\Big)^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{9}.\end{aligned}$$

**考えてみよう** $n$ が大きいとき、$Z_2$ の分布は実際にはどのような形をしているだろうか。

確率 $\frac{1}{2}$ で $Z_2$ は $\frac{n}{6}$ の近くにあり、確率 $\frac{1}{2}$ で $\frac{5n}{6}$ の近くにある。これら二つの山はそれぞれ標準偏差 $\frac{\sqrt{5n}}{6}$ をもち、これは山どうしの隔たり $\frac{2n}{3}$ に比べてごく小さい。したがってこの分布は**二峰性**（bimodal）であり、二つの細い山があって、平均 $\frac{n}{2}$ の近くにはほとんど確率がない。正規分布は平均のところに山を一つだけもつから、ここではまさに正反対の結果を与える。$Z_2$ がほとんど決してとらない値のところに最も多くの確率を置いてしまうのである。問題はもう一つある。標準偏差はおよそ $\frac{n}{3}$ であるから、$\mathrm{N}(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{9})$ は負の値に約 $\mathrm{P}(Z < -1.5) \approx 0.067$ の確率を与え、$n$ を超える値にも同じだけの確率を与える。しかし常に $0 \le Z_2 \le n$ である。下図は $n = 60$ の場合の二つの分布の様子を示している。




最後の部分に移る。$Z_2$ がその平均の 10% 以内にあるのは $0.45n \le Z_2 \le 0.55n$ のときである。硬貨の結果で条件付けると、

$$\mathrm{P}(0.45n \le Z_2 \le 0.55n) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(0.45n \le X_1 \le 0.55n) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(0.45n \le X_2 \le 0.55n).$$

第 1 項について、$\mathrm{P}(0.45n \le X_1 \le 0.55n) \le \mathrm{P}(X_1 \ge 0.45n)$ であり、$0.45n - \frac{n}{6} = \frac{17n}{60}$ である。標準偏差 $\frac{\sqrt{5n}}{6}$ をもつ正規近似 $X_1 \approx \mathrm{N}(\frac{n}{6}, \frac{5n}{36})$ を用いると、

$$\mathrm{P}(X_1 \ge 0.45n) \approx \mathrm{P}\Big(Z \ge \frac{17n/60}{\sqrt{5n}/6}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{17\sqrt{n}}{10\sqrt{5}}\Big) \longrightarrow 1 - 1 = 0.$$

第 2 項は鏡像である。$X_2 = n - X_1$ であるから、$0.45n \le X_2 \le 0.55n$ となるのはちょうど $0.45n \le X_1 \le 0.55n$ となるときであり、第 2 項は第 1 項に等しい。したがって、$Z_2$ がその平均の 10% 以内にある確率は高々およそ $1 - \Phi(\frac{17\sqrt{n}}{10\sqrt{5}})$ であり、これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。

この段階は、実は近似に依存していない。チェビシェフ（Chebyshev）の不等式により、厳密に

$$\mathrm{P}\big(|X_1 - \tfrac{n}{6}| \ge \tfrac{17n}{60}\big) \le \frac{5n/36}{(17n/60)^2} = \frac{500}{289\,n} \longrightarrow 0.$$

が成り立つ。

## 検算

- (i) において、$\mu_1 = \mu_2$ ならば余分な項は消える。また $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ならば $Y$ は値 $\mu_1$ または $\mu_2$ のみをとり、その分散は $pq(\mu_1 - \mu_2)^2$ となる。これはスケールを変えたベルヌーイ（Bernoulli）確率変数の場合と同じである。
- (ii) において、$n = 400$ のときの二項分布による厳密な確率は 0.9598 であり、正規近似による値 $2\Phi(2) - 1 = 0.9545$ と比べられる。$n = 1000$ のときは、二つの値はそれぞれ 0.9986 と 0.9984 である。
- (iii) において、$n = 30$ として $Z_2$ をコンピュータでシミュレーションしたところ、平均 15.00、分散 104.2 が得られ、公式による値 15 と 104.17 に一致した。$n = 100$ のとき、平均の 10% 以内にある厳密な確率はおよそ $3 \times 10^{-11}$ である。

## よくある間違い

- 二つの平均のどちらを選ぶかということ自体がばらつきの源であることを忘れて、$\mathrm{Var}(Y) = p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2$ と答えてしまう。
- (iii) の $Z_2$ を (ii) の $Z_1$ と同じように扱ってしまう。(ii) ではさいころ一つごとに硬貨を投げ直すが、(iii) では一回の硬貨投げが $n$ 個のさいころすべてを支配するので、結果は独立ではない。
- 当てはまりの悪さを「分散が大きいから」とだけ説明してしまう。本当の問題は分布の形にある。二つの離れた山があり、平均の近くにはほとんど確率がないのである。

## STEP のその先へ

小問 (i) は**全分散の公式**（law of total variance）$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid C)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid C)\big)$ の最も簡単な場合である。ここで $C$ は硬貨を表す。小問 (ii) は大数の弱法則（weak law of large numbers）であり、大学の最初の講義ではチェビシェフの不等式を用いて厳密に証明される。小問 (iii) は、この法則になぜ独立性が必要なのかを示している。共有される硬貨が一枚あるだけで、法則は成り立たなくなるのである。$Z_2$ のような混合分布は統計モデリングの定番である。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）は、これら三つの考え方すべてを多くの例とともに扱っている。

解答例

# STEP II 2023、第 12 問

確率・統計　・　最大値の分布

> **STEP II 2023、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

いくつかの数の最大値が $t$ 以下であるのは、それらの**すべて**が $t$ 以下であるとき、かつそのときに限る。したがって、$Y$ の累積分布関数（cumulative distribution function）は、1 つの $X_i$ の累積分布関数のべき乗になる。残りはすべて、密度関数（density）ではなく累積分布関数を用いて考えることから導かれる。中央値（median）は $\mathrm{P}(Y \le m) = \frac{1}{2}$ を直接解けば得られる。平均（mean）は、部分積分（integration by parts）によって積分の中に密度関数ではなく分布関数が現れるようにすると、すっきりと求まる。

## 解答

### 小問 (i)

$F(t) = \mathrm{P}(X_1 \le t)$ とおく。$0 \le t \le \pi$ に対して

$$F(t) = \int_0^t \tfrac{1}{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos t).$$

事象 $\{Y \le t\}$ が起こるのは、$X_1 \le t$, $X_2 \le t$, ..., $X_n \le t$ がすべて起こるとき、かつそのときに限る。実際、最大のものが $t$ 以下ならば他のものもすべてそうであり、逆も成り立つ。$X_i$ は独立（independent）かつ同一分布（identically distributed）であるから、この共通部分の確率は個々の確率の積になる：

$$\mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(X_1 \le t)\,\mathrm{P}(X_2 \le t) \cdots \mathrm{P}(X_n \le t) = \big[\mathrm{P}(X_1 \le t)\big]^n.$$

よって、$Y$ の累積分布関数を $G$ と書くと

$$G(t) = \frac{(1 - \cos t)^n}{2^n} \qquad (0 \le t \le \pi),$$

であり、$t < 0$ では $G(t) = 0$、$t > \pi$ では $G(t) = 1$ である。連鎖律（chain rule）を用いて微分すると、$Y$ の確率密度関数（probability density function）は

$$g(t) = \frac{n\,(1-\cos t)^{n-1}\sin t}{2^n} \quad \text{ただし} 0 \le t \le \pi,$$

であり、それ以外の範囲では o である。

**小問 (ii)**

中央値 $m = m(n)$ は $G(m) = \frac{1}{2}$ を満たす：

$$\left(\frac{1-\cos m}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \iff \frac{1-\cos m}{2} = 2^{-1/n}$$
$$\iff \cos m = 1 - 2^{1-1/n},$$

ここで、$(1-\cos m)/2 \ge 0$ であるから正の実数の $n$ 乗根をとった。$m$ は $[0, \pi]$ に属さなければならず、この範囲で余弦は一対一（one-to-one）であるから

$$m(n) = \arccos\left(1 - 2^{1-1/n}\right).$$

$n$ が増加すると $1/n$ は減少するので、$2^{1-1/n}$ は（2 に向かって）増加し、$1 - 2^{1-1/n}$ は（$-1$ に向かって）減少する。arccos は減少関数（decreasing function）であるから、$m(n)$ は $n$ とともに**増加**し、$n \to \infty$ のとき $m(n) \to \arccos(-1) = \pi$ となる。（$n = 1$ のときは $m(1) = \arccos 0 = \pi/2$ となり、$\frac{1}{2}\sin x$ が $\pi/2$ に関して対称であることから当然要求される値と一致する。）これは納得のいく結果である。ますます多くの値の最大値をとれば、それは範囲の上端へと押しやられるのである。

**小問 (iii)**

定義により $\mu(n) = \int_0^\pi t\,g(t)\,\mathrm{d}t$ である。$g = G'$ であるから、$u = t$、$\mathrm{d}v = g(t)\,\mathrm{d}t$、$v = G(t)$ として部分積分を行う：

$$\mu(n) = \Big[\,t\,G(t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi G(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi \cdot 1 - 0 - \frac{1}{2^n}\int_0^\pi (1-\cos x)^n\,\mathrm{d}x,$$

ここで $G(\pi) = \left(\frac{1+1}{2}\right)^n = 1$ を用いた。これが求める式である。

**考えてみよう** $\int t\,(1-\cos t)^{n-1}\sin t\,\mathrm{d}t$ を直接計算しようとせず、部分積分を用いるのはなぜか。

目標の式には $(1-\cos x)^n$ が含まれている。これは $2^n G(x)$、すなわち密度関数ではなく**分布**関数である。部分積分はまさに $t\,g(t)$ を $G(t)$ に取り替える操作であり、同時に厄介な因子 $t$ も取り除いてくれる。

**(a)** $h(x)=\frac{1}{2}(1-\cos x)$ とおくと、$[0,\pi]$ 上で $0\le h(x)\le 1$ であり、$0<x<\pi$ では $0<h(x)<1$ である。式は $\mu(n)=\pi-\int_0^{\pi}h(x)^n\,\mathrm{d}x$ と書けるので

$$\mu(n+1)-\mu(n)=\int_0^{\pi}\bigl(h(x)^n-h(x)^{n+1}\bigr)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}h(x)^n\bigl(1-h(x)\bigr)\,\mathrm{d}x.$$

$0<x<\pi$ では $h(x)>0$ かつ $1-h(x)>0$ であるから、被積分関数は連続で真に正である。よってこの積分は真に正であり、すべての $n\ge 1$ に対して $\mu(n+1)>\mu(n)$ が成り立つ。すなわち $\mu(n)$ は $n$ とともに増加する。

**(b)** $n=2$ として展開し、$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ を用いると

$$\int_0^{\pi}(1-\cos x)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\Bigl(1-2\cos x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2x\Bigr)\mathrm{d}x=\tfrac{3}{2}\pi,$$

となる。$\cos x$ と $\cos 2x$ はいずれも $[0,\pi]$ 上で積分すると零になるからである。よって

$$\mu(2)=\pi-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{2}\pi=\frac{5\pi}{8}.$$

小問 (ii) より $m(2)=\arccos\bigl(1-\sqrt{2}\bigr)$ である。$5\pi/8$ と $m(2)$ はともに $[0,\pi]$ に属し、この範囲で余弦は狭義単調減少であるから

$$\mu(2)<m(2)\iff\cos\tfrac{5\pi}{8}>\cos m(2)=1-\sqrt{2}.$$

**?** **考えてみよう** $\cos\frac{5\pi}{8}$ の正確な値はどうすれば求められるか。

$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\bigl(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\bigr)=-\sin\frac{\pi}{8}$ と書き、半角の公式（half-angle formula）$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\bigl(1-\cos\frac{\pi}{4}\bigr)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ を用いる。$\sin\frac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\cos\tfrac{5\pi}{8}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

したがって $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}>1-\sqrt{2}$、すなわち $\sqrt{2}-1>\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ を示せばよい。両辺はともに正であるから、これは両辺を 2 乗して 4 倍した不等式と同値である：

$$\begin{aligned}4\bigl(3-2\sqrt{2}\bigr)>2-\sqrt{2}&\iff 10>7\sqrt{2}\\&\iff 100>98,\end{aligned}$$

ここで最後の段階では 2 つの正の数を 2 乗した。これは正しく、各段階はすべて同値変形であったから、$\cos\frac{5\pi}{8}>1-\sqrt{2}$ であり、したがって $\mu(2)<m(2)$ である。

## 検算

- $n=1$ のとき、$Y=X_1$ は $\pi/2$ に関して対称であり、実際 $\mu(1)=\pi-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi/2=m(1)$ となる。

- 数値的には $\mu(2) = 5\pi/8 \approx 1.9635$、$m(2) = \arccos(1 - \sqrt{2}) \approx 1.9979$ であり、平均は中央値のわずかに下にある。1 から 7 までの各 $n$ について $10^5$ 個の最大値をコンピュータでシミュレーションしたところ、どちらの式とも 0.01 以内で一致し（例えば $\mu(3) \approx 2.1598$、$m(3) \approx 2.1986$）、どちらの数列も増加していた。
- $n = 2$ のときの $Y$ の密度関数は $\frac{1}{2}(1 - \cos t)\sin t$ であり、これは左に歪んで（skewed）いる（0 に向かって長い裾をもつ）。左に歪んだ分布では、平均が中央値より小さくなるのが普通である。

## よくある間違い

- $\mathrm{P}(Y \le t) = [F(t)]^n$ の根拠を述べ忘れる。「すべてが $t$ 以下」という同値性と独立性の両方が必要である。
- 部分積分を行ったのに境界項（boundary term）$\big[tG(t)\big]_0^{\pi} = \pi$ を忘れる。先頭の $\pi$ はここから来ている。
- 余弦が $[0, \pi]$ 上で**減少**することに注意せずに余弦を通して角を比較し、不等号の向きを逆にしてしまう。

## STEP のその先へ

標本の最大値は**順序統計量**（order statistic）の一例であり、小問 (i) の技法によって任意の標本最大値の分布が得られる。恒等式 $\mathrm{E}[Y] = \pi - \int_0^{\pi} G(t)\,\mathrm{d}t$ は、非負の確率変数（random variable）に対する一般的な裾の積分公式（tail-integral formula）$\mathrm{E}[Y] = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(Y > t)\,\mathrm{d}t$ の特別な場合であり、大学の確率論の講義の早い段階で出会うことになる。どちらの考え方も Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

解答例

# STEP III 2023、第1問

純粋数学 • 2次曲線の接線

**STEP III 2023、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

直線が円に接する（tangent）のは、円の中心からその直線までの垂線の距離（perpendicular distance）が半径に等しいとき、かつそのときに限る。そこで、弦（chord）$PQ$ を $p$ と $q$ で表し、その距離を計算すると、接する条件が与えられた関係式にまとまることがわかる。その後は、2つのパラメータについての1つの対称な方程式がすべてである。最後の小問では、3番目の辺についてもこの関係式が成り立つかが問われるが、これは解の和と積（sums and products of roots）の出番である。

## 解答

**小問 (i)**

$PQ$ の傾きは

$$\frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{p+q}{2},$$

である。ここで、2点は異なるので $q - p \neq 0$ で割ってよい。したがって、$P$ を通るこの直線は $y - ap^2 = \frac{1}{2}(p+q)(x - 2ap)$ であり、整理すると

$$(p+q)x - 2y - 2apq = 0.$$

となる。中心 $C(0, 3a)$ からこの直線までの距離は

$$\frac{|-6a - 2apq|}{\sqrt{(p+q)^2 + 4}} = \frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

である。直線が円に接するのは、これが $2a$ に等しいとき、すなわち（両辺は正なので 2 乗し、$4a^2 \neq 0$ で割ると）

$$(pq+3)^2 = (p+q)^2 + 4 \iff p^2q^2 + 6pq + 5 = (p+q)^2.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。これは $(*)$ そのものであるから、$(*)$ が成り立つとき直線 $PQ$ は円の接線である。（どの段階も逆にたどれるので逆も成り立ち、これは小問 (iii) で必要になる。）

### 小問 (ii)

$(*)$ を展開し、$q$ の累乗ごとに整理すると

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

となる。$p^2 \neq 1$ より最高次の係数は 0 でないので、これは $q$ についての正真正銘の 2 次方程式である。その判別式（discriminant）は

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4 + 6p^2 - 5) \\ &= 4(p^4 - 2p^2 + 5) \\ &= 4\big((p^2-1)^2 + 4\big) > 0, \end{aligned}$$

であるから、異なる 2 つの実数解 $q_1, q_2$ をもつ。どちらも $p$ には等しくない。実際、左辺に $q = p$ を代入すると $-p^4 - 2p^2 - 5 < 0$ となる。よって $Q_1$ と $Q_2$ は確かに $P$ とは異なる点である。

この 2 次方程式から、

$$q_1 + q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1 q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

### 小問 (iii)

三角形 $PQ_1Q_2$ を考える。ここで $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$ であり、$q_1, q_2$ は小問 (ii) の解である。その頂点はすべて $x^2 = 4ay$ 上にあり、（(ii) で示したように）互いに異なる 3 点である。放物線（parabola）上の異なる 3 点が一直線上に並ぶことはない。直線と放物線の交点は高々 2 個だからである。よって、これは正真正銘の三角形である。

$(p, q_1)$ と $(p, q_2)$ は $(*)$ を満たすので、小問 (i) より辺 $PQ_1$ と $PQ_2$ は円に接する。

**考えてみよう** $q_1$ と $q_2$ を具体的に求めたくないとき、3 番目の辺 $Q_1Q_2$ が円に接することをどうやって示せばよいだろうか？

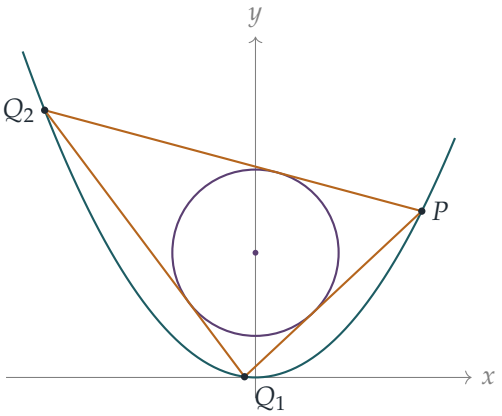
小問 (i) の逆にたどれる議論（$p, q$ を $q_1, q_2$ に置き換えたもの）により、$Q_1Q_2$ が円に接するのは

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。両辺とも、すでにわかっている $s = q_1+q_2$ と $t = q_1q_2$ だけで表される。両辺に $(1-p^2)^2$ を掛ける。左辺は $16p^2$ となる。右辺は

$$\begin{aligned}&(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2\\ &\quad = (p^4 - 10p^2 + 25) + (-6p^4 + 36p^2 - 30) + (5p^4 - 10p^2 + 5)\\ &\quad = 16p^2.\end{aligned}$$

となる。両辺が一致するので、$Q_1Q_2$ も円に接し、$PQ_1Q_2$ が求める三角形である。




図は $a = 1$、$p = 2$ の場合であり、このとき $q_{1,2} = \frac{1}{3}(-4 \pm \sqrt{13})$ である。

## 検算

- $a = 1$、$p = 2$ とすると、2 次方程式は $3q^2 + 8q + 1 = 0$ であり、$q_1 + q_2 = -\frac{8}{3} = \frac{4p}{1-p^2}$、$q_1q_2 = \frac{1}{3} = \frac{p^2-5}{1-p^2}$ となる。このとき $(q_1+q_2)^2 = \frac{64}{9}$ かつ $q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5 = \frac{1}{9} + 2 + 5 = \frac{64}{9}$ であり、小問 (iii) の要求どおりである。
- 数値的には、$q_1 \approx -0.1315$、$q_2 \approx -2.5352$ のとき、3 辺の直線はいずれも $(0, 3)$ からの距離が 2.000 である。ランダムに選んだ何千通りもの $a$ と $p$ についてコンピュータで確かめたところ、約 $10^{-13}$ の精度で一致した。
- 除外された場合 $p = \pm 1$ は示唆に富む。$p = 1$ のとき 2 次方程式は $-4q - 4 = 0$ に退化し、$q = -1$ しか得られない。「失われた」$P(2a, a)$ からの接線は鉛直な直線 $x = 2a$ であり、これは円に接するが、放物線とは $P$ でしか交わらない。

## よくある間違い

- 距離の公式で絶対値を忘れる、あるいは両辺が正であることを述べずに 2 乗する。
- 小問 (i) の「ならば」の向きしか使わない。小問 (iii) では $Q_1Q_2$ が接することを代数的な条件に言い換えるために逆が必要なので、各段階が逆にたどれることを明記すること。
- 三角形が退化しないように $q_1, q_2 \neq p$ を確かめることを怠る。

## STEP のその先へ

これは**ポンスレの閉形定理**（Poncelet's porism）の一例である。ある三角形が一方の円錐曲線（conic）に内接し、かつもう一方の円錐曲線に外接するならば、そのような三角形は第 1 の円錐曲線の**どの**点から始めても作ることができる。ここでは放物線と円がそのような組であり、小問 (iii) は解と係数の関係（Vieta's formulas）を用いて閉じることを直接証明している。一般の証明には射影幾何学（projective geometry）を用い、最も美しい証明は楕円曲線（elliptic curves）による。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、このようなパラメータ表示による円錐曲線の幾何の問題がさらに収録されている。

解答例

# STEP III 2023、第 2 問

純粋数学 ・ 極方程式で表された曲線の面積

**STEP III 2023、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

どちらの曲線も、$\theta = 0$ から $\theta = \pi$ まで動く動径によって描かれる。したがってこの問題の核心は、各角度においてどちらの曲線が外側にあるかという点にある。$k(1+\sin\theta)$ と $k+\cos\theta$ を比較すると、両者の大小はちょうど一度だけ、$\theta = \alpha$ において入れ替わることがわかる。すると領域 A と B を合わせたものは二つの曲線の共通部分となり、すべての面積は極座標（polar coordinates）による面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ から求められる。その際、$\sin^2$ と $\cos^2$ は倍角の公式（double angle formulae）で処理する。

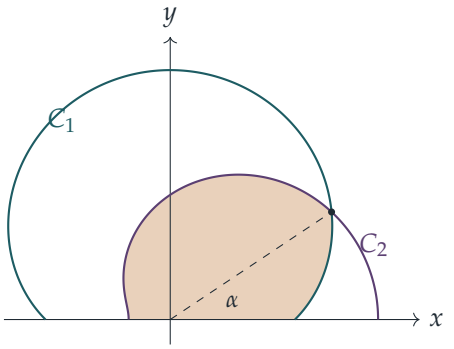
## 解答

### 小問 (i)

概形を描くには、いくつかの値が役に立つ。

| | $\theta = 0$ | $\theta = \frac{\pi}{2}$ | $\theta = \pi$ |
|---|---|---|---|
| $C_1$: $r = k(1+\sin\theta)$ | $k$ | $2k$ | $k$ |
| $C_2$: $r = k+\cos\theta$ | $k+1$ | $k$ | $k-1$ |

（$k > 1$ であるから）どちらの動径も常に正である。$C_1$ はカージオイド（cardioid）の上半分であり、$y$ 軸に関して対称で、点 $(0, 2k)$ に達する。$C_2$ は「半径がおよそ $k$」のやや押しつぶされた半円であり、$\theta = 0$ では 1 だけ右に押し出され、$\theta = \pi$ では 1 だけ内側に引っ込んでいる。下図は $k = 1.5$ の場合であり、網掛けの部分が二つの曲線の重なる領域である。




交点では動径が一致するから、

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

ここで $\cos\alpha \neq 0$ である（もし0ならば $k\sin\alpha = 0$ が必要となるが、そのとき $\sin\alpha = \pm 1$ である）。よって両辺を割ると $\tan\alpha = \dfrac{1}{k}$ が得られ、これが示すべきことであった。$0 < \frac{1}{k} < 1$ であるから、$[0,\pi]$ においてこのような角はちょうど一つ存在し、$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たす。

さらに有用なこととして、$k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$ であり、これは $0 \le \theta < \alpha$ で正、$\alpha < \theta \le \pi$ で負である（下に示す $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ の値を用いると、これは $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$ に等しく、$\alpha-\theta$ はそれぞれ $(0,\alpha]$ または $[\alpha-\pi, 0)$ に属する）。したがって、$C_2$ は $\alpha$ より手前では $C_1$ の外側にあり、それ以降は内側にある。

また、$\tan\alpha = \frac{1}{k}$ から得られる次の値も用いる。

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

**小問 (ii)**

領域 A は、$0 \le \theta \le \alpha$ において $C_1$ までの動径が掃く領域であるから、その面積は

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

である。ここで $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ と $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ を用いた。これが求める式である。

### 小問 (iii)

同様に、$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ を用いると、B の面積は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}(k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}\left(k^2+\tfrac{1}{2}+2k\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(k^2+\tfrac{1}{2}\right)\theta+2k\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\alpha}^{\pi}\\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-k\sin\alpha-\tfrac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

となる。$\alpha$ の三角関数を消去したければ、小問 (i) の値から $k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$、$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$ であるから、

$$\text{B の面積} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k}{4(1+k^2)}.$$

### 小問 (iv)

**考えてみよう** A と B を合わせた領域はどのような形をしているだろうか。

小問 (i) より、$\theta<\alpha$ では A の境界は内側の曲線 $C_1$ であり、$\theta>\alpha$ では B の境界は内側の曲線 $C_2$ である。したがって $R$ は二つの領域の共通部分（図の網掛け部分）の面積である。このことからすでに答えの見当がつく。$k$ が大きいとき、$C_2$ はほぼ完全に $C_1$ の内側に収まるので、共通部分は $T$ のほぼ全体になるはずである。

全体の面積は、同じ積分を $[0,\pi]$ で行えば得られる（$\sin\theta$ と $\sin 2\theta$ の項は両端で 0 となり、$-2\cos\theta$ からは 4 が出る）。

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(2k^2+1)}{4},\qquad S=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

$k\to\infty$ のとき、$\alpha=\arctan\frac{1}{k}\to 0$ である。A を展開する代わりに、上から評価する（bound）。$[0,\alpha]$ において $r=k(1+\sin\theta)\le 2k$ であるから、A は半径 $2k$、中心角 $\alpha$ の扇形（sector）の内部にあり、$\alpha<\tan\alpha=\frac{1}{k}$ であるから、

$$0<\text{A の面積}\le\tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha<2k.$$

よって $\dfrac{\mathrm{A}}{T}<\dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)}\to 0$ である。B については、小問 (iii) の結果を $T$ で割ると

$$\frac{\mathrm{B}}{T}=\frac{\pi-\alpha}{\pi}-\frac{4\left(k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)}\to 1-0=1,$$

となる。なぜなら $\alpha \to 0$ であり、また $0 < k\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha < k+1$ は $2k^2+1$ に比べて小さいからである。したがって

$$\frac{R}{T} = \frac{\mathrm{A}}{T} + \frac{\mathrm{B}}{T} \to 1.$$

最後に

$$\frac{R}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)} \to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8} = \frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

## 検算

- $\theta = 0$ では $C_2$（$r = k+1$）は $C_1$（$r = k$）の外側にあり、$\theta = \frac{\pi}{2}$ では内側にある（$k < 2k$）。よって両曲線はその間で交わらなければならず、$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ と整合する。
- $k = 2$ のとき：$\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$、$\mathrm{A} \approx 1.4132$、$\mathrm{B} \approx 5.0309$、$T = \frac{9}{4}\pi \approx 7.0686$ であるから、$R/T \approx 0.912$ である。$\frac{1}{2}r^2$ を直接数値積分した結果は、どちらの式とも一致する。
- $k = 50$ のとき、$R/T \approx 0.99987$、$R/S \approx 0.36061$ であり、$\frac{2\pi}{3\pi+8} \approx 0.36059$ に近い。
- 極限についての妥当性の確認：$k$ が非常に大きいとき、$C_2$ はほぼ半径 $k$ の半円（面積 $\frac{1}{2}\pi k^2$）であり、$C_1$ は面積 $\frac{3\pi}{4}+2$ の一定の半カージオイドを $k$ 倍したものである。その比は $\frac{2\pi}{3\pi+8}$ となる。

## よくある間違い

- 極座標の面積公式の係数 $\frac{1}{2}$ を忘れること、あるいは $1+\sin\theta$ の 2 乗を $1+\sin^2\theta$ としてしまうこと。
- 小問 (iv) で、$k^2(1-\cos\alpha)$ が「$\alpha \to 0$ だから 0 に収束する」と論じること。これには $k^2$ が掛かっており、実際には $\frac{1}{2}$ に収束する。重要なのは $T$ と比べたときの大きさだけである。

## STEP のその先へ

極形式で与えられた二つの領域の共通部分の面積は、大学 1 年の多変数微積分（multivariable calculus）で出会う面積分 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ の最初の味見である。そこでも難しいのはつねに領域の記述であり、まさにここと同じである。小問 (iv) の極限の議論（項を正確に計算するのではなく評価する）は、実解析（real analysis）の流儀である。この流儀が丁寧に展開される様子を見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

# STEP III 2023、第 3 問

純粋数学 ・ 3 次方程式の複素数解

**STEP III 2023、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

$a$ を基準に測ると、3 点は $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$、$b$ である。i を掛けるとベクトルは直角だけ回転するので、$a$ は底辺の中点であり、$b$ は対称軸の向きを指す。この図が描ければ、小問 (ii) はヴィエタ（Vieta）の公式（Vieta's formulas）の問題になる。解の和が 0 であることから $b$ が $a$ で表され、その結果 $p^3/q^2$ から $a$ が消える。小問 (iii) と (iv) では、この結果を $x = s^2 > 0$ の 1 変数関数に書き直し、そのグラフからこの値がどこまで小さくなりうるかを読み取る。

## 解答

### 小問 (i)

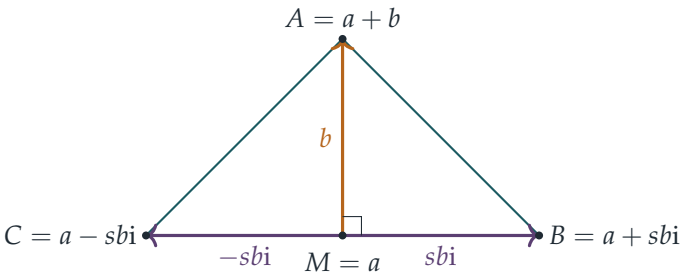
$a + b$ から他の 2 点までの距離は

$$\big|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)\big| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$\big|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)\big| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

であり、これらは等しい。さらに、3 点が本当に三角形をなすことを確かめる必要がある。$a$ を基準にすると、3 点は $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$、$b$ である。最初の 2 点は（$s > 0$ かつ $b \neq 0$ より）相異なり、$a$ を通り $b\mathrm{i}$ の向きをもつ直線上にある。$b\mathrm{i}$ は $b$ を直角だけ回転したものなので、$b \neq 0$ より第 3 の点 $a + b$ はその直線上にない。よって、これらの点は頂点 $a + b$、底辺 $a - sb\mathrm{i}$ から $a + sb\mathrm{i}$、底辺の中点 $a$ をもつ二等辺三角形（isosceles triangle）をなす。

**$a$、$b$、$s$ を復元する**。三角形の頂点を $A$（等しい 2 辺が交わる頂点。正三角形ならどの

頂点でもよい)、他の頂点を $B$、$C$ とし、$BC$ の中点を $M$ とする。




- $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$ とおく。
- $b = A - M$ とおく。$A$ は $BC$ 上にないので、これは o でない。
- $AB = AC$ より、$A$ は $BC$ の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあるので、$MB \perp MA$ である。よって $B - M$ は $b$ を直角だけ回転して拡大・縮小したものであり、ある実数 $\lambda \neq 0$ を用いて $B - M = \lambda b\mathrm{i}$ と書ける。$\lambda < 0$ ならば、ラベル $B$ と $C$ を入れ替えれば $\lambda$ の符号が変わる。このとき $s = \lambda > 0$ は

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{三角形の高さ}}.$$

である。

すると $a + b = A$、$a + sb\mathrm{i} = B$、$a - sb\mathrm{i} = M - (B - M) = C$ となり、求める表示が得られる。

**小問 (ii)**

小問 (i) より、解を $b \neq 0$、$s > 0$ として $a + sb\mathrm{i}$、$a - sb\mathrm{i}$、$a + b$ と表せる。この 3 次式には $z^2$ の項がないので、解の和は o である：

$$3a + b = 0, \qquad \text{よって} b = -3a,$$

また $b \neq 0$ より $a \neq 0$ である。したがって解は

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

である。最初の 2 つの積は $a^2(1 + 9s^2)$、和は $2a$ である。よってヴィエタの公式により

$$p = a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1),$$
$$q = -(\text{解の積}) = -(-2a)\,a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1).$$

ここで $a \neq 0$ より $q \neq 0$ なので、割り算ができる：

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

ただし $s$ は 0 でない（実際には正の）実数であり、これが示すべきことであった。

**小問 (iii)**

$x \neq -\frac{1}{9}$ で定義される $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$ を考える。商の微分法（quotient rule）により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

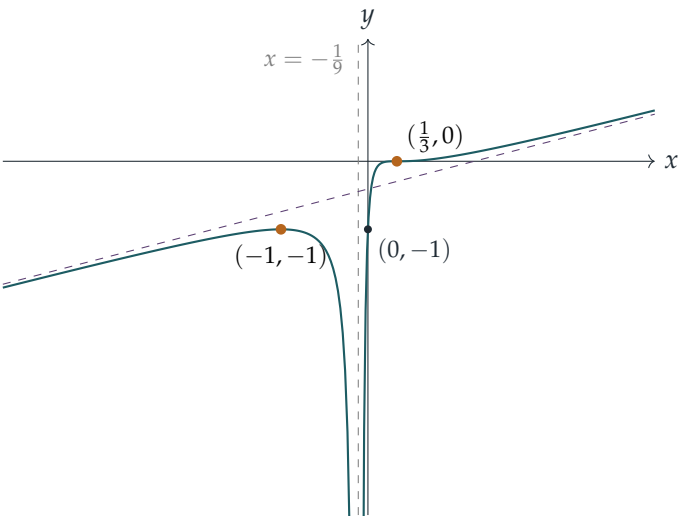
よって停留点（stationary point）は $x = -1$ と $x = \frac{1}{3}$ である。

- $x = -1$ では $y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$ である。$x < -1$ では因数 $x+1$ と $(9x+1)^3$ がともに負なので $y' > 0$ である。$-1 < x < -\frac{1}{9}$ では $(9x+1)^3$ のみが負なので $y' < 0$ である。よって $(-1,-1)$ は**極大点**（local maximum）である。
- $x = \frac{1}{3}$ では $y = 0$ である。その両側（$x > -\frac{1}{9}$ の範囲）では $(3x-1)^2$ 以外の因数はすべて正であり、$x \neq \frac{1}{3}$ では $(3x-1)^2 > 0$ である。よって両側で $y' > 0$ であり、$(\frac{1}{3},0)$ は**停留変曲点**（stationary point of inflection）である。

特に、$x > -\frac{1}{9}$ では 1 点 $x = \frac{1}{3}$ を除いて $y' > 0$ であるから、$y$ はそこで狭義単調増加（strictly increasing）である。

その他の特徴：

- 垂直漸近線（vertical asymptote）$x = -\frac{1}{9}$。ここで分子は $(-\frac{4}{3})^3 < 0$ に、分母は $0^+$ に近づくので、両側から $y \to -\infty$ となる。
- $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ を $81x^2 + 18x + 1$ で割ると商は $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ となるので、$y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ は $x \to \pm\infty$ における斜漸近線（oblique asymptote）である。
- 曲線は座標軸と $(0,-1)$ および $(\frac{1}{3},0)$ で交わる。




破線は斜漸近線 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ である。左側の枝は決して $-1$ より上には出ない。右側の枝は $-\infty$ から増加し、すべての実数値をとる。

**小問 (iv)**

小問 (ii) で得た実数 $s \neq 0$ を用い、$x = s^2$ とおくと

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

である。$s$ は実数なので右辺は実数であり、したがって $p^3/q^2$ も実数である。

**考えてみよう** グラフは $-\infty$ まで下がっているのに、なぜ $p^3/q^2$ はいくらでも小さな負の値にはなれないのだろうか？

それは、$x = s^2$ が任意の実数ではないからである。$s$ は 0 でない実数なので $x > 0$ である。したがって考えるべき $x$ の値は右側の枝の上にあり、（小問 (iii) より）そこでは $y$ は狭義単調増加である。よって $x > 0$ に対して

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

であり、したがって

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

となる。$x = 0$（すなわち $s = 0$）が除外されているので、不等号は等号を含まない。$x = 0$ のときは三角形がつぶれて線分になってしまう。

## 検算

- 正三角形（equilateral triangle）：$z^3 - 1 = 0$ の解は正三角形をなす。このとき $p = 0$ であり、公式は $s^2 = \frac{1}{3}$ のとき、すなわち底辺の半分が高さの $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍であるときにちょうど $p = 0$ を与える。これはまさに正三角形の形である。
- 具体例：$a = 1$、$s = 1$ とすると解は $1 \pm 3\mathrm{i}$ と $-2$ であり、$z^3 + 6z + 20 = 0$ となる。このとき $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$ であり、公式からも $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$ が得られる。
- $s \to 0$ とすると三角形はつぶれて $a$ における重解に近づき、$p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$ となる。$4p^3 + 27q^2 = 0$ はまさに重解（repeated root）をもつための条件である。$s = 10^{-4}$ のとき、値はおよそ $-6.749998$ である。
- 重心（centroid）が原点にあるランダムな二等辺三角形についてコンピュータで確かめたところ、$p^3/q^2$ は常に実数で、$-6.75$ より大きかった。

## よくある間違い

- 小問 (i) で $a$ と $b$ を実数として扱ってしまう。これらは複素数なので、三角形はどんな向きにもなりうる。
- $q$ の符号を間違える。モニック（monic）な 3 次式では、$q$ は解の積に**マイナス**をつけたものである。
- 小問 (iv) でグラフ全体を使ってしまい、$x = s^2 > 0$ であることを忘れる。この条件こそが右側の枝にとどまらせるものである。

## STEP のその先へ

量 $-(4p^3 + 27q^2)$ はこの 3 次式の判別式（discriminant）であり、$p^3/q^2$ は形の不変量（invariant）である。すなわち、解を重心のまわりに回転したり拡大・縮小したりしても値は変わらない（$z$ を $kz$ に置き換えると $p$ は $k^2$ 倍、$q$ は $k^3$ 倍になる）ので、この量は解のなす三角形の**形**だけを記録している。このような不変量は、変数変換のもとで多項式を分類する理論の出発点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は、この問題が求めるように複素数を幾何学的に考えるための見事な案内書である。

解答例

# STEP III 2023、第 4 問

純粋数学 ・ チェビシェフ多項式の係数

**STEP III 2023、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

$\cos\big((2n+1)\theta\big)$ を $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$ の実部（real part）として書き表すと、p は具体的な和の形になり、p の各係数は二項係数（binomial coefficient）の和になる。$\sum\binom{N}{2r}$ や $\sum r\binom{N}{2r}$ のように偶数番目の添字だけを走る和は、$(1+t)^N$（またはその導関数（derivative））に $t=1$ と $t=-1$ を代入して足したり引いたりすれば求められる。そうすると奇数番目の項が打ち消し合うからである。最後の小問では、因数分解（factorisation）の両辺で上位のいくつかの係数を比較する。

## 解答

以下を通して、$c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ と書く。

### 小問 (i)

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）と二項定理（binomial theorem）により、

$$\cos\big((2n+1)\theta\big)+\mathrm{i}\sin\big((2n+1)\theta\big)=(c+\mathrm{i}s)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

$c$ と $s$ は実数であるから、実数となる項はちょうど $k$ が偶数の項であり、それを $0\le r\le n$ として $k=2r$ と書くと、$(\mathrm{i}s)^{2r}=(-1)^r s^{2r}=(-s^2)^r=(c^2-1)^r$ となる。実部をとって、

$$\cos\big((2n+1)\theta\big)=\sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta-1)^r,$$

となり、示すべき式が得られた。

### 小問 (ii)

小問 (i) より、すべての $x = \cos\theta \in [-1,1]$ に対して

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

が成り立つ。両辺はともに多項式（polynomial）であり、無限個の点で値が一致するので、同じ多項式である。

第 $r$ 項は次数（degree）が $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$ で、最高次の係数（leading coefficient）は $\binom{2n+1}{2r}$ である。また定数 1 は $x^{2n+1}$ に影響しない。したがって p における $x^{2n+1}$ の係数は

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

すなわち偶数番目の二項係数の和である。$(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$ に $t=1$ と $t=-1$ を代入すると

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

これらを足すと、$k$ が奇数の項は打ち消し合い、$k$ が偶数の項は 2 倍になる：$2S_0 = 2^{2n+1}$。よって $\mathrm{p}(x)$ における $x^{2n+1}$ の係数は $S_0 = 2^{2n}$ である。

### 小問 (iii)

第 $r$ 項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ において $x^{2n-1}$ を得るには、$(x^2-1)^r$ の $x^{2r-2}$ の項が必要である。その項は $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$ である（$r=0$ のときはこの項は存在しないが、これは $-r=0$ と整合する）。$n \geq 1$ より $2n-1 \geq 1$ であるから、p の定数 1 は関係しない。したがって $x^{2n-1}$ の係数は

$$-\sum_{r=0}^{n} r\binom{2n+1}{2r}.$$

**考えてみよう** 各項に $r$ の重みがついているとき、偶数番目の項だけを取り出すにはどうすればよいだろうか。

微分（differentiation）すると、添字が係数として前に出てくる。$(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$ から、

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k\binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

$t=1$ のとき、これは $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$ を与える。$t=-1$ のときは左辺が 0 になる（$2n \geq 1$ であるから）ので、

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k\binom{2n+1}{k} = \sum_{k\text{ が奇数}} k\binom{2n+1}{k} - \sum_{k\text{ が偶数}} k\binom{2n+1}{k}.$$

よって $k$ が偶数の部分と奇数の部分は等しく、それぞれ全体の半分である：

$$\sum_{k\text{ が偶数}} k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

$k = 2r$ とすると、これは $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-1}$、すなわち $\sum_r r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-2}$ を意味する。よって $\mathrm{p}(x)$ における $x^{2n-1}$ の係数は $-(2n+1)2^{2n-2}$ であり、示すべきことが得られた。

**小問 (iv)**

**最高次の係数。** (ii) より、p は次数 $2n+1$、最高次の係数 $2^{2n}$ の多項式である。q の次数を $m$、最高次の係数を $a$ とすると、$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ は次数 $2m+1$、最高次の係数 $a^2$ である。よって $m = n$ かつ $a^2 = 2^{2n}$ であり、$a > 0$ であるから、q における $x^n$ の係数は $2^n$ である。

**$p$ についてのもう一つの事実。** 各項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ は $x$ の奇数乗のみを含む。$x^{2n+1-2r}$ は奇数乗であり、$(x^2-1)^r$ は偶数乗のみをもつからである。p に現れる偶数乗は定数 1 だけである。$2n \geq 2$ であるから、p における $x^{2n}$ の係数は 0 である。

**係数の比較。** ここで $n \geq 2$ とし、

$$\mathrm{q}(x) = 2^n x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

と書くと、

$$[\mathrm{q}(x)]^2 = 2^{2n}x^{2n} + 2^{n+1}b\,x^{2n-1} + \left(b^2 + 2^{n+1}c\right)x^{2n-2} + \cdots.$$

$x+1$ を掛けると、$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ における $x^{2n}$ と $x^{2n-1}$ の係数はそれぞれ

$$2^{n+1}b + 2^{2n} \qquad \text{および} \qquad \left(b^2 + 2^{n+1}c\right) + 2^{n+1}b.$$

p における $x^{2n}$ の係数は 0 であるから、$b = -2^{2n}/2^{n+1} = -2^{n-1}$ である。すると $b^2 = 2^{2n-2}$、$2^{n+1}b = -2^{2n}$ となり、$x^{2n-1}$ の係数を小問 (iii) の結果と一致させると

$$2^{2n-2} + 2^{n+1}c - 2^{2n} = -(2n+1)2^{2n-2}.$$

整理すると、

$$2^{n+1}c = 2^{2n-2}\big(-(2n+1) - 1 + 4\big) = 2^{2n-2}(2-2n) = 2^{2n-1}(1-n),$$

よって q における $x^{n-2}$ の係数は

$$c = 2^{n-2}(1-n),$$

であり、示すべきことが得られた。

## 検算

- $n = 1$ のとき：$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから、$\mathrm{p}(x) = 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$。最高次の係数は $2^2$、$x$ の係数は $-3 = -3\cdot 2^0$ であり、q の最高次の係数は $2^1$ である。
- $n = 2$ のとき：$\mathrm{p}(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$。$x^3$ の係数は $-20 = -5\cdot 2^2$ であり、q の定数項は $-1 = 2^0(1-2)$ である。
- $n = 3$ のときは $\mathrm{q}(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ が得られ、$x$ の係数は $-4 = 2^1(1-3)$ に等しい。コンピュータによる検証で、$\cos\big((2n+1)\theta\big) + 1$ を厳密に展開し、$\mathrm{p}(x)/(x+1)$ の平方根をとることにより、$n = 1, \ldots, 12$ についてすべての係数の公式が正しいことを確認した。

## よくある間違い

- p の $x^{2n}$ の係数を見落とすこと。これは 0 であり、まさにこのことが q の $x^{n-1}$ の係数 $b$ を決定する。$c$ を求めるにはまず $b$ が必要である。
- $(\mathrm{i}s)^{2r} = s^{2r}$ と書いて符号 $(-1)^r$ を失うこと。この符号があるからこそ、$1 - \cos^2\theta$ ではなく $\cos^2\theta - 1$ が現れるのである。
- (iii) で導関数に $t = 1$ だけを代入すること。これでは偶数の $k$ だけでなく、すべての $k$ にわたる和が得られてしまう。

## STEP のその先へ

$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$ を満たす多項式 $T_N$ は $N$ 次のチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomial）であり、小問 (ii) と (iii) はその上位 2 つの係数を求めている。(iv) の因数分解は、$T_{2n+1}(x) + 1$ が $x = -1$ に単根（simple root）をもち、$\cos\big((2n+1)\theta\big) = -1$ となる他の各点に重根（double root）をもつという事実を反映している。チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）において中心的な役割を果たす。$N$ 次のモニック多項式（monic polynomial）のうち、$[-1, 1]$ 上での最大の大きさが最小となるのは $2^{1-N}T_N$ である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には、この種の問題がさらに収められている。

解答例

# STEP III 2023、第 5 問

純粋数学 • 整数論

> **STEP III 2023、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

各小問では、整数に関する方程式を、因数（factor）が完全にわかっている数（順に 49、$pq$、$3p^2q$）に等しい積（product）の形に書き換える。一方の辺が 2 つの整数の積になれば、各因数の大きさ（どちらが大きいか、どちらが $p$ より小さいか）によって、可能性は 1 つか 2 つの場合にまで絞られる。小問 (iii) で我々が制御する因数は $p+q-n$ であり、証明を求められている不等式こそが、この因数が $p$ や $q$ と共通因数をもつことを防いでいるのである。

## 解答

### 小問 (i)

両辺に $7xy$ を掛けると（2 つの文字はともに 0 でない）、

$$7y + 14x = 2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy - 14x - 7y = 0.$$

となる。$(2x-7)(y-7) = 2xy - 14x - 7y + 49$ であるから、両辺に 49 を加えると、求める式 $(2x-7)(y-7) = 49$ が得られる。

次に、$x$ と $y$ を正の整数とする。このとき $2x-7$ と $y-7$ は積が 49 となる整数なので、49 の因数の組（factor pair）である：

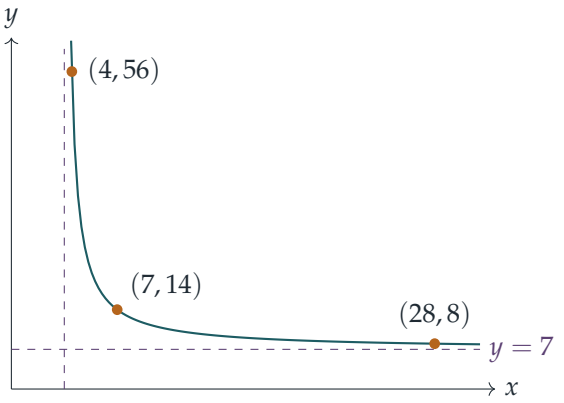
$$(2x-7,\ y-7) \in \{(1,49),\ (7,7),\ (49,1),\ (-1,-49),\ (-7,-7),\ (-49,-1)\}.$$

正であることから負の組は除外される。実際、$x \geq 1$ より $2x-7 \geq -5$、$y \geq 1$ より $y-7 \geq -6$ であるから、どちらの因数も $-7$ や $-49$ にはなりえず、負の組はどれもこ

のいずれかを含む。正の組からは

$$(x, y) = (4, 56), \quad (7, 14), \quad (28, 8),$$

が得られ、いずれも実際にもとの方程式を満たす。たとえば $\frac{1}{4} + \frac{2}{56} = \frac{7}{28} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}$ である。




この曲線は $x = \frac{7}{2}$ と $y = 7$ を漸近線（asymptote）とする直角双曲線（rectangular hyperbola）であり、3 つの解はその正の側の枝の上にある格子点（lattice point）である。

**小問 (ii)**

展開すると $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = n^2 + pq$ となるので、

$$(p+q+n)(p+q-n) = (p+q)^2 - n^2 = pq.$$

右辺は正であり $p+q+n > 0$ であるから、$p+q-n$ は**正の**整数である。$pq$ の正の約数（divisor）は $1, p, q, pq$（$1, p, p^2$ のみ、ただし $p = q$ のとき）であり、$p+q+n$ はそのいずれかである。しかし $n > 0$ より $p+q+n > p$ かつ $p+q+n > q$ であるから、$p+q+n$ は $p$ でも $q$ でもない。残る約数は $pq$ のみである。よって $p+q+n = pq$ であり、もう一方の因数は

$$p+q-n = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad p+q = n+1.$$

である。

$n = p+q-1$ を $p+q+n = pq$ に代入すると $2p+2q-1 = pq$ となり、これを整理すると

$$pq - 2p - 2q + 4 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (p-2)(q-2) = 3.$$

となる。素数は $p-2 \geq 0$ を満たすので、2つの因数はともに0以上であり、積が3であるから $\{p-2, q-2\} = \{1,3\}$ である。したがって

$$(p,q) = (3,5) \quad \text{または} \quad (5,3),$$

であり、実際 $9+15+25 = 49 = 7^2$ で、$n = 7 = 3+5-1$ となっている。

**小問 (iii)**

ここで $n$ は $p^3+q^3+3pq^2$ の正の実数の立方根（cube root）である。

**不等式について。** $p,q > 0$ であるから、

$$n^3 = q^3 + \left(p^3+3pq^2\right) > q^3, \qquad n^3 = p^3 + \left(q^3+3pq^2\right) > p^3,$$

であり、3乗は狭義単調増加（strictly increasing）なので $n > q$ かつ $n > p$ である。これらを整理するとそれぞれ $p+q-n < p$、$p+q-n < q$ となる。下からの評価も必要になる：

$$(p+q)^3 = p^3+3p^2q+3pq^2+q^3 = n^3+3p^2q > n^3,$$

よって $p+q > n$、すなわち $p+q-n > 0$ である。

**素数解は存在しない。** $p$ と $q$ が素数で、$n$ が整数であると仮定する。$d = p+q-n$ とおくと、これは次を満たす整数である：

$$0 < d < p, \qquad 0 < d < q.$$

上の展開より $(p+q)^3 - n^3 = 3p^2q$ であり、3乗の差を因数分解（factorise）すると

$$d\left((p+q)^2 + (p+q)n + n^2\right) = 3p^2q,$$

となるので、$d$ は $3p^2q$ を割り切る。

**考えてみよう** なぜ $d$ は $p$ や $q$ と共通因数をもちえないのか？

$p$ は素数なので、$d$ が $p$ と共通因数をもつのは $p$ が $d$ を割り切るときに限られ、そのためには $d \geq p$ が必要である。しかし $d < p$ である。同様に、$d < q$ より $q$ は $d$ を割り切らない。よって $d$ は $p^2q$ と互いに素（coprime）であり、$d \mid 3p^2q$ から $d \mid 3$ が従う。不等式はまさにこのためにあったのである。したがって $d = 1$ または $d = 3$ である。$s = p+q$ とおく。

**$d = 1$ の場合。** このとき $n = s-1$ であり、

$$3p^2q = s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s + 1,$$

となるが、これはありえない。左辺は 3 の倍数であり、右辺は 3 で割ると 1 余るからである。

**$d = 3$ の場合。**このとき $3 = d < p$ かつ $3 < q$ なので、$p$ も $q$ も 3 ではない。ここで $n = s - 3$ であり、

$$3p^2q = s^3 - (s-3)^3 = 9s^2 - 27s + 27, \qquad \text{よって} \qquad p^2q = 3(s^2 - 3s + 3).$$

ゆえに $3 \mid p^2q$ であり、3 は素数なので $p$ または $q$ を割り切り、どちらかが 3 に等しくなる。これは $p, q > 3$ に矛盾する。

どちらの場合もありえないので、$p^3 + q^3 + 3pq^2$ が整数の 3 乗となるような素数 $p$ と $q$ は存在しない。 ■

## 検算

$x, y < 2000$ を満たすすべての正の整数について総当たりで探索すると、(i) の 3 組がちょうど見つかる。$p, q < 1500$ を満たすすべての素数について、$p^2 + pq + q^2$ が平方数（perfect square）となるのは $\{p, q\} = \{3, 5\}$ のとき（値は 49）のみであり、$p^3 + q^3 + 3pq^2$ が立方数（perfect cube）になることはない。(iii) の $0 < p + q - n < \min(p, q)$ は、ランダムな正の実数で確かめられる。(ii) の手計算による簡単な確認：$(3 + 5 + 7)(3 + 5 - 7) = 15 \times 1 = 15 = pq$。

## よくある間違い

- (i) で 49 の負の因数の組を忘れる。ここでは解を与えないが、無視するのではなく、除外しなければならない。
- (ii) で、$p + q - n$ が小さいほうの因数であり正であることを根拠なく仮定する。どちらも $n > 0$ と $pq > 0$ から従うが、それを述べる必要がある。
- (iii) で $d \mid 3$ で止まってしまう。$d = 1$ と $d = 3$ の 2 つの場合をさらに除外しなければならず、2 つ目では再び $d < p, q$ という事実が必要になる。

## STEP のその先へ

どの小問も同じ技法を用いている。ディオファントス方程式（Diophantine equation）を、素因数分解がわかっている数に等しい整数の積として書き直し、大きさと互いに素であることを用いて因数を確定させるのである。小問 (i) はエジプト式分数（Egyptian fraction）の方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ の仲間であり、小問 (ii) は 120° の角をもつ整数辺の三

角形に関するものである。$p^2 + pq + q^2 = n^2$ はその角に対する余弦定理（cosine rule）にほかならないからである。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、この種の初等整数論（elementary number theory）へのすばらしい入門書である。

解答例

# STEP III 2023、第 6 問

純粋数学 • 双曲線関数と単調性

**STEP III 2023、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

どちらの関数も $\tan^{-1} x$ と $\tanh x$ の定数倍との差であるから、その導関数（derivative）は $\dfrac{1}{1+x^2}$ と $\operatorname{sech}^2 x$ の定数倍との差になる。したがって、すべては $\cosh^2 x$ と $1+x^2$ の比較に帰着する。(i) の不等式（inequality）によって $\mathrm{f}'$ の符号が決まり、比 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ が増加することを示せば、それが $\frac{1}{2}\pi$ に等しくなる回数、すなわち $\mathrm{g}'$ が 0 になる回数が正確にわかる。

## 解答

### 小問 (i)

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$ と $\cosh 2x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$ を用いると、$\mathrm{e}^x$ のマクローリン級数（Maclaurin series）から（奇数次の項は打ち消し合って）

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots.$$

を得る。どの項も非負であるから $\cosh 2x \geq 1+2x^2$ であり、したがって

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1+x^2,$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $x=0$ のときに限る（$x \neq 0$ ならば $x^4$ の項は真に正である）。

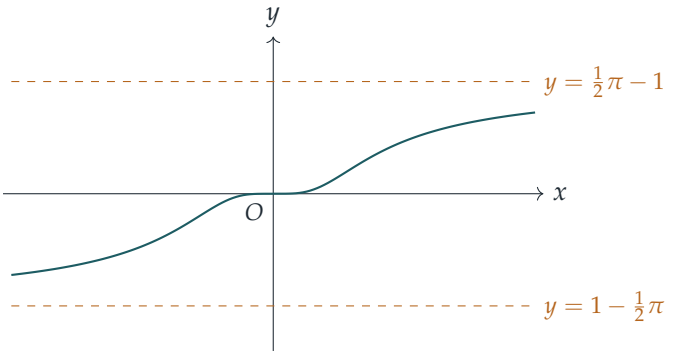
次に微分する。

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$\cosh^2 x \geq 1 + x^2 > 0$ であるから、逆数について $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立ち、すべての $x$ に対して $f'(x) \geq 0$ である。等号は $x = 0$ のときに限る。導関数がただ 1 点を除いて正である関数は（狭義）増加であるから、示すべきことが示された。

**概形。**グラフに書き込むべき特徴をいくつか挙げる。

- f は奇関数（odd function）であり（$\tan^{-1}$ も tanh も奇関数である）、$f(0) = 0$ である。
- $f'(0) = 0$ であるが f は増加関数であるから、原点は停留変曲点（stationary point of inflection）である。実際、$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ および $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$ であるから、0 の近くでは $f(x) \approx \frac{1}{15}x^5$ となり、グラフはそこで非常に平らである。
- $x \to \infty$ のとき $\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$、$\tanh x \to 1$ であるから、$f(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$ であり、下から近づく。奇関数であることから、$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$ である。




**小問 (ii)(a)**

ここでは

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

であり、これは連続な偶関数（even function）である。$x = 0$ では $g'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$ である。$x = 2$ では

$$g'(2) = \tfrac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

であり、$\cosh 2 > \frac{1}{2}e^2 > 3.6$ より $\cosh^2 2 > 12.9$ となるから $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$ である。よって $g'(2) > 0$ である。中間値の定理（intermediate value theorem）により $g'$ は $(0,2)$ に零点をもち、$g'$ は偶関数であるから $(-2,0)$ にももう 1 つ零点をもつ。したがって g は少なくとも 2 つの停留点（stationary point）をもつ。

### 小問 (ii)(b)

$h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$ とおく。すると

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

である。$x \geq 0$ のとき $x\sinh x$ と $x^2\cosh x$ はともに非負（$x > 0$ のときは正）であるから、$h$ は $[0,\infty)$ で増加する。$h(0) = 0$ であるから、$x \geq 0$ に対して $h(x) \geq 0$ であり、実際 $x > 0$ に対して $h(x) > 0$ である。

### 小問 (ii)(c)

商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x\sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\,h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

である。$x \geq 0$ のとき $\cosh x > 0$ であり、(b) より $h(x) \geq 0$ であるから、この導関数は非負であり、0 になるのは $x = 0$ のときだけである。したがって $\cosh^2 x/(1+x^2)$ は $x \geq 0$ で（狭義）増加である。

### 小問 (ii)(d)

**考えてみよう** $\cosh^2 x/(1+x^2)$ についての主張から、どうすれば $\mathrm{g}'$ の零点の個数を数えられるだろうか？

$\mathrm{g}'(x) = 0$ の両辺に正の量 $(1+x^2)\cosh^2 x$ を掛けると

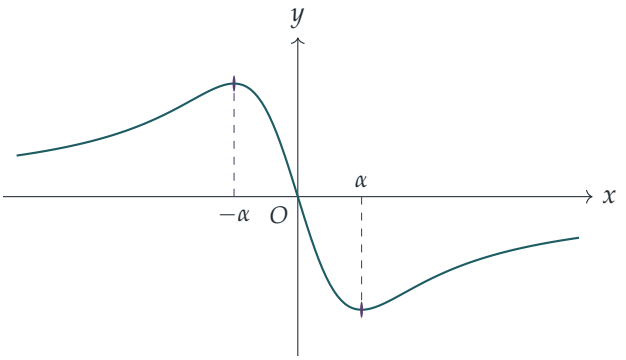
$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

であることがわかる。$R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$ とおく。$[0,\infty)$ 上で $R$ は連続であり、(c) より狭義増加で、$R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$ であるから、そこで値 $\frac{1}{2}\pi$ をとるのは高々 1 回である。(a) より実際にその値をとり、それは $0 < \alpha < 2$ を満たすある $\alpha$ においてである。よって $\mathrm{g}'$ は $[0,\infty)$ にちょうど 1 つの零点をもつ。$R$ は偶関数であるから、$x < 0$ における零点は $x > 0$ における零点の符号を変えたものであり、$-\alpha$ にちょうどもう 1 つ零点がある。したがって g はちょうど 2 つの停留点 $x = \pm\alpha$ をもつ（数値的には $\alpha \approx 1.406$）。

### 小問 (ii)(e)

事実をまとめる。

- g は奇関数であり、$g(0)=0$、$g'(0)=1-\frac{1}{2}\pi<0$ である。
- (d) より、$(-\alpha,\alpha)$ 上では（$R<\frac{1}{2}\pi$ であるから）$g'<0$、$|x|>\alpha$ では $g'>0$ である。よって $x=-\alpha$ で極大、$x=\alpha$ で極小となり、$g(\alpha)=-g(-\alpha)<0$（約 $-0.44$）である。
- $x\to\infty$ のとき $g(x)\to\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\cdot 1=0$ である。g は $(\alpha,\infty)$ 上で極限値 0 に向かって増加するから、そこでは負のままである。すなわち、グラフは $x$ 軸に下から近づく。奇関数であることから、$x\to-\infty$ のとき $g(x)\to 0$ であり、上から近づく。
- したがって g の零点は原点のみであり、$x<0$ では $g>0$、$x>0$ では $g<0$ である。




## 検算

- $x=1$ において $\cosh^2 1\approx 2.381\geq 2$ であり、(i) と整合する。
- $f(30)\approx 0.537$ であり、$\frac{1}{2}\pi-1\approx 0.571$ に下から近づいている。また $f(0.1)\approx 6.6\times 10^{-7}$ であり、$\frac{1}{15}(0.1)^5$ に近い。
- $\cosh^2 x=\frac{1}{2}\pi(1+x^2)$ を数値的に解くと $\alpha\approx 1.406$ となり、(a) の予測どおり $(0,2)$ の内部にあり、$g(\alpha)\approx -0.440$ である。$[-20,20]$ 上で $g'$ を細かく調べると符号の変化はちょうど 2 回であり、$g(20)\approx -0.050$ は小さな負の値で、概形のとおりである。

## よくある間違い

- $\cosh^2 x\geq 1+x^2$ を $\operatorname{sech}^2 x\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ に書き換える必要があることを忘れる。この書き換えは両辺が正であるから正しい。
- (d) で正の解が 1 つあることだけを示し、負の解を数えるために偶関数であること（あるいは $x=0$ が解でないこと）を使うのを忘れる。

- g の概形を $y = 0$ 以外の漸近線（asymptote）をもつように描いたり、$x$ が大きいところで再び軸と交わるように描いたりする。$(\alpha, \infty)$ 上での単調性によって、そうはならないことがわかる。

## STEP のその先へ

(ii) の方法（「$g' = 0$ の解はいくつあるか？」を「単調関数がある値を何回とるか？」に言い換えること）は、解析学者が根の個数を数えるときの基本的な方法である。連続性と中間値の定理から存在が、狭義単調性から一意性が得られる。これらの考え方は大学最初の解析学（analysis）の講義で厳密に扱われる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、それらが丁寧に扱われる様子を見るのに最適な一冊である。

解答例

# STEP III 2023、第 7 問

純粋数学 ・ 積分の不等式

**STEP III 2023、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

連続関数（continuous function）の 2 乗の積分は決して負にならず、0 になるのはその関数が恒等的に 0（identically zero）であるときに限る。各小問では $\int (\text{何か})^2$ を含む等式が与えられ、少し変形すると「完全平方の積分が 0 に等しい」という形になる。小問 (i) は (ii) のための道具を与え、(iii) では部分積分（integration by parts）が同じ役割を果たし、(iv) では平方完成（completing the square）によって自分で平方を見つけ出さなければならない。

## 解答

### 小問 (i)

左辺の積分で $x = u^2$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ である。$x$ が 0 から 1 まで動くとき $u \geq 0$ も同じ範囲を動き、$\sqrt{x} = u$ である。したがって

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

となる。ただし最後に積分変数（dummy variable）の名前を付け替えた。これが求める結果である。

### 小問 (ii)

小問 (i) を $\mathrm{f} = \mathrm{g}$ として用いると、与えられた条件は

$$\int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

となる。次に目標の積分を展開し、$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)-x\big)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

となり、示すべきことが得られた。

**考えてみよう** 積分が 0 であることから、なぜ「ほとんどの点で」ではなく、すべての点で $\mathrm{g}(x)=x$ が導かれるのだろうか。

$\phi(x) = \big(\mathrm{g}(x)-x\big)^2$ とおく。これは（g が連続であるから）連続であり、$\phi(x)\geq 0$ である。ある $c\in[0,1]$ に対して $\phi(c)>0$ であると仮定する。連続性により、$c$ を含み、ある正の長さ $\delta$ をもつ区間 $I\subseteq[0,1]$ が存在して、その上で $\phi(x)>\frac{1}{2}\phi(c)$ となる。それ以外の点でも $\phi\geq 0$ であるから

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

となり、矛盾する。よって $0\leq x\leq 1$ を満たすすべての $x$ に対して $\phi(x)=0$、すなわち $\mathrm{g}(x)=x$ である。（連続性は本当に重要である。ただ 1 点でのみ $x$ と異なる関数でも、積分は 0 になってしまう。）

### 小問 (iii)

$2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$ という項を見ると、部分積分を思い出すはずである。1 の原始関数（antiderivative）として $x$ をとり、$1\cdot\mathrm{h}(x)$ を部分積分すると

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

となる。よって $2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$ であり、条件は

$$\int_0^1 \big(\mathrm{h}'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

となる。これは、g を h′ に置き換えた小問 (ii) の条件（小問 (i) を経由して得た形）そのものである。問題の意図どおり h′ が連続であることを用いて同じ議論を繰り返すと

$$\int_0^1 \big(\mathrm{h}'(x)-x\big)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x)=x \text{（範囲は}0\leq x\leq 1.$$

を得る。積分すると $\mathrm{h}(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ であり、$\mathrm{h}(0)=0$ より $C=0$ である。したがって

$$\mathrm{h}(x)=\tfrac{1}{2}x^2.$$

**小問 (iv)**

まず、条件に $1/a$ が含まれるので $a \neq 0$ であることに注意する。これまでの小問と比べて、交差項が $-2\mathrm{k}(x)$ となるような $\mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{p}(x)\big)^2$ の形の平方を探す。展開すると交差項は $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$ となるので、$\mathrm{p}(x)=\mathrm{e}^{-ax}$ とすればよい：

$$\mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax}\big)^2=\mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)\big)^2-2\mathrm{k}(x)+\mathrm{e}^{-ax}.$$

$[0,1]$ 上で積分し、最初の 2 項には与えられた条件を、最後の項には $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax}\big)^2\,\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4}+\frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}\\&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4}=-\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\Big)^2=-\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

となる。左辺は非負の連続関数の積分であるから $\geq 0$ であり、右辺は $\leq 0$ である。したがって両辺ともに 0 でなければならず、$(a-2)^2=0$、すなわち $a=2$ となる。

$a=2$ のとき、連続で非負の関数 $\mathrm{e}^{2x}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-2x}\big)^2$ の積分が 0 であるから、小問 (ii) の議論により、この関数は $[0,1]$ 上のいたるところで 0 となる。$\mathrm{e}^{2x}>0$ であるから

$$\mathrm{k}(x)=\mathrm{e}^{-2x},\qquad 0\leq x\leq 1.$$

を得る。

## 検算

- 小問 (i) で $\mathrm{f}(x)=x$ とすると、左辺は $\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$、右辺は $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$ である。
- 小問 (iii)：$\mathrm{h}=\frac{1}{2}x^2$ のとき $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ であり、$2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ である。両者は一致する。
- 小問 (iv)：$a=2$、$\mathrm{k}=\mathrm{e}^{-2x}$ のとき、左辺は $\int_0^1\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})\approx 0.43233$、右辺は $(1-\mathrm{e}^{-2})+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$ であり、同じ値である。また、ランダムな $a$ とランダムな多項式 $\mathrm{k}$ に対して、恒等式「左辺 $-$ 右辺 $=\int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}-\mathrm{e}^{-ax})^2+(a-2)^2/(4a^2)$」をコンピュータで確かめたところ、これも一致した。

## よくある間違い

- 連続性と非負性を使わずに、積分が 0 であることから $\mathrm{g}(x)=x$ と結論してしまう。積分が 0 であるというだけでは何もいえない。

- 小問 (iv) で $a \neq 0$ であることを述べ忘れる、あるいは平方完成をする前に k を推測しようとする。

## STEP のその先へ

量 $\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ は「ベクトル」f と g の内積（dot product）のようにふるまい、$\int_0^1 (\mathrm{g}-x)^2\,\mathrm{d}x$ は g と $x$ の距離の 2 乗である。各小問は「この距離が 0 である」と述べており、(iv) の重み $\mathrm{e}^{ax}$ は重み付き内積（weighted inner product）を与える。この見方（内積空間（inner product space）、およびノルム（norm）が 0 の連続関数は 0 であるという事実）は、大学 1 年次の線形代数と解析学の中心にある。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）および Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の理解）を参照するとよい。

解答例

# STEP III 2023、第 8 問

純粋数学 • 区分的な微分方程式

**STEP III 2023、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

絶対値（modulus）によって方程式は非線形（non-linear）になるが、その度合いは穏やかである。$y'$ の符号が一定である区間では、$|y'|$ は単に $y'$ か $-y'$ であり、方程式は通常の定数係数（constant-coefficient）の方程式になる。そこで $y'$ が零になるまで解を追い、そこでもう一方の線形方程式に切り替え、つなぎ目で $y$ と $y'$ を一致させる。小問 (iv) は手間を省く工夫である。解を $x \mapsto c - x$ で反転させると 1 階導関数の項の符号が反転し、これはまさに 2 つの線形方程式の間の切り替えにあたる。

## 解答

**小問 (i)**

$\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ とすると、

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

よって、

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = \big[(x-2) + 2(1-x) + x\big]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

がすべての実数 $x$ について成り立つ。また $\mathrm{f}(0) = 0$ かつ $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$ であり、条件を満たしている。

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ より、$\mathrm{f}'(x)$ の符号は $1 - x$ の符号に等しく、これは $x \leq 1$ で $\geq 0$ である。よって $x \leq 1$ で $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ である。

### 小問 (ii)

$x \leq 1$ では $\mathrm{f}' \geq 0$ なので $|\mathrm{f}'| = \mathrm{f}'$ であり、(ii) の方程式は (i) の方程式と同じになる。したがって f は $x \leq 1$ で新しい方程式とその初期条件（initial conditions）を満たし、

$$\mathrm{g}_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

つなぎ目では $\mathrm{g}_1(1) = \mathrm{e}^{-1}$、$\mathrm{g}_1'(1) = 0$ である。連続微分可能性（continuous differentiability）から、$\mathrm{g}_2$ も同じ値から出発しなければならない：$\mathrm{g}_2(1) = \mathrm{e}^{-1}$、$\mathrm{g}_2'(1) = 0$。

**考えてみよう** $x = 1$ の直後で $y'$ はどちらの符号をとるか？

$x = 1$ において方程式から $y'' = -2|y'| - y = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ となるので、$y'$ は減少しながら 0 を通過し、$x = 1$ を少し越えたところでは負である。そこでは $|y'| = -y'$ となり、方程式は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

特性方程式（auxiliary equation）$m^2 - 2m + 1 = 0$ は重解 $m = 1$ をもつので、$\mathrm{g}_2(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^x$、$\mathrm{g}_2'(x) = (A + B + Bx)\mathrm{e}^x$ である。$x = 1$ における条件から

$$(A + B)\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad (A + 2B)\mathrm{e} = 0,$$

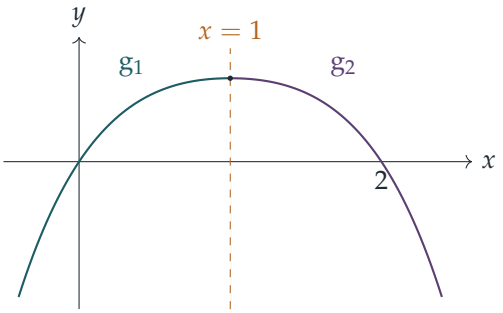
となるので、$B = -\mathrm{e}^{-2}$、$A = 2\mathrm{e}^{-2}$ である。したがって

$$\mathrm{g}_2(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2}.$$

これが仮定 $y' \leq 0$ と矛盾しないことを確かめなければならない：すべての $x \geq 1$ に対して $\mathrm{g}_2'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x-2} \leq 0$ である。よって $x \geq 1$ 全体で $|\mathrm{g}_2'| = -\mathrm{g}_2'$ であり、$\mathrm{g}_2$ は確かに $x \geq 1$ 全体で絶対値を含む方程式を満たす。

### 小問 (iii)

$\mathrm{g}_1$ において $x$ を $2 - x$ に置き換えると $(2 - x)\mathrm{e}^{-(2-x)} = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{g}_2(x)$ となる。よって $\mathrm{g}_2(x) = \mathrm{g}_1(2 - x)$ であり、曲線 $y = \mathrm{g}_2(x)$ は $y = \mathrm{g}_1(x)$ を直線 $x = 1$ に関して対称移動（reflection）したものである。



**小問 (iv)**

$Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$ とおき、$u = c - x$ と書く。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$ であるから、合成関数の微分法（chain rule）により

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

よって

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

であり、$r \le u \le s$ のときは k がそこで元の方程式の解であるから、右辺は零である。ここで $r \le c - x \le s$ は

$$c - s \le x \le c - r,$$

と同値であるから、$y = \mathrm{k}(c-x)$ は区間 $[c-s, c-r]$ で $y'' - py' + qy = 0$ を満たす。

これで (iii) が説明できる：$p = 2$、$q = 1$、$\mathrm{k} = \mathrm{g}_1$（$(-\infty, 1]$ 上）、$c = 2$ とすると、反転した関数 $\mathrm{g}_1(2-x)$ は $[1, \infty)$ で $y'' - 2y' + y = 0$ を満たす。

**小問 (v)**

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ とすると、

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

であるから、$\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ である。（2 つ目の形から、与えられているとおり $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ で $\mathrm{h}' \ge 0$ であること、そして後で必要になる $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$ もわかる。）

方針は小問 (ii) と同じである。$y' \le 0$ である区間では方程式は $y'' - 2y' + 2y = 0$ であり、$y' \ge 0$ である区間では $y'' + 2y' + 2y = 0$ であって、h はこれを満たす。

**(a)** $x = \frac{1}{4}\pi$ において $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$ かつ $y' = 0$ であるから、$y'' = -2y < 0$ となり、$y'$ は負に転じる。したがって $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解が必要であり、$p = q = 2$ とした小問 (iv) がそれを与えてくれる：$y = \mathrm{h}(c-x)$ は $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$ で解となる。$c = \frac{1}{2}\pi$ と選ぶとこの区間はちょうど $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ となり、

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

**考えてみよう** これが単なる一つの解ではなく、求める解であることはどうしてわかるか？

まず、つなぎ目で一致する：$\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$ であり、その導関数 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$ は $x = \frac{1}{4}\pi$ で $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$ に等しい。よってそこで $y$ と $y'$ は連続である。また、仮定

とも矛盾しない：$x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ に対して $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ であり、そこでは $\mathrm{h}' \geq 0$ であるから、$y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \leq 0$ となり、区間全体で $|y'| = -y'$ である。ある点での $y$ と $y'$ の値を与えた線形方程式の解はただ一つであるから、これが求める接続（continuation）である。よって $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ において

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

**(b)** $x = \frac{5}{4}\pi$ において $y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$ であり、$y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$ である。このとき $y'' = -2y > 0$ であるから $y'$ は正に転じ、方程式は $y'' + 2y' + 2y = 0$ に戻る。

この方程式は定数係数であるから、解を平行移動したものもまた解である。$\sin(x - 2\pi) = \sin x$ より、関数 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$ はこの方程式の解である。また $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$ 上ではその引数 $x - 2\pi$ は $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ を動き、そこでは $\mathrm{h}' \geq 0$ であるから、$y' \geq 0$ と矛盾しない。$x = \frac{5}{4}\pi$ でのつなぎ目を確かめると

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

であり、どちらも一致する。よって $\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{9}{4}\pi$ において

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

$x = \frac{9}{4}\pi$ においてこれは $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$ となり、導関数は零である。つまり解は $\frac{1}{4}\pi$ のときと同じ状態に戻るので、$x \geq \frac{1}{4}\pi$ において解は周期 $2\pi$ の周期関数である。

## 検算

- 各部分は構成上なめらかにつながっているが、直接確かめておく価値はある：$x = \frac{5}{4}\pi$ において (a) と (b) はともに $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$ を与え、傾きは零である。
- $y(0) = 0$、$y'(0) = 1$ から絶対値を含む方程式を数値的に前進させて解くと、$[0, 4]$ 上の $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$ と $[0, \frac{9}{4}\pi]$ 上の (v) の 3 つの部分が $10^{-9}$ 以内の誤差で再現される。
- (a) を直接微分すると、$y' = \mathrm{e}^{x-\pi/2}(\cos x - \sin x)$、$y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$ となり、確かに $y'' - 2y' + 2y = 0$ が成り立つ。

## よくある間違い

- 極値点（turning point）を過ぎても $|y'| = y'$ のままにしてしまう：$x = 1$ より先では f 自身は解ではない。

- 新しい部分が区間全体で、仮定した符号の $y'$ を保つことを確かめ忘れる。
- (iv) で区間を $[r, s]$ と答えてしまう。反転によってこの区間は $[c-s, c-r]$ に写される。

## STEP のその先へ

このように、右辺が切り替え面（switching surface。ここでは $y'=0$）を横切るところ以外ではなめらかであるような方程式は、区分的になめらかな系（piecewise-smooth system）あるいは切り替え系（switching system）と呼ばれる。解は線形な部分をつなぎ合わせて構成され、$|y'|$ はリプシッツ連続（Lipschitz）であるから、ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）により解の存在と一意性は依然として成り立つ。(v) における $2\pi$ 周期性は、線形の減衰方程式では決して生じえないものである：$E = \frac{1}{2}y'^2 + y^2$ とおくと $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = -2y'|y'|$ となるので、「減衰」項は $y$ が増加する間はエネルギーを奪い、$y$ が減少する間はそれを戻すのである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は線形の理論と一意性を扱っている。

解答例

# STEP III 2023、第 9 問

力学 ・ 糸でつながれた 2 粒子の運動

**STEP III 2023、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

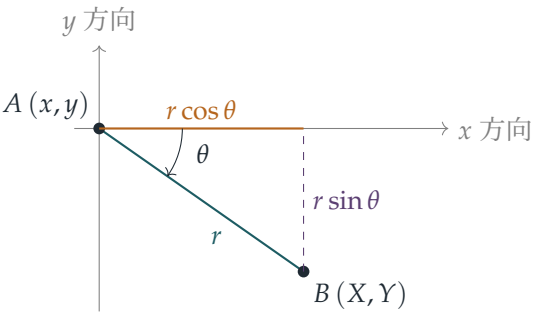
系の状態を、$A$ の位置と糸の向き $\theta$ によって記述する。張力（tension）は糸に沿ってのみはたらくので、各質点の加速度は糸に垂直な成分をもたない。そこで二つの質点の垂直方向の加速度を比較すると、$\ddot{\theta} = 0$ が導かれる。すなわち、糸は一定の割合で回転する。その後は運動量保存（conservation of momentum）を用いれば解き終えられる。

## 解答

以下を通じて、質点はなめらかな水平面上を運動し、糸は軽く伸び縮みしないものとする。また（仮定してよいとおり）糸は常にたるまないので、つねに $AB = r$ である。

### 小問 (i)

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の長さは $r$ である。$\theta$ は $x$ 軸の正の向きから**時計回り**に測るので、図のように $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、このベクトルは $x$ 方向より下を向く。



$A$ から $B$ へ進むとき、$x$ 方向に $r\cos\theta$、$y$ の**負の**向きに $r\sin\theta$ だけ移動するので、

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

$(\cos\theta, -\sin\theta)$ は $x$ 軸から時計回りに角 $\theta$ をなす単位ベクトルであるから、同じ式はすべての $\theta$ について成り立つ。

### 小問 (ii)

$t$ で微分する（$r$ は定数、$\theta$ は $t$ の関数である）と、

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

### 小問 (iii)

張力 $T$ は $A$ を単位ベクトル $(\cos\theta, -\sin\theta)$ の向きに $B$ の方へ引き、$B$ を $(-\cos\theta, \sin\theta)$ の向きに $A$ の方へ引く。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より、

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

したがって

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

であり、まったく同様にして $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$ である。それぞれ $m$ と $M$ で割れば、求める二つの結果が得られる。（幾何学的には、$(\sin\theta, \cos\theta)$ は糸に垂直であり、どちらの質点もその方向には加速しない、ということである。）

**考えてみよう** 「垂直方向の加速度はない」という二つの式が得られた。これらから $\theta$ について何がわかるのだろうか。

第 2 式から第 1 式を引き、$\ddot{X} - \ddot{x}$ と $\ddot{Y} - \ddot{y}$ に小問 (ii) の式を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= \left(-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta + \left(-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

$r \neq 0$ であるから $\ddot{\theta} = 0$ となり、$\dot{\theta}$ は定数である。

この定数を求めるために初期条件（initial conditions）を用いる。$t = 0$ において $B$ は $A$ に対して $(r, 0)$ の位置にあるので、$\theta(0) = 0$ である。また $\dot{y}(0) = u$、$\dot{Y}(0) = 0$ であるから、小問 (ii) の $\dot{Y}$ の式より

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

（$\dot{X}$ の式とも矛盾しない：$0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$。）よってすべての $t$ について $\dot{\theta} = u/r$ であり、$\theta(0) = 0$ のもとで積分すると

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

となり、求める結果が得られた。

**小問 (iv)**

小問 (iii) の運動方程式（equations of motion）を組ごとに足し合わせると、

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

これは運動量保存を表している。張力は系の内力なのである。第 2 式を一度積分すると $m\dot{y} + M\dot{Y}$ は定数であり、その値は初期値 $mu + M\cdot 0 = mu$ に等しい。$y(0) = Y(0) = 0$ のもとでもう一度積分すると、

$$my + MY = mut.$$

**小問 (v)**

小問 (i) の $Y = y - r\sin\theta$ と小問 (iii) の $\theta = ut/r$ を代入すると、

$$my + M\Big(y - r\sin\frac{ut}{r}\Big) = mut \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{m+M}\Big(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\Big),$$

となり、これが求める結果である。

**小問 (vi)**

小問 (v) の結果を微分すると、

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\Big(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\Big) = \frac{u}{m+M}\Big(m + M\cos\frac{ut}{r}\Big).$$

糸が半回転した時刻 $t = \pi r/u$ では $\cos(ut/r) = -1$ であり、

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

となる。これは $M > m$ のとき（$u > 0$ なので）負である。したがってその瞬間、$A$ の速度の $y$ 成分は負であり、連続性（continuity）によりその前後のある時間区間においても負である。

## 検算

- $t = 0$ では、小問 (v) の式から $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$ となり、$A$ の初速度と一致する。

- $x$ 方向に同じ方法を用いると $mx + MX = Mr$ が得られ、$x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$ となる。小問 (v) と合わせると、重心（centre of mass）は $y$ 方向に速さ $mu/(m+M)$ で直線運動し、二つの質点はその周りを角速度（angular speed）$u/r$ で回る、というおなじみの描像になる。このとき張力は定数 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$ であるから、糸は確かにたるまない。
- $M \to \infty$ とすると $B$ は静止したままとなり、小問 (v) から $y = r\sin(ut/r)$ が得られる。すなわち $A$ は $B$ を中心とする半径 $r$ の円を描き、当然の結果となる。
- $m = 1$、$M = 3$、$u = r = 1$ として、二つの質点を非常に硬いばねでつないだ系をコンピュータでシミュレーションすると、$t = \pi$ において $y \approx 0.7854$、$\dot{y} \approx -0.5000$ となり、$\frac{\pi}{4}$ および $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$ と一致した。

## よくある間違い

- 時計回りという約束による符号の誤り。$Y = y - r\sin\theta$ であるから、$\dot{Y}$ には $+$ ではなく $-r\dot{\theta}\cos\theta$ が現れる。
- 定数 $u/r$ の根拠を示し忘れること。これは $A$ の速さだけから出てくるのではなく、$\dot{Y}(0) = 0$ から得られる。
- 小問 (vi) で、具体的な時刻を示さずに「いずれ」$\dot{y} < 0$ となると主張すること。$t = \pi r/u$ とすれば確定した時刻が得られる。

## STEP のその先へ

これは最も単純な形の二体問題（two-body problem）である。運動は、重心の等速運動と、重心に対する相対運動とに分かれ、後者は換算質量（reduced mass）$mM/(m+M)$ によって支配される。同じ分解が惑星の軌道や二原子分子の振動の根底にある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心座標と換算質量を丁寧に展開している。

解答例

# STEP III 2023、第 10 問

力学 ・ 梁のつり合い

**STEP III 2023、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

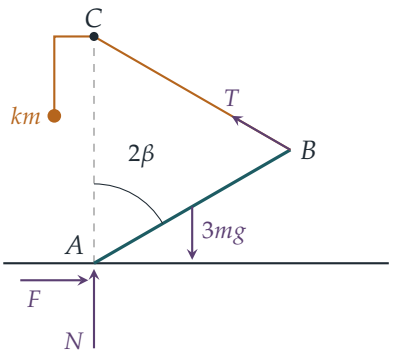
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

滑車（pulley）は $A$ のちょうど梁（beam）の長さだけ真上にあるので、$A$、$B$、$C$ は $AB = AC = 2h$ の二等辺三角形（isosceles triangle）をなす。この幾何学的配置から、糸の向きと、$A$ から糸までの垂直距離がただちに得られる。あとは、釣り合っている棒に対するいつもの手順ですべてが導かれる。すなわち、$A$ のまわりの力のモーメント（moments）をとり（これで未知の接触力が二つとも消える）、力を分解（resolve）し、条件 $F \leq \mu N$ を課すのである。

## 解答

梁を一様な棒（uniform rod）、二つの物体を質点（point mass）、糸をなめらかな滑車にかけられた軽くて伸び縮みしない（inextensible）糸とみなす。したがって張力（tension）は糸全体で等しい。つり下げられた物体は釣り合い（equilibrium）の状態にあるので、張力は $T = kmg$ である。



$A$ を原点とし、$x$ 軸を水平に（$B$ のある側を正の向きに）、$y$ 軸を鉛直上向きにとる。すると $C = (0, 2h)$、$B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$ である。

**糸の向き。** $B$ から $C$ へのベクトルは、$1 - \cos 2\beta = 2\sin^2\beta$ を用いると

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1 - \cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

となる。よって、梁にはたらく張力の水平成分は $-x$ 方向（直線 $AC$ の側へ戻る向き）に $T\cos\beta$、鉛直成分は上向きに $T\sin\beta$ である。幾何学的に見れば、二等辺三角形 $ABC$ の底角は $90^\circ - \beta$ なので、$BC$ は水平と角 $\beta$ をなす。

**モーメントの腕。** $A$ から $BC$ に下ろした垂線は二等辺三角形の頂角 $2\beta$ を二等分するので、その長さは $2h\cos\beta$ である。

### 小問 (i)

**$A$ のまわりのモーメント。** 重力 $3mg$ は $AB$ の中点にはたらき、その点は $A$ から水平距離 $h\sin 2\beta$ のところにある。これと張力のモーメントを釣り合わせると

$$kmg \cdot 2h\cos\beta = 3mg \cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

$0 < 2\beta < 180^\circ$ より $\cos\beta \neq 0$ であるから、これで割ってよく、

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

を得る。（これは $k < 3$ と矛盾しない。）

**力の分解。** 鉛直方向について $N + T\sin\beta = 3mg$ であるから

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

水平方向については、摩擦力（friction）が糸の水平方向の引きと釣り合わなければならないので、摩擦力は $+x$ 方向にはたらき、

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

したがって $F/N = \tan\beta$ である。

**摩擦の条件。** 釣り合いには $F \le \mu N$、すなわち $\tan\beta \le \mu$ が必要である。ここで

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta}.$$

関数 $t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ は $t \ge 0$ で増加し、$0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$ であるから

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2 + 1},$$

となり、示すべき式が得られた。

**小問 (ii)**

今度は $T = 2mg$ であり、追加した質量 $m$ の物体は $A$ から水平距離 $xh\sin 2\beta$ のところにある。糸の幾何学的配置は変わらない。

$A$ のまわりのモーメント：

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

であり、$2mgh\cos\beta \neq 0$ で割ると

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

$0 \leq x \leq 2$ のとき、この値は $\frac{2}{5}$ と $\frac{2}{3}$ の間にあるので、このような $\beta$ は存在する。

力の分解：

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

であるから

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

$\sin\beta = 2/(3+x)$ を代入すると

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$
$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ の因子は約分されて

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

となり、これが求める結果である。

**考えてみよう**　「$x$ の値にかかわらず」という条件を、$\mu$ に関する条件にどう言い換えればよいだろうか？

各 $x$ について $F \leq \mu N$、すなわち $\mu \geq F/N$ が必要である。すべての $x \in [0,2]$ でこれが成り立つためには、$\mu$ がその区間における $F/N$ の**最大値**以上でなければならない。そこで $F^2/N^2$ の最大値を求めたい。

ヒントに従うと

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \geq 0,$$

であり、等号はちょうど $x = 1$ のときに成り立ち、これは許される範囲内にある。よって、すべての $x \in [0,2]$ に対して $F^2/N^2 \leq \frac{1}{3}$ であり、この上界は $x = 1$ で達成され

る。したがって $F/N$ の最大値は $1/\sqrt{3}$ であり、梁がすべての $x$ に対して釣り合いうるための必要十分条件は $\mu \geq 1/\sqrt{3}$ である。求める最小値は

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

## 検算

- 小問 (i) で、梁が水平になる場合 $2\beta = 90^\circ$ を考える。このとき $B = (2h, 0)$ で、糸 $BC$ は $45^\circ$ の傾きをもち、$A$ からの距離は $\sqrt{2}\,h$ である。モーメントより $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$、よって $T = 3mg/\sqrt{2}$ となり、$k = 3\sin 45^\circ$ と一致する。また $N = F = \frac{3}{2}mg$ なので $F/N = 1 = \tan 45^\circ$ である。
- 小問 (ii) で $x = 0$ のとき、公式は $5/16$ を与える。直接計算しても $\sin\beta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\beta = \frac{5}{9}$、$(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$ より、やはり $\frac{5}{16}$ となる。
- $x = 1$ のとき：$\sin\beta = \frac{1}{2}$ なので $\beta = 30^\circ$ であり、梁は鉛直と $60^\circ$ をなす。$F/N = \cos 30^\circ / (2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$ である。$[0, 2]$ にわたる $x$ についてモーメントと分解した力をコンピュータで検証し、公式とこの最大値を確認した。

## よくある間違い

- 糸が鉛直方向ではなく $BC$ に沿って引くことを忘れる。滑車は $C$ にあるので張力には水平成分があり、摩擦力が抵抗しなければならないのはまさにこの成分である。
- $0 \leq x \leq 2$ における $F/N$ の最大値ではなく、最小値（あるいは端点での値）をとってしまう。最悪の場合は区間の内部、$x = 1$ で起こる。
- モーメントの腕を取り違える。重力の腕は水平距離（$h\sin 2\beta$）であるのに対し、張力の腕は $BC$ までの垂直距離（$2h\cos\beta$）である。

## STEP のその先へ

モーメントをとることと力を分解することは、剛体（rigid body）の釣り合い条件、すなわち合力が 0 であることと合トルク（torque）が 0 であることの二つの半分にあたる。大学ではこれらはベクトルの式 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ と $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ になり、小問 (ii) の「パラメータについての最悪の場合」を考える推論は、技術者が安全余裕を見込んで設計する方法の一端を味わわせてくれる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、静力学（statics）とトルクをこのベクトルの言葉で丁寧に展開している。

解答例

# STEP III 2023、第 11 問

確率・統計 ・ 条件付き期待値

**STEP III 2023、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

冒頭の級数は、$k+1=k+1$ と書いて $k$ を $k!$ と約分すれば、よく知られた二つの指数級数（exponential series）に分かれる。小問 (i) では、$D$ の分布（distribution）に $D=d$ を生じうる $Y$ のすべての値にわたる和が現れる。二重和（double sum）の順序を入れ替えると、内側の和は易しい $1+2+\cdots+k$ となり、そこに現れる因子 $\frac{1}{2}(k+1)$ はまさに冒頭の級数で処理できる形である。小問 (ii) は、さいころの目で条件付け（conditioning）をすれば済む。

## 解答

### 級数

$k\geq 1$ のとき $\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$ であるから、分子を分けると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\\ &= x\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1\right)\\ &= xe^x+e^x-1=(x+1)e^x-1,\end{aligned}$$

となる。ただし、第一の和では $j=k-1$ とおいた。どちらの級数もすべての実数 $x$ に対して収束（converge）するので、このように分けてよい。これが求める恒等式である。

**小問 (i)(a)**

$D = 0$ となるのは $Y = 0$ のときに限る（$Y = k \geq 1$ ならば、さいころの目は 1 以上である）。よって

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-n}.$$

**小問 (i)(b)**

$d \geq 1$ を固定する。さいころが $d$ の目を出しうるのは、さいころの面が $d$ 個以上あるとき、すなわち $k \geq d$ として $Y = k$ のときに限る。また $Y = k \geq d$ のもとで、公平なさいころが $d$ を出す確率は $\frac{1}{k}$ である。全確率の公式（law of total probability）により

$$\mathrm{P}(D = d) = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{P}(D = d \mid Y = k)\,\mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

定義より期待値（expectation）は $\mathrm{E}(D) = \sum_{d=0}^{\infty} d\,\mathrm{P}(D = d)$ であり、$d = 0$ の項は 0 であるから

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=1}^{\infty} \left[ d \sum_{k=d}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \right) \right],$$

となり、求める形が得られる。

> **考えてみよう** 外側が $d$ についての和、内側が $k \geq d$ についての和であるものを、外側が $k$ についての和になるように書き換えるにはどうすればよいか。

この二重和は、$1 \leq d \leq k$ を満たす整数の組 $(d, k)$ すべてにわたる。各項 $\frac{d}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ はすべて非負であるから、和をとる順序を変えても総和は変わらない。$d$ ごとではなく $k$ ごとにまとめると、各 $k \geq 1$ に対して $d$ は 1 から $k$ まで動く。したがって

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \sum_{d=1}^{k} d \right),$$

となり、これが求める第二の形である。

**小問 (i)(c)**

$\sum_{d=1}^{k} d = \frac{1}{2}k(k+1)$ を用いると、因子 $\frac{1}{k}$ が約分されて

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} n^k \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\left( (n+1)\mathrm{e}^{n} - 1 \right) = \tfrac{1}{2}\left( n + 1 - \mathrm{e}^{-n} \right), \end{aligned}$$

となる。ここで冒頭の恒等式を $x = n$ として用いた。これが求める結果である。

### 小問 (ii)(a)

$n$ 面のさいころの目を $K$ とすると、$k = 1, \ldots, n$ に対して $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$ であり、$K = k$ のもとでは $Z = X_k$ で、これは平均 $k$ のポアソン分布（Poisson distribution）に従う。よって $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$ であり、全確率の公式により

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

これは初項 $\mathrm{e}^{-1}$、公比 $\mathrm{e}^{-1}$ の等比級数（geometric series）であるから

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

となる。最後は分子と分母に e を掛けた。

### 小問 (ii)(b)

再びさいころの目で条件付けると、$\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$ であるから

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

小問 (i)(c) と比べると

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

であるから、求めるとおり $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$ である。

興味深いことに、0 の場合がなければ両者は一致する。面の数がポアソン分布に従う個数 $Y$ である公平なさいころの目は平均して $\frac{1}{2}(Y+1)$ であり、その平均は $\frac{1}{2}(n+1)$ である。差が生じるのは、$Y = 0$ のとき、式 $\frac{1}{2}(Y+1)$ が与える $\frac{1}{2}$ ではなく $D = 0$ となる点だけであり、これは確率 $\mathrm{e}^{-n}$ で起こるので、ちょうど $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$ だけ小さくなる。

## 検算

- $x = 0$ のとき、冒頭の恒等式は $0 = 1 \cdot 1 - 1$ となる。$x = 1$ のときは $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$ となり、部分和を計算するとこれが確かめられる。
- $n = 3$ のとき、$\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$、$\mathrm{E}(Z) = 2$、$\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$ である。それぞれの試行を 200 000 回行うコンピュータシミュレーションでは、1.970、2.002、0.185 が得られた。
- $n = 1$ のとき、小問 (ii) のさいころは常に 1 を出すので $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$ である。公式からも $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$ が得られる。

## よくある間違い

- (i)(b) の内側の和を $k = d$ ではなく $k = 1$ から始めてしまう。$k$ 面のさいころが $k$ より大きい目を出すことはない。
- 冒頭の恒等式の $-1$ を忘れる。これは $\mathrm{e}^x$ の $k = 0$ の項が欠けていることから生じるもので、(i)(c) の $\mathrm{e}^{-n}$ の出どころである。

## STEP のその先へ

どちらの小問も、塔の法則（tower law）$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$ の例である。小問 (i) では、この法則により一行で $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$ が得られ、私たちが手で行った和の順序の入れ替えこそ、この法則の中に隠れている部分である。非負の項からなる二重級数を自由に並べ替えてよいことは一つの定理（一般の形ではトネリ（Tonelli）の定理）であり、大学一年次の解析学で学ぶ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値（conditional expectation）と、それを用いて構成される複合分布を扱っている。

解答例

# STEP III 2023、第 12 問

確率・統計　・　組合せ論的確率

**STEP III 2023、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

ペアになっている 2 枚の靴下は見た目こそ同じであるが、選び方は $2n$ 枚の**物理的な**靴下から $2k$ 枚を一様ランダム（uniformly random）に選んだ集合である。そこで、すべての靴下に番号を付け、集合を数えることにする。あとはすべて、選び方を段階的に組み立てる問題になる。まず、どのペアが完全にそろって現れるかを選び、次に、ほかのどのペアから 1 枚だけが選ばれるかを選び、最後に、そうした各ペアのどちらの靴下が選ばれるかを選ぶ。小問 (iii) はおなじみの技法 $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$ であり、これによって重み付きの和が確率の和に変わる。

## 解答

$2n$ 枚の靴下がすべて区別できるように番号を付ける。選び方は $\binom{2n}{2k}$ 通りあり、どれも同様に確からしい。以下の確率はすべて（条件を満たす選び方の数）$/\binom{2n}{2k}$ である。

### 小問 (i)

完全なペアを 1 組も含まない選び方では、各ペアから高々 1 枚しか選ばれないので、$2k$ 枚の靴下は $2k$ 個の異なるペアから来ている。このような選び方を作るには、靴下が選ばれる $2k$ 個のペアを $\binom{n}{2k}$ 通りで選び（$2k \le n$ なので可能である）、次にそれぞれのペアから 2 枚のうち 1 枚を $2^{2k}$ 通りで選べばよい。このような選択ごとに異なる集合が得られ、ペアを含まない集合はすべてこの方法で得られるから、

$$\mathrm{P}(\text{ペアなし}) = \frac{\binom{n}{2k}\,2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}.$$

**小問 (ii)**

$0 \le r \le k$ を満たす $r$ を固定する。完全なペアをちょうど $r$ 組含む選び方は、次のものからなる。

- 丸ごと選ばれた $r$ 組のペア（$2r$ 枚の靴下）
- それ以外の $2k - 2r = 2(k-r)$ 枚の靴下。これらはすべて異なるペアから来ており（そうでなければペアが $r$ 組より多くなる）、すでに使った $r$ 組のペアからは 1 枚も来ていない。

したがって、完全なペア $r$ 組を $\binom{n}{r}$ 通りで選び、残りの $n-r$ 組のペアから 1 枚ずつ靴下を出す $2(k-r)$ 組のペアを $\binom{n-r}{2(k-r)}$ 通りで選び、さらにそれぞれから靴下を 1 枚ずつ $2^{2(k-r)}$ 通りで選ぶ。この場合も、ペアをちょうど $r$ 組含む集合はそれぞれちょうど 1 回ずつ得られるので、

$$\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{\binom{n}{r}\binom{n-r}{2(k-r)}\, 2^{2(k-r)}}{\binom{2n}{2k}},$$

となり、示すべき式が得られた。（$r = 0$ のとき、これは再び小問 (i) の結果である。）

**小問 (iii)**

$1 \le r \le k$ とする。

$$r\binom{n}{r} = \frac{r \cdot n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1},$$

であるから、小問 (ii) より

$$r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{n\binom{n-1}{r-1}\binom{n-r}{2(k-r)}\, 2^{2(k-r)}}{\binom{2n}{2k}}.$$

ここで、ペアが $n-1$ 組、取り出す靴下が $2(k-1)$ 枚、見つかるペアが $r-1$ 組の場合に小問 (ii) を適用する。$2k \le n$ から $2(k-1) \le n-1$ が従い、また $0 \le r-1 \le k-1$ であるから、これは許される。$(n-1)-(r-1) = n-r$ かつ $(k-1)-(r-1) = k-r$ であるから、

$$\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1) = \frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{n-r}{2(k-r)}\, 2^{2(k-r)}}{\binom{2n-2}{2k-2}}.$$

分子は因子 $n$ を除いて一致するので、

$$\begin{aligned}\frac{r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r)}{\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1)} &= \frac{n\binom{2n-2}{2k-2}}{\binom{2n}{2k}} = n \cdot \frac{(2n-2)!}{(2k-2)!\,(2n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{(2n)!} \\ &= n \cdot \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)} = \frac{k(2k-1)}{2n-1}.\end{aligned}$$

(割り算をしても問題はない。$n-r \geq 2k-r \geq 2(k-r)$ であるから、ここに現れる二項係数（binomial coefficient）はすべて正である。）分母を払えば、示すべき結果が得られる。

**考えてみよう** この等式は $\mathrm{E}(X_{n,k})$ を求めるのにどう役立つか。

期待値（expectation）はちょうど左辺の和であり、右辺を足し合わせると一つの確率分布（probability distribution）全体の和になる。期待値の $r=0$ の項は 0 であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_{n,k}) = \sum_{r=1}^{k} r\,\mathrm{P}(X_{n,k}=r) &= \frac{k(2k-1)}{2n-1}\sum_{r=1}^{k}\mathrm{P}(X_{n-1,k-1}=r-1)\\ &= \frac{k(2k-1)}{2n-1}\sum_{s=0}^{k-1}\mathrm{P}(X_{n-1,k-1}=s).\end{aligned}$$

確率変数 $X_{n-1,k-1}$ は $2(k-1)$ 枚の靴下の中のペアの数を数えるので、値 $0,1,\ldots,k-1$ しかとらず、最後の和は 1 である。よって

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{k(2k-1)}{2n-1}.$$

## 検算

- $k=1$（靴下 2 枚）のとき、答えは $\frac{1}{2n-1}$ である。最初にどの靴下が出ても、残りの $2n-1$ 枚のうちちょうど 1 枚がその相方である。
- 指示変数（indicator variable）を使えば平均が直接求まる。ペア $i$ がそろう確率は $\binom{2n-2}{2k-2}/\binom{2n}{2k} = \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)}$ であり、これにペアの数 $n$ を掛けると、やはり $\frac{k(2k-1)}{2n-1}$ が得られる。
- $n=6, k=3$ のとき、小問 (i) から $\frac{64}{924} = \frac{16}{231}$ が得られ、平均は $\frac{15}{11}$ である。$n \leq 8$ のすべての場合について、コンピュータですべての選び方を列挙し、(ii) の分布、(iii) の等式、および平均が正しいことを確認した。

## よくある間違い

- ペアの靴下を本当に区別できないものとみなし、「色のパターン」を数えてしまう。それらは同様に確からしくないので、番号を付けた靴下について数えなければならない。
- 1 枚だけ選ばれた各ペアについて、どちらの靴下が選ばれたかを表す因子 $2^{2(k-r)}$ を忘れる。
- (iii) で $\sum_s \mathrm{P}(X_{n-1,k-1}=s)=1$ に気づかず、和を力ずくで計算しようとする。

## STEP のその先へ

2 つ目の検算は、指示変数を用いた期待値の線形性（linearity of expectation）であり、分布をまったく知らなくても平均が求まる。事象「ペア $i$ がそろう」どうしが独立でなくても、この方法は成り立つ。(iii) の等式はサイズバイアス（size-biasing）の関係式である。分布を $r$ で重み付けすると、より小さな問題の分布をずらしたものが得られる。この手法を使えば、二項分布（binomial distribution）や超幾何分布（hypergeometric distribution）の平均も求められる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）では、このような指示変数やストーリー証明が全編にわたって用いられている。

# Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

**2023 年解答例.** 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

**beyondstep.keithmcnulty.org**

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

