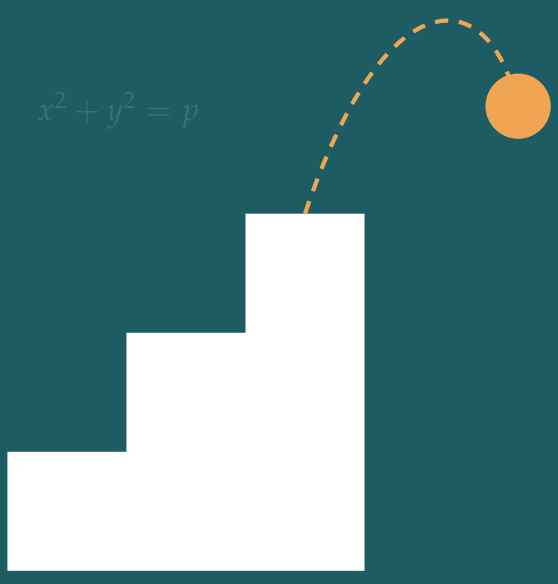
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP II と III

2022 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP II と III

2022 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2022 年解答例

2022 年の STEP 問題（STEP II と III）の全 24 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP II

Q1 部分積分 純粋数学 . . . 3
Q2 漸化式 純粋数学 . . . 8
Q3 フィボナッチ級数と小数 純粋数学 . . . 12
Q4 絶対値関数 純粋数学 . . . 17
Q5 三角形における不等式 純粋数学 . . . 22
Q6 直交軌道 純粋数学 . . . 27
Q7 複素多項式の根 純粋数学 . . . 32
Q8 行列の不変直線 純粋数学 . . . 36
Q9 摩擦とモーメント 力学 . . . 41
Q10 斜面上の放物運動 力学 . . . 45
Q11 期待損失の最適化 確率・統計 . . . 50
Q12 平均値・中央値・最頻値 確率・統計 . . . 55

STEP III

Q1 多項式の根 純粋数学 . . . 59
Q2 無限降下法 純粋数学 . . . 64
Q3 陰関数の微分 純粋数学 . . . 69
Q4 無限積 純粋数学 . . . 74
Q5 対称な定積分 純粋数学 . . . 79
Q6 転がる円と接線 純粋数学 . . . 83
Q7 外積による変換 純粋数学 . . . 88
Q8 ド・モアブルの定理と無理性 純粋数学 . . . 92
Q9 衝突と反発係数 力学 . . . 96
Q10 ばねのつり合い 力学 . . . 101

Q11 二項分布の平均偏差 確率・統計 105
Q12 円内のランダムな弦 確率・統計 109

解答例

STEP II 2022、第 1 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 2022、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの小問も、ただ一つの手筋に基づいている。部分積分（integration by parts）を行うと第二の積分が現れ、それがすでに手元にある項と打ち消し合う、あるいはほぼ打ち消し合うのである。(i) と (ii) では、被積分関数（integrand）が積の導関数になっていることを見抜くことがそれにあたる。(iii) では同じ手筋により、二つの積分の差が両端における e^x/x の値の変化にすぎないことがわかり、残りの仕事は (a) のグラフがやってくれる。

解答

小問 (i)

第 1 項を部分積分する。$u = \sqrt{1+x^3}$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$ とおくと、$v = x$、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ であるから

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3} - 2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x\sqrt{1+x^3} - \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最後の積分はちょうど被積分関数の第 2 項であるから、それを加えると打ち消される：

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{1+x^3} + c.$$

$2x\sqrt{1+x^3}$ を積の微分法（product rule）で微分すると $2\sqrt{1+x^3} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$ に戻り、これで確かめられる。

小問 (ii)

被積分関数を $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$ と分ける。どちらの項も単独では初等的な原始関数（antiderivative）をもたない（第 1 項は有名な Si の被積分関数である）。したがって (i) と同様に、両者が組み合わさるはずである。第 2 項を部分積分する。$u = \sin x$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x^{-3}$ とおくと $v = -x^{-2}$ であるから

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

次に $\dfrac{\cos x}{x^2}$ を、$u = \cos x$、$v = -x^{-1}$ として部分積分する：

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ は第 1 項と打ち消し合い、次が残る：

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + c = -\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + c.$$

検算として、$-\dfrac{\sin x}{x^2}$ を微分すると $-\dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$、$-\dfrac{\cos x}{x}$ を微分すると $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x^2}$ となる。$\cos x/x^2$ の項は打ち消し合い、和は被積分関数に一致する。

小問 (iii)(a)

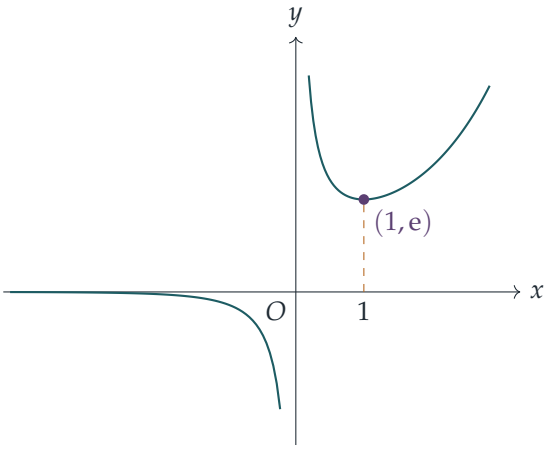
$x \neq 0$ で定義された $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ を考える。商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

これが 0 となるのは $x = 1$ のときに限るから、停留点（stationary point）は $(1, \mathrm{e})$ のみである。導関数は $x < 1$ $(x \neq 0)$ で負、$x > 1$ で正であるから、$(1, \mathrm{e})$ は極小点（minimum）である。

グラフのその他の形状は次のとおりである。

- $x < 0$ では $y < 0$ であり、y は減少する。$x \to -\infty$ のとき $y \to 0^-$ である（指数関数が勝つ）から、x 軸の負の部分が漸近線（asymptote）となる。$x \to 0^-$ のとき $y \to -\infty$ である。
- $x > 0$ では $y > 0$ である。$x \to 0^+$ のとき $y \to +\infty$ であり、y は $x = 1$ で最小値 e まで減少したのち、どの多項式よりも速く $+\infty$ へ増加する。
- y 軸は垂直な漸近線であり、曲線はどちらの軸とも交わらない。



小問 (iii)(b)

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ を、$u = \mathrm{e}^x$、$v = -x^{-1}$ として部分積分する：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{よって} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

（同じことであるが、$\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ は (a) で求めた導関数である。）

考えてみよう そもそも a から $2a$ まで積分してよいのだろうか？

どちらの被積分関数も $x = 0$ で発散し、0 の近くでは e^x/x^2 の積分が発散する（diverge）ので、積分区間は 0 を避けなければならない。そのためには $a \neq 0$ が必要である。このとき a と $2a$ は同符号であるから、0 がその間に入ることはなく、積分は有限である。

二つの積分が等しいのは、その差が 0 となるとき、かつそのときに限る：

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}(\mathrm{e}^a - 2) = 0.$$

$\mathrm{e}^a/(2a) \neq 0$ であるから $\mathrm{e}^a = 2$ が必要であり、

$$a = \ln 2.$$

小問 (iii)(c)

(b) とまったく同様に、整数 $m \neq n$ に対して二つの積分が有限となりうるのは、m と n の間の閉区間に 0 が含まれないときに限る。よって m と n は 0 でなく、同符号である。二つの積分の差は

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

であるから、$f(x) = \mathrm{e}^x/x$ が同じ値をとるような、同符号の相異なる二つの整数が必要となる。言い換えれば、ある水平な直線が (a) のグラフと、x が整数である二点で交わらなければならない。

考えてみよう $x > 0$ の部分の曲線は、下がってからまた上がるので一対一（one-to-one）ではない。それなのに、なぜ二つの正の整数が同じ高さを与えることはありえないのだろうか？

それは、極値点（turning point）が $x = 1$ にあり、これ自体が最小の正の整数だからである。場合ごとに順に調べる。

- **両方とも負の場合。** (a) より f は $x < 0$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、$m \neq n$ ならば $f(m) \neq f(n)$ である。
- **両方とも正の場合。** このとき $m, n \geq 1$ であり、$x > 1$ で $f'(x) > 0$ であるから、f は $[1, \infty)$ で狭義単調増加である。やはり $m \neq n$ ならば $f(m) \neq f(n)$ である。

水平な直線が正の側の枝と 2 回交わることはありうるが、その場合、交点の一方は $0 < x < 1$ にあり、そこには整数がない。したがって、条件を満たす相異なる整数の組は存在せず、題意のとおり不可能である。

検算

- (i) について、$x = 1$ における原始関数の値は $2\sqrt{2}$ であり、区間 $[0, 1]$ での積分の数値は 2.8284… で、一致する。
- (ii) について、区間 $[1, 10]$ での積分の数値は 1.4711… であり、$-(\sin x + x\cos x)/x^2$ の値の変化と同じである。
- (iii)(b) について、$a = \ln 2$ のとき二つの積分はどちらも約 1.9224 となる。また $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2\ln 2)$ であることにも注意しよう。二つの端点は極小点の両側で同じ高さにあり、グラフから予想されるとおりである。
- (iii)(c) について、二つの整数で値が最も近くなるのは $f(1) = \mathrm{e} \approx 2.718$ と $f(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.695$ である。

よくある間違い

- (b) と (c) で、0 を含む区間では積分が意味をもたなくなることを忘れ、そのために m と n が同符号でなければならない理由を見落とす。
- (c) で、制限をつけずに「f は一対一である」と論じる。実際には一対一ではない

（たとえば $f(\ln 2) = f(2\ln 2)$）。議論には $x = 1$ にある極値点が必要である。

STEP のその先へ

小問 (i) と (ii) は、被積分関数のどちらの項も初等的な原始関数をもたないのに、その和はもつという例である。微分代数（differential algebra）におけるリウヴィル（Liouville）の定理は、どのような関数が初等的な原始関数をもつかを厳密に定める。e^x/x、$\sin x/x$、$\sqrt{1+x^3}$ はもたず、それゆえに打ち消し合いが本質的なのである。小問 (iii)(c) は単射性（injectivity）の議論であり、解析学の講義では、単調性（monotonicity）や平均値の定理（mean value theorem）に関するこうした推論が厳密に扱われる。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

解答例

STEP II 2022、第 2 問

純粋数学 • 漸化式

> **STEP II 2022、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

関係式の両辺に 2 を掛けると、これは**二階差分**（second differences）$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ についての主張になる。(i) ではこれが 0 なので、一階差分は一定であり、数列は一次式で表される。(ii) と (iii) では二階差分が与えられた定数、あるいは n の与えられた一次関数であるから、ちょうどその二階差分をもつ多項式（polynomial）を引き去ればよい。すると (i) の型の数列が残る。

解答

小問 (i)

関係式を 2 倍して整理すると、すべての $n \geq 1$ に対して

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

よって各差はその直前の差に等しく、帰納法（induction）により、すべての差は最初の差 $d = u_2 - u_1$ に等しい。これが隣り合う項の間の一定の差である。

これらの差を $n - 1$ 個足し合わせると

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

となる。これは n の多項式であり、その次数（degree）は $d \neq 0$ ならば 1、$d = 0$ ならば 0（定数）である。いずれにせよ次数は高々 1 である。

小問 (ii)

$v_n = t_n + pn^2$ とおく。

$$\tfrac{1}{2}\big(p(n+2)^2 + pn^2\big) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

であるから、v_n についての関係式は

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

となる。すなわち、すべての $n \geq 1$ に対して $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$ である。小問 (i) より、ある定数 A と B を用いて $t_n = A + Bn$ と書けるので

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

$p \neq 0$ であるから n^2 の項は消えずに残り、v_n の次数はちょうど 2 である。

$v_1 = v_2 = 0$ より

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

辺々引くと $3p + B = 0$ となるので $B = -3p$、そして $A = 2p$ である。したがって

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

小問 (iii)

今回は置き換えが示されていないので、自分で見つけなければならない。関係式を 2 倍すると

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

考えてみよう 二階差分が n の一次式になるのは、n のどのような多項式か。

差分をとるたびに多項式の次数は 1 つ下がるので、三次式が必要である。$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$ と書く。直接展開すると

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

よって $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$ であり、これがすべての n について $2an + 2b$ に等しくなるのは

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

のときである。そこで $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$ とおく。Δ^2 は線形であるから $\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an+b)$ であり、関係式は $\Delta^2 t_n = 0$ となる。これはまさに小問 (i) の関係式である。よって $t_n = A + Bn$ であり

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

$a \neq 0$ であるから三次の項が存在し、w_n の次数は 3 である。

$w_1 = w_2 = 0$ より

$$\frac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\frac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

第 2 式から第 1 式を引くと $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$ となるので $B = \frac{2a}{3} - 3b$ であり、さらに第 1 式から $A = 2b$ を得る。したがって

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \left(\frac{2a}{3} - 3b\right)n + 2b.$$

$w_1 = w_2 = 0$ であるから因数 $n-1$ と $n-2$ が現れるはずであり、n^3 の項と定数項を比較すると、より簡潔な形

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

が得られる（$(n-1)(n-2)(an+3b)$ を展開すると $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$ となり、一致する）。

検算

- (iii) で $a = 0$、$b = p$ とおけば (ii) が再現されるはずであり、実際そうなる：$(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$。
- 漸化式（recurrence）を直接計算してみる。$a = 3$、$b = 0$ のとき $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$ であるから、$w_1 = w_2 = 0$ から $w_3 = 6$、$w_4 = 24$、$w_5 = 60$ を得る。公式は $(n-1)(n-2)n$ を与え、これは $6, 24, 60$ である。
- 次数 3 の数列は三階差分が一定である。$0, 0, 6, 24, 60$ について差分は $0, 6, 18, 36$、次に $6, 12, 18$、さらに $6, 6$ となり、一定で $2a$ に等しい。

よくある間違い

- (i) の数列の次数がちょうど 1 であると述べてしまう。$u_1 = u_2$ ならば定数である。
- (iii) で $w_n = t_n + kn^3$ だけを試してしまう。n^3 の項だけでは $6kn + 6k$ が生じるので、定数を合わせるために n^2 の項も必要である。
- 「ちょうど 2 次」（または 3）であることを $p \neq 0$（または $a \neq 0$）から正当化し忘れる。

STEP のその先へ

これは $y'' = f(x)$ を解くことの離散的類似（discrete analogue）である。一般解（general solution）は特殊解（particular solution）に斉次方程式（homogeneous equation）の解を加えたものであり、ここでは斉次方程式の解は一次の数列 $A + Bn$ である。同じ「余関数（complementary function）＋特殊解」という構造が線形微分方程式（linear differential equations）を支配しており、多項式の特殊解を推測する方法はほとんどそのまま通用する。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では連続版が展開されている。

解答例

STEP II 2022、第 3 問

純粋数学 ・ フィボナッチ級数と小数

STEP II 2022、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

漸化式（recurrence relation）$F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$ がすべての原動力である。これに $\frac{1}{10}$ のべきを掛けて和をとり、添字を付け替える（re-indexing）と、各部分は S_n の定数倍といくつかの端の項の和になる。これはまさに母関数（generating function）の技法である。小問 (i) は安全網の役割を果たす。フィボナッチ数（Fibonacci numbers）は 2 のべきより速くは増大しないことを示しているので、10（あるいは 100）のべきで割れば、残りの部分はきわめて小さく、評価も容易になる。

解答

小問 (i)

まず、すべての F_k について $F_k \geq 0$ である（$F_0, F_1 \geq 0$ であり、非負の数の和は非負であるから、帰納法（induction）により従う）。次に、この数列は決して減少しない。実際、$F_1 \geq F_0$ であり、$k \geq 1$ に対して $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$ である。

したがって、すべての $k \geq 1$ に対して

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

ここで $n \geq 1$ を固定し、$r \geq n$ について帰納法を用いる。$r = n$ のとき、主張は $F_n \leq F_n$ となる。ある $r \geq n$ について $F_r \leq 2^{r-n}F_n$ が成り立つとすると、$r \geq 1$ であるから

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

これで帰納法が完結し、$n \geq 1$ かつ $r \geq n$ のとき常に $F_r \leq 2^{r-n}F_n$ が成り立つ。

小問 (ii)

左辺の 3 つの和をそれぞれ S_n を用いて書き直す。

第 1 の和。 $k = r+1$ とおくと

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\left(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\right)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

第 2 の和。 これは単に $10S_n$ である。

第 3 の和。 $k = r-1$ とおくと

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

第 1 の和から第 2 と第 3 の和を引くと

$$(100 - 10 - 1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

となり、これが求める結果である。

小問 (iii)

(ii) の左辺の 3 つの和を 1 つにまとめる。その第 r 項は $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$ であるから、左辺は 0 である。$F_0 = 0$、$F_1 = 1$ とすると

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

> **考えてみよう** 残った 2 つの項が $n \to \infty$ のとき 0 に近づくことは、どうすればわかるだろうか？

ここで小問 (i) が真価を発揮する。そこで $n = 1$ とすると、すべての $r \geq 1$ に対して $F_r \leq 2^{r-1}$ が得られるので

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

であり、どちらの上界も 0 に収束（converge）する。$(*)$ において $n \to \infty$ とすると $89S_n \to 10$、すなわち

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

残りの部分（tail）については、小問 (i) を $n = 7$ として用いる（$F_7 = 13$ に注意）。$r \geq 7$ に対して $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$ であるから

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$ **の各桁。**最初の 6 項の和は

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

残りの部分 $T = \frac{10}{89} - S_6$ は真に正であり（各項が正であるから）、かつ 2×10^{-6} より小さい。したがって

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{ゆえに} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

これらの上下界の真に間にある数はすべて 0.011235… で始まるので、$\frac{1}{89}$ の小数点以下最初の 6 桁は $0, 1, 1, 2, 3, 5$ である。下界が厳密な不等式であることが重要である。これにより、展開が 0.0112357… となる可能性が排除される。

小問 (iv)

目標の数を、先頭の 00 の後ろから 2 桁ずつ区切って読む。

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

これらの組は $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$ をそれぞれ 2 桁で書いたものである。よって、求める数は $\frac{1}{100}U$ となるはずである。ただし

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

U の和を求める。小問 (i) より $F_r \le 2^{r-1}$ であるから、この級数は絶対収束（absolutely convergent）する。したがって (ii) と同様に、収束する級数を項ごとにずらしたりまとめたりしてよい。

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

ここで $r = 1$ の項は（$F_0 = 0$ であるから）$F_1/100$ であり、それ以降の括弧の中はすべて 0 である。よって $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$ となり、$U = \frac{100}{9899}$ を得る。したがって候補は

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

であり、$r = 1$、$s = 9899$ はいずれも 10000 未満の正の整数である。

各桁の確認。最初の 10 項の和を U_{10} とする。$F_1, \ldots, F_{10}$ はいずれも 100 未満であるから、各項の桁は重ならず、

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

が小数第 20 位まで正確に成り立つ。小問 (i) を $n = 11$ として用いると（$F_{11} = 89$）、残りの項は

$$0 < U - U_{10} \leq \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{100}\right)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

を満たす。よって $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$ であり、U の小数点以下最初の 20 桁は U_{10} のものと一致する。100 で割るとこれらの桁は右に 2 つずれて

$$\frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134 55\ldots,$$

となり、これはまさに求められた始まり方である。

検算

- 筆算による割り算で $1/89 = 0.011235955\ldots$ が得られる。011235 の桁は一致しており、その次の桁 9,5,5 は、フィボナッチ数が 2 桁に達すると互いに「繰り上がり」を起こすことを示している。
- (iii) における $r = 6$ より先の残りの部分は、実際には $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$ であり、上界 1.625×10^{-6} を十分に下回っている。
- コンピュータで $1/9899$ を小数第 22 位まで計算すると 0.0001010203050813213455 となる。次の組は $F_{11} = 89$ ではなく 90 である。これは $F_{12} = 144$ が 2 桁の枠からあふれ、1 つ前の組に 1 を繰り上げるためである。

よくある間違い

- (ii) で添字を付け替える際に、端の項を誤ること。ずらした各和の最初と最後の項を書き出しておけば、この誤りは避けられる。
- (iii) で $F_n/10^n$ と $F_{n+1}/10^{n-1}$ が 0 に収束することを示さないこと。小問 (i) はまさにそのためにある。
- 残りの部分が**真に**正であることを忘れること。上界だけでは小数第 6 位の桁は確定しない。

STEP のその先へ

関数 $G(x) = \sum F_r x^r$ はフィボナッチ数の**母関数**であり、項をずらす議論により $|x| < \frac{1}{2}$ に対して $G(x) = x/(1 - x - x^2)$ であることがわかる。$x = \frac{1}{10}$ および $x = \frac{1}{100}$ を代入すると、$\frac{10}{89}$ と $\frac{100}{9899}$ が得られる。母関数は漸化式を代数の問題に変換するものであり、

組合せ論における中心的な道具である。Herbert Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）は生き生きとした入門書である。「収束する級数の並べ替え」を厳密に扱うことは大学 1 年次の解析学の話題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 2022、第 4 問

純粋数学 • 絶対値関数

STEP II 2022、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

絶対値記号が意味をもつのは、その中身の符号が変わる点だけである。したがって、そのような点で区切られた各区間では、どの絶対値もその中身に正負の符号をつけたものに置き換えられる。逆向きに考えると、項 $A|x-p|$ は $x=p$ に角（かど）をつくり、そこで傾きが $2A$ だけ跳ぶ。そこで一つの式をつくるには、傾きの跳び（最後の小問では x^2 の係数の跳びも）を合わせ、最後に定数を調整すればよい。

解答

小問 (i)

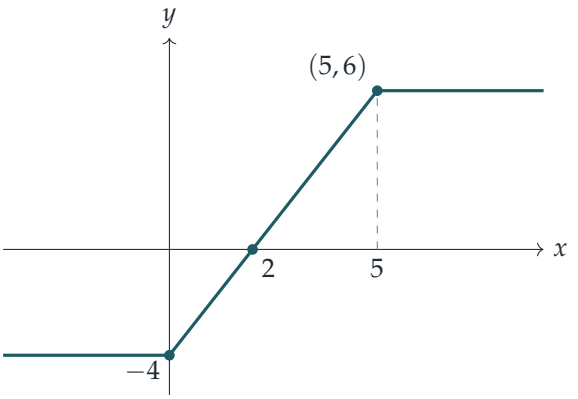
境目となる点は $x=0$（$|x|$ が切り替わる点）と $x=5$（$|x-5|$ が切り替わる点）である。

- $x \le 0$ のとき：$|x| = -x$ であり、$x-5<0$ より $|x-5| = 5-x$ である。よって $\mathrm{f}(x) = -x-(5-x)+1 = -4$ となる。
- $0 \le x \le 5$ のとき：$|x| = x$、$|x-5| = 5-x$ である。よって $\mathrm{f}(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$ となる。
- $x \ge 5$ のとき：$|x| = x$、$|x-5| = x-5$ である。よって $\mathrm{f}(x) = x-(x-5)+1 = 6$ となる。

$x=0$ と $x=5$ では、隣り合う二つの式がともに成り立つ（各絶対値はそこで 0 になるか、符号が定まっている）ので、重なる端点での値は矛盾しない。実際、$-4 = 2(0)-4$、$2(5)-4 = 6$ である。これが求める区分的な表示（piecewise form）である。

グラフは高さ -4 の水平線から始まり、$(0,-4)$ から $(2,0)$ を通って $(5,6)$ まで傾き 2

で上昇し、その後は高さ 6 の水平線となる。



小問 (ii)

小問 (i) を参考に、次の形を試す。

$$\mathrm{g}(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

左から右へ $x = 0$ を通過するとき、項 $A|x|$ は $-Ax$ から Ax に変わるので、傾きは $2A$ だけ跳ぶ。同様に、$B|x-5|$ は $x = 5$ で傾きを $2B$ だけ跳ばせる。与えられた g の三つの部分の傾きは -1、3、1 であるから

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

となり、$A = 2$、$B = -1$ を得る。$x \geq 5$ では式は $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$ となり、これが $x + 10$ に等しくなければならないので、$C = 0$、$D = 5$ である。したがって

$$\boxed{\mathrm{g}(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

残り二つの部分も確かめる。$x \leq 0$ では $-2x - (5-x) + 5 = -x$、$0 \leq x \leq 5$ では $2x - (5-x) + 5 = 3x$ である。どちらも g の定義と一致する。

? **考えてみよう** そもそも、なぜこの形の式でうまくいく見込みがあったのだろうか。

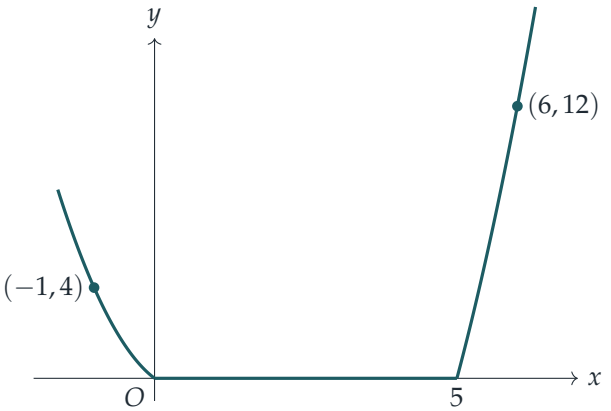
g の各部分は一次式であり、それらは連続（continuous）につながっている（$x = 0$ では両側から 0、$x = 5$ では両側から 15）。一次式の絶対値の和に一次関数を加えたものは、つねに連続かつ区分的に線形（piecewise linear）であり、角ができるのは絶対値が切り替わる点だけである。もし g に跳びがあれば、このような式ではそれを表せない。

小問 (iii)

今度の切り替わる点は $x=0$（$|x|$ について）と $x(x-5)$ の根であり、後者も 0 と 5 である。積 $x(x-5)$ は $x<0$ および $x>5$ で正、その間で負である。

- $x \le 0$ のとき：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$。
- $0 \le x \le 5$ のとき：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$。
- $x \ge 5$ のとき：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$。

よって h は $[0,5]$ 上で恒等的に 0 である。左側では放物線 $y = 2x(x-1)$ の一部であり、原点に傾き $4x - 2 = -2$ で到達し、$x \to -\infty$ のとき限りなく増加する（たとえば $\mathrm{h}(-1) = 4$）。右側では $y = 2x(x-5)$ の一部であり、$(5,0)$ から傾き $4x - 10 = 10$ で離れていく（たとえば $\mathrm{h}(6) = 12$）。二つの腕は鏡像ではない。右の腕は左の腕の 5 倍の急さで軸から離れる。グラフは連続で、$(0,0)$ と $(5,0)$ に角があり、いたるところで $\mathrm{h}(x) \ge 0$ である。



小問 (iv)

小問 (iii) から必要な道具がわかる。$|x(x-5)|$ は $[0,5]$ の外では $x^2 - 5x$、内では $-(x^2 - 5x)$ に等しいので、x^2 の項を入れたり切ったりできる。関数 k の x^2 の係数は、$[0,5]$ の外で 0、内で 2 である。$ax^2 + d|x(x-5)|$ の x^2 の係数は外で $a+d$、内で $a-d$ であるから、$a+d=0$ かつ $a-d=2$、すなわち $a=1$、$d=-1$ が必要である。よって $x^2 - |x(x-5)|$ は正しい二次の振る舞いをもち、

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ または} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

これを k から引くと、区分的に線形な残りが得られる。

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

これは $x = 5$ にただ一つの角をもち、そこで傾きは 5 から -5 へ、すなわち -10 だけ跳ぶ。したがってこれは $-5|x-5| +$ (一次式) の形である。$x \le 5$ では $-5|x-5| = 5x - 25$ なので、25 を加えれば $5x$ になる。以上から次の式が予想される。

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

確認。各区間で代入する。

- $x \le 0$ のとき：$x(x-5) \ge 0$ かつ $x - 5 < 0$ なので、式は $x^2 - (x^2 - 5x) - 5(5-x) + 25 = 5x + 5x = 10x$ となる。
- $0 \le x \le 5$ のとき：$x(x-5) \le 0$ かつ $x - 5 \le 0$ なので、式は $x^2 + (x^2 - 5x) - 5(5-x) + 25 = 2x^2$ となる。
- $x \ge 5$ のとき：$x(x-5) \ge 0$ かつ $x - 5 \ge 0$ なので、式は $x^2 - (x^2 - 5x) - 5(x-5) + 25 = 50$ となる。

これらはちょうど k の三つの部分であるから、この式はすべての実数 x に対して正しい。

一つの式による表し方は一意ではない。たとえば $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$ なので答えは書き換えられるし、他の組合せ（$x|x|$ を用いるものなど）でもうまくいく。上の三区間の確認を通過するなら、どの答えでもよい。

検算

- 具体的な値：$\mathrm{g}(-2) = 2$ は定義からも $2(2) - 7 + 5$ からも得られる。$\mathrm{g}(7) = 17 = 14 - 2 + 5$。k については、$\mathrm{k}(3) = 18$ であり $9 - |-6| - 10 + 25 = 18$、$\mathrm{k}(-1) = -10$ であり $1 - 6 - 30 + 25 = -10$。
- 連続性は手早い健全性チェックになる。絶対値から組み立てた一つの式はどれも連続であり、実際 g と k はつなぎ目で一致している（$\mathrm{k}(5) = 50 = 2 \cdot 5^2$）。
- 四つの式すべてを、$[-20, 25]$ 内の 10^5 個の無作為な点で区分的な表示とコンピュータで比較し、丸め誤差の範囲で一致することを確かめた。

よくある間違い

- h の腕を左右対称に描いてしまう。左の腕は $2x(x-1)$、右の腕は $2x(x-5)$ であり、角での傾きは -2 と 10 である。
- $|x(x-5)|$ が**二つ**の点で符号を変えることを忘れる。そのため (iii) では、0 でだけでなく中央の区間全体で符号が反転する。
- 三つの区間すべてに代入せずに k の式を書いて済ませてしまう。確認は必須である。

STEP のその先へ

ここでの傾きの跳びの帳尻合わせは、一般的な事実の最初の味見である。$\mathbb{R}$ 上の連続で区分的に線形な関数で角が有限個のものは、どれも一次関数と $|x-p|$ の形の項の一次結合との和として表せる。これは数値解析における線形スプライン（linear spline）や、ニューラルネットワークの「ReLU」ユニットの背後にある考え方である。実際、$\max(x,0) = \frac{1}{2}(x+|x|)$ である。連続性や区分的に定義された関数の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照されたい。

解答例

STEP II 2022、第 5 問

純粋数学 ・ 三角形における不等式

> **STEP II 2022、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

P から三角形を 3 つに分割すると、P がどこに動いても重み付き和 $ax + by + cz$ は常に 2Δ に等しいことがわかる。以降の各小問は、このただ 1 つの線形制約（linear constraint）のもとでの最適化（optimisation）問題となる。小問 (i) は $x + y + z$ をこの一定の量と比較するものであり、(iii)(a) の恒等式（identity）は $x^2 + y^2 + z^2$ について同じことを行う（これは姿を変えたコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）である）。そして最大値については、c を a の代わりに用いて (i) を逆向きに使う。

解答

小問 (i)

$a > b$ かつ $y \geq 0$ より $by \leq ay$ であり、$a > c$ かつ $z \geq 0$ より $cz \leq az$ である。これらを辺々加え、両辺に ax を加えると

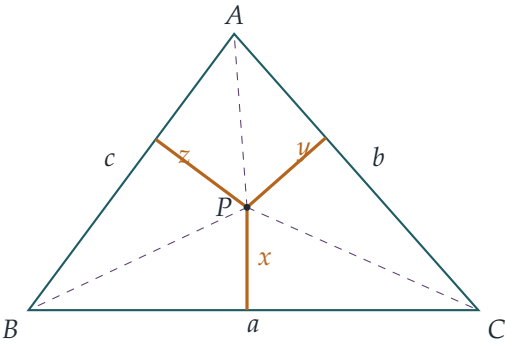
$$ax + by + cz \leq ax + ay + az = a(x + y + z),$$

となり、示すべき不等式が得られる。$a - b > 0$ かつ $a - c > 0$ であるから、等号が成り立つのは $(a - b)y + (a - c)z = 0$ のとき、すなわち $y = z = 0$ のときに限る。この等号成立条件は後で必要になる。

小問 (ii)(a)

P と各頂点を結ぶと、ABC は三角形 PBC、PCA、PAB に分割される（P が辺上にある場合、そのうちいくつかは退化する）。三角形 PBC は底辺 $BC = a$、高さ x をもち、他も同様であるから、

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{2}cz, \qquad \text{すなわち} \qquad ax + by + cz = 2\Delta.$$



逆に、$ax + by + cz = 2\Delta$ を満たす任意の $x, y, z \geq 0$ は、三角形の内部（または辺上）のただ 1 つの点 P からの距離となる。実際、3 つの三角形の面積 $\frac{1}{2}ax$、$\frac{1}{2}by$、$\frac{1}{2}cz$ は非負で和が Δ となり、これらによって P が定まる（これらは P の面積座標 (areal coordinates) である）。したがって以下では、この問題を純粋に代数的な問題として扱ってよい。すなわち、$ax + by + cz = 2\Delta$ を満たすすべての非負の x, y, z にわたって最適化すればよい。

小問 (ii)(b)

小問 (i) と (ii)(a) により、

$$x + y + z \geq \frac{ax + by + cz}{a} = \frac{2\Delta}{a}.$$

等号が成り立つのは $y = z = 0$ のときに限り、このとき $ax = 2\Delta$ である。よって和の最小値は

$$x + y + z = \frac{2\Delta}{a}, \qquad \text{このとき} \quad x = \frac{2\Delta}{a},\ y = 0,\ z = 0.$$

幾何的には、$y = z = 0$ は P が CA 上と AB 上の両方にあることを意味するので $P = A$ であり、x は A から最長の辺 BC への高さである。

小問 (iii)(a)

3つの差の平方を展開すると

$$(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2 \\ -2(abxy+bcyz+cazx),$$

であり、一方

$$(ax+by+cz)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx).$$

これらを加えると交差項は打ち消し合い、a^2,b^2,c^2 のいずれか1つと x^2,y^2,z^2 のいずれか1つとの積がちょうど1回ずつ現れるので、$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ が得られる。これですべての実数値について恒等式が証明された。

小問 (iii)(b)

恒等式に $ax+by+cz=2\Delta$ を代入すると

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2\geq 4\Delta^2,$$

となる。平方は非負だからである。したがって

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

考えてみよう 下界が最小値となるのは、それが実際に達成される場合に限る。3つの平方が、実在する点 P において同時に0になりうるだろうか？

等号成立には $bx=ay$、$cy=bz$、$az=cx$ が必要である。これらは (x,y,z) が (a,b,c) の定数倍であることを意味する。実際、$x=\lambda a$ とすれば $y=\frac{b}{a}x=\lambda b$、$z=\frac{c}{a}x=\lambda c$ となり、3つの式はすべて成り立つ。制約条件から $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$ となるので、$\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$ である。このとき x,y,z はすべて正で $ax+by+cz=2\Delta$ を満たすから、(ii)(a) の注意により、これらは実在する点 P（三角形の真に内部の点）に対応する。よって平方和の最小値は

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},\qquad \text{このとき}\quad x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

小問 (iv)

考えてみよう 小問 (i) では a が最長の辺であることを用いた。代わりに最短の辺 c を用いるとどうなるだろうか？

$a > c$、$b > c$ かつ $x, y \geq 0$ であるから、小問 (i) の議論を逆向きにすると $ax + by + cz \geq c(x + y + z)$ が得られ、等号が成り立つのは $x = y = 0$ のときに限る。よって

$$x + y + z \leq \frac{2\Delta}{c}.$$

また、$x, y, z \geq 0$ であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2,$$

であり、等号が成り立つのは $xy + yz + zx = 0$ のときに限る。これらを合わせると（両辺とも非負なので 2 乗してよい）

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2 \leq \frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

$x = y = 0$ のとき両方の不等式で等号が成り立つ。このとき $xy + yz + zx = 0$ かつ $cz = 2\Delta$ となるからである。よって平方和の最大値は

$$\frac{4\Delta^2}{c^2}, \qquad \text{このとき} \quad x = 0,\ y = 0,\ z = \frac{2\Delta}{c},$$

であり、これは最短の辺に向かい合う頂点 $P = C$ である。（2 番目の不等式で等号が成り立つのは $x = y = 0$ のときに限るので、最大値をとる点はこの点だけである。）

検算

辺が $a = 7$、$b = 6$、$c = 5$ の鋭角三角形をとる。ヘロンの公式（Heron's formula）により $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$ である。このとき答えは次のようになる。$x + y + z$ の最小値は $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$、$x^2 + y^2 + z^2$ の最小値は $864/110 = 432/55 \approx 7.85$、最大値は $864/25 = 34.56$ である。大小関係は妥当である。$P = C$ において平方和は単に C からの高さの 2 乗 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$ となる。多数のランダムな鋭角三角形のそれぞれについて数千個のランダムな点 P をとってコンピュータで確認したところ、$ax + by + cz = 2\Delta$ と 3 つの評価がすべて成り立ち、極値はそれぞれ A、距離が (a, b, c) に比例する点、C で達成されることが確かめられた。

よくある間違い

- 下界を示しただけで、それが達成されることを示さない。(iii)(b) では、等号成立点の距離が非負で制約条件を満たし、実在する P であることを確認しなければな

らない。

- 頂点を取り違える。$x+y+z$ の最小値は A（最長の辺に向かい合う頂点）でとるが、$x^2+y^2+z^2$ の最大値は C（最短の辺に向かい合う頂点）でとる。
- (iv) で条件 $x,y,z \geq 0$ を落とす。この条件がなければ $x^2+y^2+z^2 \leq (x+y+z)^2$ は成り立たない。

STEP のその先へ

(iii)(a) の恒等式はラグランジュ（Lagrange）の恒等式であり、3次元におけるコーシー・シュワルツの不等式 $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2$ を証明するものである。最小値をとる点は (x,y,z) が (a,b,c) に平行となる点、すなわち原点から平面 $ax+by+cz=2\Delta$ に下ろした垂線の足である。$x^2+y^2+z^2$ のような凸関数（convex function）の三角形上での最大値は常に頂点でとられる。これは線形最適化と凸最適化への最初の入り口である。(iii)(b) で求めた点は三角形の類似重心（symmedian point、ルモワーヌ点（Lemoine point）とも呼ばれる）である。内積と射影についてさらに学ぶには、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 2022、第 6 問

純粋数学 ・ 直交軌道

STEP II 2022、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つの曲線がある点で直角に交わる（meet at right angles）のは、その点での傾き（gradient）の積が -1 になるときであり、またそのときに限る。したがって曲線族（family of curves）全体について、点 (x, y) を通る曲線が族の**どの**曲線であっても成り立つような傾きの式が欲しい。そのためには、曲線の方程式とその導関数からパラメータ（parameter）（a, b, c または k）を消去し、$x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ だけからなる微分方程式（differential equation）を得ればよい。そうすれば、傾き m を $-1/m$ に置き換えて解くことで、直交する曲線族が求まる。

解答

以下つねに $x > 0$ かつ $y > 0$ とする。

小問 (i)(a)

$x^2 + y^2 = 2ax$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a.$$

この式にはまだ a が含まれており、a は曲線ごとに異なる。曲線の方程式から $2a = (x^2 + y^2)/x$ であるから、これを代入して x を掛けると

$$2x^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2,$$

となり、求める式が得られる。

2 つ目の族については、$x^2+y^2=2by$ を微分すると（右辺も y を通して x に依存することに注意して）

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

ここで $2b=(x^2+y^2)/y$ であるから、これを代入して y を掛けると

$$2xy+2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad\Longrightarrow\quad(x^2-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy.$$

小問 (i)(b)

各族の曲線が 1 本ずつ点 (x,y) を通り、$y\neq x$ であるとする。$x,y>0$ より $2xy\neq 0$ であり、また $y\neq x$ かつ両者とも正であるから $x^2-y^2\neq 0$ である。よって 2 つの微分方程式はどちらも割り算ができ、2 つの傾きは

$$m_1=\frac{y^2-x^2}{2xy},\qquad m_2=\frac{2xy}{x^2-y^2},\qquad\text{したがって}\qquad m_1m_2=\frac{y^2-x^2}{x^2-y^2}=-1.$$

となる。どちらの傾きも有限で、その積は -1 であるから、2 本の接線（tangent）は垂直である。

考えてみよう 直線 $y=x$ 上では何がうまくいかないか。また、それはそこで結果が成り立たないことを意味するのか。

$y=x$ 上では 2 つ目の式は $0\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x^2\neq 0$ となり、これを満たす有限の傾きは存在しない。つまり 2 つ目の曲線の接線は鉛直である。これで崩れるのは代数的な計算であって幾何ではないから、直接調べてみよう。

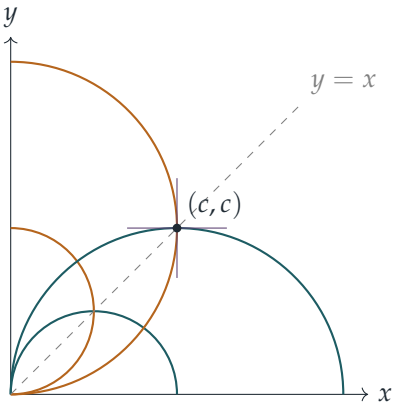
(c,c) が $x^2+y^2=2ax$ 上にあれば $2c^2=2ac$ より $a=c$ であり、同様に $b=c$ である。1 つ目の曲線は中心 $(c,0)$、半径 c の円で、(c,c) はその最高点であるから、そこでの接線は水平である（実際、$y=x$ のとき $m_1=0$ である）：

$$y=c.$$

2 つ目の曲線は中心 $(0,c)$、半径 c の円で、(c,c) はその最も右の点であるから、接線は鉛直である：

$$x=c.$$

水平な直線と鉛直な直線は垂直であるから、答えは**イエス**である。$y=x$ 上の点も含め、すべての交点で接線は垂直である。



1 つ目の族の円（青緑）は原点で y 軸に接し、2 つ目の族の円（琥珀色）は原点で x 軸に接する。

小問 (ii)

$y = c\ln x$ について $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$ である。c を消去するために、このような曲線上の第 1 象限（first quadrant）の点では $y > 0$ から $\ln x \neq 0$ となることに注意すると、$c = y/\ln x$ であり

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

この傾きは決して 0 にならないから、同じ点を通る垂直な曲線の傾きは $-x\ln x/y$ でなければならない。したがって 2 つ目の族は

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

を満たす。変数分離（separation of variables）を行い、$x\ln x$ を $u = \ln x, \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）すると

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

両辺に 4 を掛けると、2 つ目の族は

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

であり、定数 k ごとに 1 本の曲線が対応する（$x > 0, y > 0$ の部分のみを考える）。逆に、この式を陰関数微分すると $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$ となり、これはちょうど上の方程式である。よって、これらの曲線のいずれかがある $y = c\ln x$ と交わる点では、傾きの積は $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$ となる。

小問 (iii)

$y^2 = 4k(x+k)$ を微分すると $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$ であるから、$y > 0$ より

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

考えてみよう ここでは曲線族は 1 つしかない。「2 つ目の曲線」はどこから来るのか。

第 1 象限の点 (x, y) を固定し、族のどの曲線がその点を通るかを考える。k の値は

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

を満たさなければならない。これは k の 2 次方程式である。その判別式（discriminant）$16x^2 + 16y^2$ は正であるから、相異なる 2 つの実数解 k_1, k_2 が存在し、その積は

$$k_1 k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

である（これは負であるから、族の条件どおり、どちらの解も 0 ではない）。2 次方程式の解は高々 2 つであるから、族の相異なる 2 本の曲線が (x, y) で交わるならば、それらのパラメータはちょうど k_1 と k_2 でなければならない。その点での傾きは $2k_1/y$ と $2k_2/y$ であり、その積は

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2} \cdot \left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

となる。よって、そのようなすべての点で接線は垂直であり、題意は示された。（これらの曲線は原点を焦点（focus）とする放物線（parabola）であり、この族は自分自身の直交軌道の族になっている。）

検算

- (i) で $(x, y) = (1, 2)$ をとると、$a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{4}$ であり、傾きは $m_1 = \frac{3}{4}$ と $m_2 = -\frac{4}{3}$ で、その積は -1 である。
- (ii) で点 $(e, 1)$ では、対数曲線は $c = 1$ で傾きは $1/e$ である。2 つ目の族の式からは傾き $-e \cdot 1/1 = -e$ が得られる。やはり積は -1 である。
- (iii) で点 $(0, 2)$ では 2 次方程式は $4k^2 - 4 = 0$ となるから $k = \pm 1$ であり、放物線 $y^2 = 4(x+1)$ と $y^2 = -4(x-1)$ が得られ、そこでの傾きは 1 と -1 である。
- 4 つの結果はすべて、曲線そのものの数値微分を用いて、数千個のランダムな点でコンピュータによっても確認した。

よくある間違い

- $2by$ を微分するときに、右辺の因子 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を書き忘れる。
- (ii) で垂直な傾きを $-x/c$ と書き、c を残したまま積分してしまう。c は 1 つ目の曲線に属するパラメータであるから、解く前に消去しなければならない。
- (i)(b) で $x^2 - y^2$ が 0 でない理由を述べずに割り算をしてしまい、その結果、直線 $y = x$ を別に扱う必要があることを見落とす。

STEP のその先へ

至るところで直角に交わる曲線族は**直交軌道**（orthogonal trajectories）とよばれる。これは物理学では力線（field lines）と等ポテンシャル線（equipotentials）として現れ、また複素解析（complex analysis）にも現れる。解析関数（analytic function）の実部と虚部の等高線（level curves）はつねに垂直に交わる。(i) の円が $1/z$ から、(iii) の自己直交な放物線が $\sqrt{z}$ から生じるのはこのためである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は直交軌道を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は複素解析の観点からの描像を見事に説明している。

解答例

STEP II 2022、第 7 問

純粋数学 • 複素多項式の根

> **STEP II 2022、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

方程式 $\mathrm{h}(w) = 0$ は自然に $w^5(nw+1) = -(w+n)$ と分けられ、両辺の絶対値（modulus）をとれば $|w|$ だけについての主張に帰着する。すべての根が単位円（unit circle）上にあることがわかれば、実数でない各根は、その複素共役（complex conjugate）と組になり、しかもその共役は逆数（reciprocal）でもある。これにより二次の因数が得られ、あとは係数比較（comparing coefficients）と符号の議論をするだけである。

解答

小問 (i)

(a) $\mathrm{h}(w) = 0$ の項を次のようにまとめる。

$$w^5(nw+1) = -(w+n).$$

どちらの括弧も 0 にはならない。実際、$w = -1/n$ ならば $\mathrm{h}(w) = n - \frac{1}{n} \neq 0$ であり、$w = -n$ ならば $\mathrm{h}(w) = n^5(n^2-1) \neq 0$ である。ここで $n \geq 2$ を用いた。両辺の絶対値をとって 2 乗すると、

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2 = |w+n|^2.$$

任意の複素数 u と実数 c に対して $|u+c|^2 = (u+c)(\bar{u}+c) = |u|^2 + 2c\,\mathrm{Re}(u) + c^2$ が成り立つ。よって

$$|w+n|^2 = |w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + n^2 = \mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2 = n^2|w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + 1 = \mathrm{g}(w).$$

どちらも正であるから、$|w^5|^2 = \mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$ である。正の平方根をとれば $|w^5| = \sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$ となり、示すべきことが得られた。

(b) 差をとると $\mathrm{Re}(w)$ の項は打ち消し合う。

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2-1)(1-|w|^2).$$

背理法（proof by contradiction）により、$|w| < 1$ と仮定する。$n^2 - 1 > 0$ であるから $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$ となり、$\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$ である。(a) より $|w|^5 > 1$ であるから $|w| > 1$ となり、これは $|w| < 1$ に矛盾する。したがって $|w| \geq 1$ である。

(c) 同じ議論を逆向きに用いればよい。$|w| > 1$ ならば $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$ であるから $|w|^5 < 1$、すなわち $|w| < 1$ となり矛盾する。よって $|w| \leq 1$ も成り立ち、(b) と合わせて $|w| = 1$ である。

> **考えてみよう** $|w| \leq 1$ となることについて、もっと鮮やかな理由はないだろうか？

ある。係数 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$ は逆から読んでも同じであるから、$z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$ が成り立つ。したがって w が根ならば $1/w$ も根であり、$1/w$ に (b) を適用すれば $|w| \leq 1$ が得られる。

小問 (ii)

(a) h は実数係数であるから、実数でない根は共役な組で現れる。6 つの根は相異なり、いずれも実数でないので、3 つの組 w_k, $\bar{w}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ をなす。小問 (i) より $|w_k| = 1$ であるから $w_k\bar{w}_k = 1$ であり、

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

となる。ここで $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$ は実数である。多項式 h は 6 次で最高次の係数は n であるから、

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 積における z^5 の項は、1 つの因数から $-a_k z$ を、残り 2 つの因数から z^2 をとることで現れる。よって z^5 の係数は $-n(a_1 + a_2 + a_3)$ である。h におけるこの係数は 1 であるから、

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) まず 2 つの因数を掛ける。

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

これに $z^2 - a_3 z + 1$ を掛けると、z^3 の項は $z^3 \times 1$、$z^2 \times (-a_3 z)$、$z \times z^2$ から生じる。

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h には z^3 の項がないので $a_1 a_2 a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$ であり、(b) より

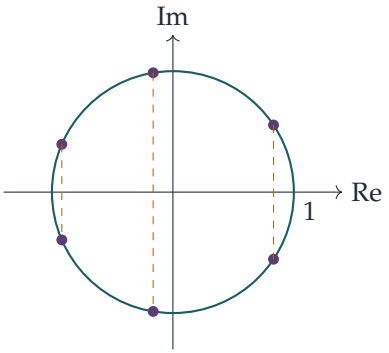
$$a_1 a_2 a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

考えてみよう a_k の符号から、実部について何がわかるだろうか？

共役な組 $w_k, \bar{w}_k$ はそれぞれ同じ実部 $\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$ をもつ。よって実部が負である根の個数は、負である a_k の個数の 2 倍である。

$a_1 a_2 a_3 = 2/n > 0$ であるから、どの a_k も 0 ではなく、負であるものの個数は偶数、すなわち 0 個か 2 個である。$a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$ であるから、すべてが正であることはありえない。よって a_k のうちちょうど 2 つが負で 1 つが正であり、6 つの根のうち **4 つ**が負の実部をもつ。



図は $n = 2$ の場合を示している。6 つの根は 3 組の共役な組として単位円上にあり、そのうち 2 組は虚軸の左側にある。

検算

- 実数の根がないことの確認として、$\mathrm{h}(1) = 2n + 2$ と $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$ がどちらも 0 でないことに注意する。根は単位円上にあるので、実数の根の候補は ± 1 だけである。
- $n = 2$ のとき、数値的に解くと $a_k \approx -1.8368, -0.3272, 1.6640$ となる。これらの和は $-0.5 = -\frac{1}{2}$、積は $1.000 = \frac{2}{2}$ であり、2 つが負であるから、(b)、(c)、(d) と一致

する。コンピュータで $n = 2, \ldots, 29$ を調べたところ、いずれの場合もすべての根の絶対値は 1 であり、4 つの根が負の実部をもつことが確かめられた。

よくある間違い

- $w = -1/n$ が根でないことを確かめずに $nw + 1$ で割ってしまう。
- (c) で z^3 を作る 3 通りの方法のうち 1 つを見落とす。特に、$2 + a_1 a_2$ の定数 2 から生じる項 $-2a_3$ を落としやすい。
- (d) で負の a_k の個数を数えたものの、それぞれが 2 つの根に対応することを忘れる。

STEP のその先へ

係数を逆から読んでも同じになる多項式を**回文多項式**（palindromic polynomial）、または自己相反多項式（self-reciprocal polynomial）という。その根は $w, 1/w$ の組で現れ、置換 $u = z + 1/z$ によって次数を半分にできる。ここでの $a_k = w_k + 1/w_k$ はまさにこの u である。すべての根が単位円上にあるのはどのようなときかという問いは、シューア・コーン判定法（Schur–Cohn test）のような結果や、複素解析（complex analysis）におけるルーシェの定理（Rouché's theorem）へとつながっていく。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの考え方を幾何学的に見るのにうってつけの美しい本である。

解答例

STEP II 2022、第 8 問

純粋数学 ・ 行列の不変直線

> **STEP II 2022、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

原点を通る直線が不変（invariant）であるとは、その直線上のすべての点が同じ直線上の点に移されることであるから、1 つの方向ベクトル（direction vector）の行き先を調べれば十分である。直線を $y = mx$ と書き、$\mathbf{M}\binom{1}{m}$ が $\binom{1}{m}$ の定数倍になることを要求すると、すべてが m の二次方程式（quadratic）に帰着する。その後、小問 (ii) と (iii) はその解の和と積の問題となる。ただし、傾きをもたない鉛直な直線は、毎回別に調べる必要がある。

解答

小問 (i)

方向ベクトル $\binom{1}{m}$ をもつ直線 $y = mx$ を考える。その像は

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\c+dm\end{pmatrix}.$$

である。$\mathbf{M}$ は線形（linear）であるから、この直線が不変であるのは、この像が $y = mx$ 上にあるとき、すなわち

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

のときであり、かつそのときに限る。したがって、鉛直でない不変直線の傾き（gradient）はすべてこの方程式を満たし、逆にこの方程式の各解は不変直線を与える。

傾きを「その解」と呼ぶ前に、これが本当に二次方程式であることを確かめなければならない。y 軸の方向ベクトルは $\binom{0}{1}$ であり、その像は $\binom{b}{d}$ である。これが y 軸上にあ

るのは $b = 0$ のときであり、かつそのときに限る。よって、どちらの不変直線も y 軸でなければ $b \neq 0$ である。このとき方程式は真に二次方程式であり、解は高々 2 個である。2 本の不変直線はともに鉛直でなく、傾きが異なるので、それらの傾きは相異なる 2 つの解である。したがって、それらはちょうどこの方程式の 2 つの解であり、これが示すべきことであった。

一方の不変直線が y 軸であるならば、$b = 0$ であり、方程式は $(a-d)m - c = 0$ に退化する。$a \neq d$ であるから（この条件はここで使われる）、もう一方の不変直線の傾きは

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

である。

小問 (ii)

$b \neq 0$ の場合。 傾きを m_1, m_2 とする。小問 (i) より

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

である。2 直線が x 軸となす角をそれぞれ α_1, α_2 とすると

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

である。2 直線のなす角が 45° であることは、これが ± 1 に等しいことを意味するので、$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$ である。左辺を $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$ と書き直すと

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

を得る。両辺に b^2 を掛けると $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$、すなわち

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

となる。

$b = 0$ の場合。 一方の直線は y 軸であり、もう一方の傾きは $c/(a-d)$ である。この直線が y 軸と 45° の角をなすためには傾きが ± 1 でなければならないので、$c = \pm(a-d)$ であり、$(a-d)^2 = c^2$ となる。$b = 0$ のとき、示すべき式の右辺も c^2 であるから、この場合も結果は成り立つ。

小問 (iii)

考えてみよう 「$y = x$ と等しい角をなす」とは、傾きの言葉でいうとどういうことか。

原点を通る相異なる 2 直線が $y = x$ と同じ角をなすのは、一方が他方の $y = x$ に関する鏡像（mirror image）であるときであり、かつそのときに限る。$y = x$ に関する鏡映は座標を入れ替えるので、$y = mx$ を $x = my$ に移す。これは $m \neq 0$ のとき $y = \frac{1}{m}x$ である。また、x 軸を y 軸に、y 軸を x 軸に移す。

$b \neq 0$ の場合。 どちらの直線も鉛直ではない。もし一方の傾きが 0 であれば、その鏡像は y 軸となるが、y 軸は不変ではないので、2 直線は対称にならない。そうでなければ、条件は $m_2 = 1/m_1$、すなわち $m_1 m_2 = 1$ である。小問 (i) より、これは $-c/b = 1$、すなわち $b + c = 0$ である。

$b = 0$ の場合。 一方の直線は y 軸であるから、もう一方は x 軸でなければならない。すなわち $c/(a - d) = 0$、つまり $c = 0$ である。$b = 0$ のもとでは、これもまた条件 $b + c = 0$ である。

以上より、いずれの場合も必要十分条件は

$$b + c = 0, \quad \text{すなわち} \quad c = -b.$$

である。（行列が対称で $b = c$ のときは、不変直線は代わりに直交する。ここでは非対角成分（off-diagonal entries）が互いに符号が逆になっている。）

小問 (iv)

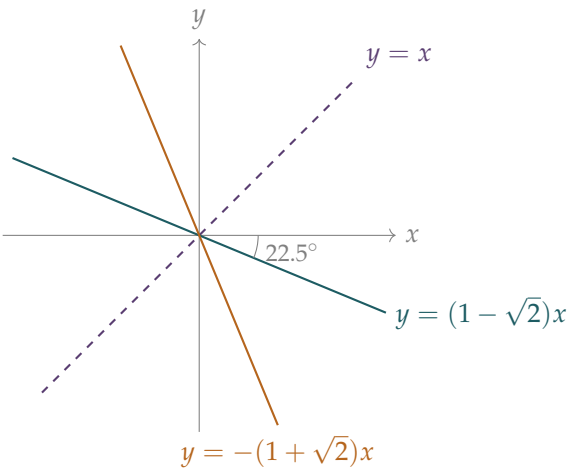
小問 (ii) の条件に $c = -b$ を代入すると

$$(a - d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

となる。$b \neq 0$ でなければならない。実際、$b = c = 0$ ならば $(a - d)^2 = 0$ となり、$a \neq d$ に矛盾する。$b = 1, c = -1, a - d = 2\sqrt{2}$ とし、例えば $a = \sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$ とすると

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

を得る。小問 (i) の二次方程式は $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$ であり、相異なる実数解 $m = -\sqrt{2} \pm 1$ をもつ。よって、この行列は問題の仮定どおり、ちょうど 2 本の不変直線をもつ。それらの傾きの積は 1 であるから、2 直線は $y = x$ に関して互いに鏡像である。$\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1, \tan 67.5^\circ = \sqrt{2} + 1$ であるから、2 直線が x 軸となす角は -22.5° と -67.5° である。したがって、2 直線は 45° で交わり、それぞれ $y = x$ と 67.5° の角をなす。



検算

- 小問 (iv) の例では、$(a-d)^2 = 8$ かつ $(b-c)^2 - 4bc = 4+4 = 8$ であるから、小問 (ii) の条件は成り立っている。1 本の直線を直接確かめることもできる。$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ であるから、実は $y = (1-\sqrt{2})x$ 上のすべての点は動かない。
- 小問 (i) の簡単な特殊例：$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ のとき、不変直線は座標軸である。y 軸の場合の公式からもう一方の傾きは $0/(2-1) = 0$ となり、正しい。
- 小問 (i)–(iii) は、数千個のランダムな行列についてコンピュータで確認した。固有ベクトルの方向は二次方程式を満たし、45° をなす組は恒等式を満たし、直線が $y = x$ に関して対称になるのはちょうど $b + c = 0$ のときである。

よくある間違い

- 鉛直な直線を忘れること。二次方程式は傾きしか捉えないので、$b = 0$ の場合はどの小問でも別に扱わなければならない。
- 小問 (iii) で $m_1 = -m_2$ と書くこと。これは座標軸に関する対称性である。$y = x$ に関する対称性には $m_1 m_2 = 1$ が必要である。
- $\pm$ をつけずに $\tan\theta = 1$ を用いること。$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$ と 2 乗すれば、両方の符号を一度に扱える。

STEP のその先へ

原点を通る不変直線は $\mathbf{M}$ の**固有ベクトル**（eigenvector）の方向であり、小問 (i) の二次方程式は、固有ベクトルの方程式 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$ から λ を消去したものである。実対称行列（real symmetric matrix）は常に直交する固有ベクトルをもつ（スペクトル定理（spectral theorem））。この問題は、非対角成分が反対称（antisymmetric）であると、固有ベクトルが代わりに $y = x$ に関して対称になることを示している。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、固有ベクトルとスペクトル定理が展開されている。

解答例

STEP II 2022、第 9 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 2022、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

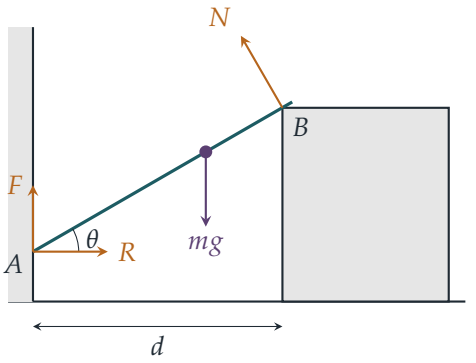
板は軽いので、板に力を及ぼすものは三つしかない。質点（point mass）、三角柱（prism）の辺からの抗力（reaction）、そして壁である。板が壁に接する点のまわりのモーメント（moment）をとると、壁からの二つの力が同時に消え、辺からの抗力がただちに求まる。次に鉛直方向の力のつり合いから摩擦力（friction）が求まり、以降の小問はすべて摩擦の不等式 $|F| \le \mu R$ を変形したものにすぎない。

解答

モデル化。板は軽い剛体の棒、おもりは重さ mg の質点、三角柱の辺はなめらか、壁は摩擦係数（coefficient of friction）μ をもつ粗い面とする。板が壁に接する点を A、板が辺の上に載っている点を B とする。B は壁から水平距離 d の位置にあるので、

$$AB = d\sec\theta.$$

B において板は辺の上に載っているので、なめらかな面からの抗力 N は板に垂直である。A において、壁は水平な垂直抗力 R と鉛直な摩擦力 F を及ぼす。F は上向きを正にとる（F が負であれば下向きにはたらくことを意味する）。



A のまわりのモーメント。壁からの二つの力はどちらも A を通る。重力は板に沿って距離 x の点にはたらくので、その腕の長さは $x\cos\theta$ である。N は距離 $d\sec\theta$ の点で板に垂直にはたらく。したがって

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

力の分解。N の向きは鉛直方向と角 θ をなし、壁の側に傾いている。水平方向と鉛直方向のつり合いから

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

$R > 0$ であるから、板は確かに壁を押していることに注意する。

小問 (i)

$x = d\sec^3\theta$ ならば $x\cos^3\theta/d = 1$ であるから $F = 0$ となる。すなわち、壁では摩擦力がはたらかない。

小問 (ii)

摩擦がある場合のつり合い（equilibrium）の条件は $|F| \le \mu R$ である。

$x > d\sec^3\theta$ ならば $x\cos^3\theta/d > 1$ であるから $F < 0$ となる（摩擦力は下向きにはたらく。摩擦がなければ端 A は壁に沿って上に滑ってしまう）。条件 $-F \le \mu R$ は

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

となる。正の量 $d\sec^3\theta/(mg)$ を掛けると

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{よって} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

を得る。ここで $x\tan\theta > 0$ で割った（θ は鋭角である）。これが求める結果である。

$x < d\sec^3\theta$ ならば $F > 0$ であり、条件 $F \le \mu R$ は同様にして

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

となる。

考えてみよう 摩擦力はどちら向きにはたらくのか。当て推量に頼らずに、それをどうやって知ればよいだろうか。

推測する必要はない。F を上向きに正とすれば、鉛直方向の式がその符号を教えてくれる。摩擦の条件は常に $|F| \le \mu R$ と書くことができ、F の符号は二つの不等式のどちらが得られるかを決めるだけである。

小問 (iii)

(ii) の二つの場合はどちらも $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$ を意味し、これは次の二つの不等式の組と同値である。

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad \text{かつ} \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

二つ目から $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$ を得る。$1+\mu\tan\theta > 0$ であるから

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

一つ目から $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ を得る。$\mu < \cot\theta$ ならば $\mu\tan\theta < 1$ であるから $1-\mu\tan\theta > 0$ となり、不等号の向きを変えずに割ることができる。

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

（$\mu \ge \cot\theta$ ならば上限は存在しない。おもりが板のどれほど上にあっても、摩擦力がそれを支えることができる。）

小問 (iv)

おもりが壁と辺の間にあるのは、ちょうど $x < AB = d\sec\theta$ のときである。これを (iii) の下限と組み合わせると

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

$d\sec\theta > 0$ で割り、$1+\mu\tan\theta > 0$ を掛けると

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

となる。ここで $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いた。$\tan\theta > 0$ であるからこれで割ることができ、求める $\tan\theta < \mu$ を得る。

検算

- $\theta = 45°$、$d = 1$、$\mu = 0.5$ とする。このとき $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ であり、(iii) により $1.89 \le x \le 5.66$ が許される。たとえば $x = 2$ のとき、$F = mg(1 - 2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$、$N = mg$、$R = mg/\sqrt{2}$ であり $\mu R \approx 0.35mg$ となるので、つり合いは成り立つ。この場合おもりは辺より先にあり（$AB = \sqrt{2}$）、$\tan 45° = 1 > \mu$ であるから (iv) と矛盾しない。
- 極限の場合 $\mu = 0$（なめらかな壁）：(iii) の範囲は $x = d\sec^3\theta$ の一点に縮まり、これは (i) で得た唯一の位置である。
- 多数のランダムな θ、d、μ、x の値についてコンピュータで確かめたところ、力がつり合っていること（他の点のまわりのモーメントも含む）、そして $|F| \le \mu R$ が成り立つのはちょうど (iii) の不等式が成り立つときであることが確認できた。

よくある間違い

- 辺からの抗力を鉛直とみなしてしまう。板は辺の上に載っているので、なめらかな面からの抗力は三角柱の上面ではなく板に垂直である。
- モーメントの式で、距離 AB に $d\sec\theta$ ではなく d を用いてしまう。
- $1 - \mu\tan\theta$ の符号を確かめずに $x(1 - \mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ を割ってしまう。条件 $\mu < \cot\theta$ が現れるのはこのためである。

STEP のその先へ

この板は**静定**（statically determinate）である。未知の反力が三つ、つり合いの式が三つであるから、摩擦力は正確に決まる。支点をもう一つ加えると、つり合いの式だけでは力が決まらなくなる。そのとき技術者は、はりの弾性（elasticity）を考慮して荷重がどう分担されるかを決める。(iii) の範囲は「つり合いの領域」の小さな例であり、この主題は安定性（stability）の研究で再び現れる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2022、第 10 問

力学 ・ 斜面上の放物運動

> **STEP II 2022、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は標準的な軌道の方程式(trajectory equation)であり、要点は $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用いてこれを$\tan\alpha$ についての二次方程式（quadratic）として読むことである。目標の点に命中させられるのは、ちょうどこの二次方程式が実数解をもつときであるから、問題全体は判別式（discriminant）の条件に帰着する。水平座標 (x, y) で書くと、この条件は円板（disc）を表すことがわかり、以降の小問はすべて直線と円がどこで交わるかを読み取る問題になる。

解答

全体を通して、放物体（projectile）は空気抵抗なしに重力のみを受けて自由に運動する質点とみなし、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

小問 (i)

水平距離と高さを、発射点から測ることにする。時刻 t において

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

水平方向の運動から $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$ であり、これを代入すると

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

となり、求める式が得られる。

小問 (ii)

$P = (x, y, y\tan\theta)$ とし、大砲からの水平距離を $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ と書く。大砲はどの方向にも向けられるので、P を通る鉛直面内に向ける。すると運動はその平面内で起こり、小問 (i) より、次を満たす角 α（大砲は下向きにも向けられるので負でもよい）が必要である。

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right).$$

$s = 0$ ならば P は原点であり、真上に発射すれば到達できる。また $\sec^2\theta > \tan^2\theta$ であるから、以下の不等式もそこで成り立つ。$s > 0$ のときは $T = \tan\alpha$ とおく。T は任意の実数をとりうる。条件は

$$\frac{gs^2}{2u^2}T^2 - sT + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

が実数解 T をもつこと、すなわちその判別式が非負であることである。

$$s^2 \geq 4\cdot\frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

ここで $s^2 > 0$ で割り、u^4 を掛けた。g^2 で割って $s^2 = x^2 + y^2$ を用いると

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

y について平方完成し、$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ を用いると

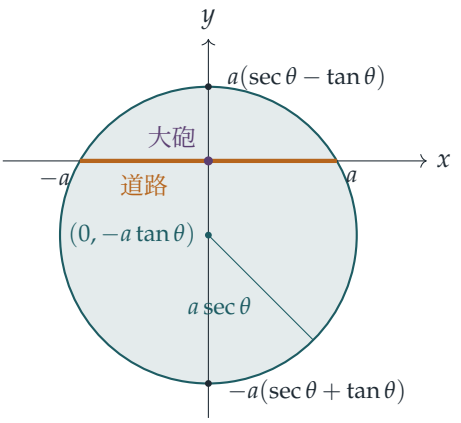
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}\left(1 + \tan^2\theta\right) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

となり、これが求める条件である。

考えてみよう 放物体が P に達する**前に**斜面にぶつかることはありうるか？

ありえない。発射の鉛直面内で、放物体の高さから地面の高さを引いたものは、水平距離についての最高次の係数が負の二次式（放物線から直線を引いたもの）であり、大砲の位置と P で 0 になる。したがってその間では正であり、放物体は P に着地するまで地面より上にある。

以下では $a = u^2/g$ と書く。到達可能な点とは、その水平面への射影が中心 $(0, -a\tan\theta)$、半径 $a\sec\theta$ の円板内にある点である。



図（$\theta = 30°$ で描いた）は、到達可能な領域を上から見たものである。「斜面を上る向き」が y の正の向きである。

小問 (iii)

斜面を真っすぐ上る向きとは、$x = 0$、$y > 0$ のことである。条件は $(y + a\tan\theta)^2 \leq a^2\sec^2\theta$ となり、$y + a\tan\theta > 0$ であるから、これは

$$y \leq a(\sec\theta - \tan\theta).$$

と同値である。水平座標 y をもつ斜面上の点は、斜面に沿って測ると原点から距離 $y\sec\theta$ の位置にある。よって、斜面を上る向きで最も遠い点までの距離は

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

であり、求める結果が得られる。

斜面を真っすぐ下る向きとは、$x = 0$、$y < 0$ のことである。このとき条件から $y \geq -a(\sec\theta + \tan\theta)$ が得られるので、斜面を下る向きで最も遠い点の大砲からの距離は

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

である。

小問 (iv)

道路は直線 $y = 0$（斜面上にあり、高さ 0）である。条件に $y = 0$ を代入すると

$$x^2 \leq a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

となるので、到達可能な道路の部分は $-a \le x \le a$ であり、その長さは $\dfrac{2u^2}{g}$ で、水平な地面の場合と同じである。

次に、大砲を $(0, c, c\tan\theta)$ に置く。道路（x 軸）からの距離は $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$ であるから、$r = |c|\sec\theta$ である。小問 (ii) の内容はすべて**大砲に対する相対的な位置**だけで決まり、斜面はその上のどの点から見ても同じに見えるので、条件の y を $y - c$ に置き換えて用いることができる。道路（$y = 0$）に到達できるのは

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

のときである。

考えてみよう 大砲は道路より上に置くべきか、それとも下に置くべきか？

到達可能な長さは $2\sqrt{a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2}$ であり、引かれている平方が 0 のとき、すなわち $c = a\tan\theta > 0$ のときに最大となる。したがって大砲は道路から斜面を**上った**位置に置き、道路が到達可能な円板の中心をちょうど通るようにする。このとき道路は直径を切り取る。最適な距離は

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

であり、道路の最大の長さは円板の直径

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

である。

検算

- $\theta = 0$（水平な地面）とすると、小問 (ii) は $x^2 + y^2 \le (u^2/g)^2$ となり、どの方向にもおなじみの最大到達距離 u^2/g が得られる。(iii) の二つの答えはいずれも u^2/g になり、(iv) では $r = 0$、長さは $2u^2/g$ となる。
- 斜面を上る向きの答え $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$ は、斜面（inclined plane）を上る向きの最大到達距離としてよく知られた結果であり、円板が正しいことを示すよい兆候である。
- $u = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\theta = 0.5\,\mathrm{rad}$ として、すべての発射角をコンピュータで走査したところ、斜面を上る向きの最大到達距離は 9.932 m、下る向きは 28.226 m となり、$u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$ と一致した。大砲を移動したときの道路の最大の長さは 33.49 m $= 2u^2/(g\cos\theta)$ であった。

よくある間違い

- (x, y) を斜面に沿った距離として扱うこと。これらは水平座標であるから、斜面を上る向きの距離は y ではなく $y\sec\theta$ である。
- 大砲を水平より下に向けてもよいことを忘れること。$\tan\alpha$ はすべての実数をとるので、判別式の条件だけで話が完結するのである。
- 移動した大砲を道路より下に置くこと。円板の中心は大砲から見て斜面を下った位置にあるので、大砲は道路より上に置かなければならない。

STEP のその先へ

小問 (ii) の円板は、ありうるすべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物面」（paraboloid of safety）$z = \dfrac{u^2}{2g} - \dfrac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$ の切り口である。この放物面を任意の平面で切ると円錐曲線（conic）が得られ、ここでは射影すると円になる。曲線族の包絡線は、力学でも微分方程式（differential equations）でも、大学 1 年で自然に扱われる話題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物体の問題がこの種の幾何学的な丁寧さで扱われている様子を見るのによい本である。

解答例

STEP II 2022、第 11 問

確率・統計 ・ 期待損失の最適化

STEP II 2022、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

検査する T 本のスティックに何が起こるかで場合分けする。そのうち 1 本でも感染していれば、ネットワークには何も載せられず損失は 0 である。T 本すべてが清浄である場合に限って、ネットワークでの賭けが関わってくる。期待損失（expected loss）を q の関数として書けば、(ii) は 1 変数の最大化（maximisation）の問題になる。また (iii) は、連続する T の値どうしを比較すればよい（T は整数なので、導関数（derivative）ではなく差分（difference）を用いる）。

解答

以下を通して、損失 $-x$ とは £x の利益を意味する。損失の純額（ポンド単位）を L とする。各スティックは独立（independently）に感染し、それぞれ確率 q で清浄であるから、特定の m 本がすべて清浄である確率は q^m である。対称性（symmetry）により、どの T 本を選ぶかは結果に影響しない。

小問 (i)

まず $T > 0$ とする。結果は次の 3 通りである。

- 検査したスティックのうち少なくとも 1 本が感染している（確率 $1 - q^T$）：残りは廃棄され、何も使われないので $L = 0$ である。
- 検査した T 本はすべて清浄だが、残りの $N - T$ 本のうち少なくとも 1 本が感染している（確率 $q^T(1 - q^{N-T})$）：除染の費用を支払うので $L = D$ である。
- N 本すべてが清浄である（確率 $q^T q^{N-T} = q^N$）：使った $N - T$ 本それぞれについて

£1 の利益を得るので $L = -(N-T)$ である。

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right) - (N-T)\,q^N \\ &= D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

$T=0$ のときは N 本すべてが使われる。確率 $1-q^N$ で $L=D$、確率 q^N で $L=-N$ となり、期待値は $D-(N+D)q^N$ である。これは上の式で $T=0$ としたものと同じであるから、すべての $0 \le T < N$ に対して

$$\mathrm{E}(L) = D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.$$

小問 (ii)

α の範囲。 $D>0$、$T \ge 0$、$N-T>0$ であるから、分子と分母は $DT \ge 0$ および $N(N-T+D)>0$ を満たし、よって $\alpha \ge 0$ である。また

$$N(N-T+D) - DT = N(N-T) + D(N-T) = (N-T)(N+D) > 0,$$

であるから $DT < N(N-T+D)$ となり、$\alpha < 1$ である。

最大値をとる点。 N、D、T を固定し、$0 \le q \le 1$ に対して $f(q) = Dq^T - (N-T+D)q^N$ とおく。

$T=0$ のときは $\alpha = 0$ であり、$f(q) = D-(N+D)q^N$ は q について減少するので、最大値は $q=0$、すなわち $q^N = 0 = \alpha$ となるところでとる。

$T \ge 1$ のときは微分して

$$f'(q) = DTq^{T-1} - N(N-T+D)q^{N-1} = N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha - q^{N-T}\right).$$

> **考えてみよう** この停留点（stationary point）が極大であり、しかも区間全体での最大値を与えることは、どうすればわかるか？

因子 $N(N-T+D)q^{T-1}$ は $0<q\le 1$ で正である。$N-T \ge 1$ であるから q^{N-T} は 0 から 1 まで狭義単調増加であり、さらに $0<\alpha<1$ なので、$q_0^{N-T} = \alpha$ を満たす $q_0 \in (0,1)$ がちょうど 1 つ存在する。$q<q_0$ では $f'(q)>0$、$q>q_0$ では $f'(q)<0$ である。よって f は q_0 まで増加し、その後は減少する。したがって $[0,1]$ における最大値は $q^{N-T} = \alpha$ となるところでとる。これが示すべきことであった。

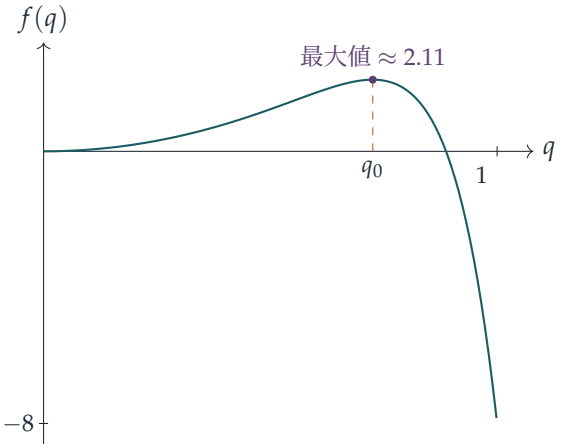
最大値。 q_0 では $q_0^{N-T} = \alpha$ であるから、$q_0 = \alpha^{1/(N-T)}$ かつ $q_0^T = \alpha^{T/(N-T)} = \alpha^k$ であ

る。よって

$$f(q_0) = q_0^T\left(D - (N-T+D)\,q_0^{N-T}\right) = \alpha^k\left(D - (N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right)$$
$$= \alpha^k\left(D - \frac{DT}{N}\right) = \frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.$$

したがって期待損失の最大値は £$D(N-T)\alpha^k/N$ である。（$T=0$ のときはこれは £D となり、$\alpha^0 = 1$ とみなせば $f(0) = D$ と一致する。）

次のグラフは $N=10$、$T=2$、$D=5$ の場合の f を示したものであり、このとき $\alpha = \frac{1}{13}$ である。



小問 (iii)

今度は N、D、q を固定し、$E_T = Dq^T - (N-T+D)q^N$ とおく。T は整数値しかとらないので、「T について増加」とは $0 \le T \le N-2$ に対して $E_{T+1} > E_T$ が成り立つことを意味する。差をとると

$$E_{T+1} - E_T = Dq^{T+1} - Dq^T + q^N$$
$$= q^T\left(q^{N-T} - Dp\right),$$

となる。ここで $q - 1 = -p$ を用いた。

考えてみよう 括弧の中は T に依存している。どうすれば 1 つの β がすべての T に対して同時に通用するのか？

$0 < q \le 1$ かつ $N - T \le N$ であるから $q^{N-T} \ge q^N$ であり、したがって T を含まない条件 $q^N > Dp$ が成り立つようにすれば十分である。ベルヌーイ（Bernoulli）の不等式（帰納法（induction）で容易に示せる：$(1-p)^n \ge 1 - np$ ならば $(1-p)^{n+1} \ge$

$(1-np)(1-p) = 1-(n+1)p+np^2$）により

$$q^N = (1-p)^N \geq 1-Np.$$

よって $1-Np > Dp$、すなわち $p < \dfrac{1}{N+D}$ ならば $q^{N-T} \geq q^N \geq 1-Np > Dp$ であり、さらに $q^T > 0$ である。したがって

$$\beta = \frac{1}{N+D} > 0,$$

とすれば、$p < \beta$ であるどの p に対してもすべての T で $E_{T+1} > E_T$ が成り立ち、期待損失は T の増加関数となる。

このような p に対しては、$E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ のうち最小のものは E_0 である。よって p が十分小さいとき、最善の方針は $T=0$、すなわち何も検査せずに N 本すべてを使うことである。これは納得のいく結論である。感染がまれであれば、検査はほとんどの場合、利益を生むはずだった健全なスティックを廃棄するだけだからである。

検算

- $N=1$、$T=0$ のとき、式は $D-(1+D)q$ を与える。これは確率 p で D を失い、確率 q で 1 を得ることに対応しており、予想どおりである。
- $q=1$（感染がまったくない）のとき、式は $D-(N-T+D) = -(N-T)$ を与え、確実に $N-T$ の利益が得られる。
- $N=10$、$T=2$、$D=5$ のとき、$\alpha = \frac{1}{13}$、$k = \frac{1}{4}$ であり、最大値は $4\cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$ となって、上のグラフの頂点と一致する。また、$N \leq 7$ についてすべての感染パターンを列挙するコンピュータによる検証で、小問 (i) の式が正しいことを確認した。
- $N=10$、$D=5$、$p=0.3$（$\beta = \frac{1}{15}$ よりかなり大きい）のとき、期待損失は実際には T について**減少**し、$T=0$ での約 4.58 から $T=9$ での 0.03 まで下がる。したがって p に関する何らかの条件は本当に必要である。

よくある間違い

- 「検査したスティックが感染している」という結果を忘れること。この場合は期待値への寄与は 0 であるが、確率 $1-q^T$ を占めている。
- 利益を $£(N-T)$ ではなく $£N$ と数えてしまうこと。検査したスティックは、清浄であっても廃棄される。
- (iii) で、整数である T について断りなく微分すること、あるいは T に依存する β を選んでしまうこと。

STEP のその先へ

これは統計的決定理論（statistical decision theory）の小さな問題である。すなわち、パラメータ（p）が未知のときに、期待損失を最小にするような行動（ここでは T）を選ぶ問題である。小問 (ii) は**ミニマックス**（minimax）の考え方であり、各方針について、起こりうるすべての p にわたる最悪の場合を求めている。これは慎重な管理者が比較の基準にしそうなものである。検査のコストと欠陥の見逃しのコストとの間の同じトレードオフは、抜き取り検査（acceptance sampling）やグループ検査（group testing）の背後にもある。ここで用いた期待値（expectation）の道具立てを身につけるには、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）がよい出発点である。

解答例

STEP II 2022、第 12 問

確率・統計　・　平均値・中央値・最頻値

STEP II 2022、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての出発点は累積分布関数（cumulative distribution function）F であり、これは今の場合、単純な多項式である。F は $[0,1]$ 上で増加するから、数 a が中央値（median）より小さいのは $\mathrm{F}(a) < \frac{1}{2}$ のとき、かつそのときに限る。したがって、平均（mean）や最頻値（mode）を中央値と比較するために、中央値そのものを求める必要はまったくない。平均または最頻値における F の値を計算し、それを $\frac{1}{2}$ と比べればよいのである。

解答

小問 (i)

確率の総和は 1 であるから、

$$1 = k\int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right)\mathrm{d}x = k\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{k}{(n+1)(n+2)},$$

よって、示すべきとおり $k = (n+1)(n+2)$ である。さらに

$$\mu = k\int_0^1 \left(x^{n+1} - x^{n+2}\right)\mathrm{d}x = (n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}.$$

小問 (ii)

$0 \le x \le 1$ に対して、

$$\mathrm{F}(x) = (n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right) = x^{n+1}\big((n+2) - (n+1)x\big).$$

$(0,1)$ 上で $\mathrm{f} > 0$ であるから、F はそこで狭義単調増加（strictly increasing）であり、中央値 m は $\mathrm{F}(m) = \frac{1}{2}$ を満たす唯一の点である。したがって

$$\mu < m \iff \mathrm{F}(\mu) < \tfrac{1}{2}.$$

ここで $\mu = \frac{n+1}{n+3}$ とすると、

$$(n+2) - (n+1)\mu = \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)^2}{n+3} = \frac{3n+5}{n+3},$$

であるから、

$$\mathrm{F}(\mu) = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+1} \frac{3n+5}{n+3}.$$

よって条件 $\mathrm{F}(\mu) < \frac{1}{2}$ は、両辺に正の量 $2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$ を掛けると次のようになる。

$$\frac{2(3n+5)}{n+3} < \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$\frac{2(3n+5)}{n+3} = \frac{6(n+3)-8}{n+3} = 6 - \frac{8}{n+3}$ かつ $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$ であるから、これはまさに与えられた不等式（inequality）である。したがって、その不等式が成り立つときには必ず、μ は中央値より小さい。

この不等式を証明するために $N = n+1$ とおくと、$N \geq 3$ は整数である。$\left(1+\frac{2}{N}\right)^N$ の二項展開（binomial expansion）の各項はすべて正であり、項数は $N+1 \geq 4$ であるから、和は最初の 4 項の和以上である。

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{N}\right)^N &\geq 1 + N\cdot\frac{2}{N} + \frac{N(N-1)}{2}\cdot\frac{4}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}\cdot\frac{8}{N^3} \\ &= 3 + 2\left(1-\frac{1}{N}\right) + \frac{4}{3}\left(1-\frac{3}{N}+\frac{2}{N^2}\right) \\ &= \frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2}.\end{aligned}$$

考えてみよう この 4 項の和は下界にすぎない。これが $6 - \frac{8}{N+2}$ より大きいことはどのように示せばよいだろうか。

差をとり、正の分母 $3N^2(N+2)$ を払う。

$$\begin{aligned}&3N^2(N+2)\left[\frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2} - 6 + \frac{8}{N+2}\right] \\ &\quad = N^2(N+2) - 18N(N+2) + 8(N+2) + 24N^2 \\ &\quad = N^3 + 8N^2 - 28N + 16.\end{aligned}$$

$N \geq 3$ のとき $N^2 + 8N - 28 \geq 9 + 24 - 28 = 5 > 0$ であるから、$N^3 + 8N^2 - 28N + 16 = N(N^2+8N-28) + 16 > 0$ である。したがって

$$6 - \frac{8}{n+3} < \frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2} \leq \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1},$$

となり、与えられた不等式はすべての整数 $n > 1$ について成り立つ。よって X の中央値は μ より大きい。

小問 (iii)

$(0,1)$ 上で

$$\mathrm{f}'(x) = k\left(nx^{n-1} - (n+1)x^n\right) = kx^{n-1}\big(n - (n+1)x\big),$$

であり、これは $x < \frac{n}{n+1}$ で正、$x > \frac{n}{n+1}$ で負である。したがって f は増加した後に減少し、最頻値は $M = \frac{n}{n+1}$ である。

小問 (ii) と同様に、$M > m$ となるのは $\mathrm{F}(M) > \frac{1}{2}$ のとき、かつそのときに限る。$(n+2) - (n+1)M = (n+2) - n = 2$ であるから、

$$\mathrm{F}(M) = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

となり、$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{4}$、すなわち次が成り立てばよい。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4.$$

> **考えてみよう** n が 2 以上の任意の値をとりうるとき、$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ についての与えられた事実はどのように役立つだろうか。

この関数は正の x に対して減少するから、任意の整数 $n \geq 2$ における値は $x = 2$ における値以下である。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4.$$

したがって $\mathrm{F}(M) > \frac{1}{2}$ であり、X の最頻値は中央値より大きい。

以上をまとめると、すべての $n > 1$ について 平均 $<$ 中央値 $<$ 最頻値 が成り立つ。

検算

- $n = 2$ とすると、平均は $\frac{3}{5} = 0.6$、最頻値は $\frac{2}{3} \approx 0.667$ である。$4x^3 - 3x^4 = \frac{1}{2}$ を数値的に解くと中央値は ≈ 0.6143 となり、ちょうど両者の間にある。また $\mathrm{F}(0.6) = 0.4752 < \frac{1}{2}$、$\mathrm{F}(\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} \approx 0.593 > \frac{1}{2}$ である。
- $n = 2$（$N = 3$）のとき展開はちょうど 4 項からなるので、下界は等号で成り立つ。両辺はともに $\frac{125}{27} \approx 4.63$ であり、$6 - \frac{8}{5} = 4.4$ を十分に上回っている。
- 平均 $<$ 中央値 $<$ 最頻値という大小関係は、2 から 79 までのすべての n についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 中央値を具体的に求めようとすること。方程式 $x^{n+1}(n+2-(n+1)x) = \frac{1}{2}$ にはきれいな解はなく、また解を求める必要もない。
- 不等号の向きを取り違えること。F は増加関数であるから、$\mu < m$ は $\mathrm{F}(\mu) < \frac{1}{2}$ に対応する。
- 二項展開の後ろの項を捨ててよい理由（それらはすべて正であること）を述べ忘れること。

STEP のその先へ

この確率密度はベータ分布（Beta distribution）Beta$(n+1, 2)$ であり、$[0,1]$ 上の分布族のなかで最も重要なものの一つで、ベイズ統計学（Bayesian statistics）の中心をなす。平均 < 中央値 < 最頻値という大小関係は、左側に長い裾をもつ分布（負の歪度（negative skew））に典型的なものであるが、普遍的な法則ではない。だからこそ、ここで証明する必要があったのである。小問 (iii) の減少関数は $x \to \infty$ のとき e に収束（converge）する。これは古典的な極限であり、解析学できちんと学ぶことになる。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）には、ベータ分布についての優れた解説がある。

解答例

STEP III 2022、第 1 問

純粋数学 • 多項式の根

STEP III 2022、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

媒介変数表示（parametrisation）を円の方程式に代入すると、「2 つの曲線はどこで交わるか？」という問いは「ある 4 次方程式（quartic）の解は何か？」という問いに変わる。それ以降は、4 次方程式を一度も解くことなく、すべてを解と係数の関係（relationships between roots and coefficients）だけで処理できる。役に立つもう一つの工夫は、逆数（reciprocal）$1/t_i$ が、同じ 4 次方程式の係数を逆順に並べた方程式の解になるという事実である。最後の小問では、「接する」とは重解（repeated root）をもつことを意味する。

解答

小問 (i)

パラメータ t に対応する点が C_2 上にあるための必要十分条件は

$$(ct-a)^2+\left(\frac{c}{t}-b\right)^2=r^2.$$

である。展開すると $c^2t^2-2act+a^2+\dfrac{c^2}{t^2}-\dfrac{2bc}{t}+b^2=r^2$ となる。$t\neq 0$ であるから、解を増やしたり失ったりすることなく両辺に t^2 を掛けることができ、

$$c^2t^4-2act^3+(a^2+b^2-r^2)t^2-2bct+c^2=0.$$

を得る。よって各 t_i は $(*)$ の解である。異なる t の値は異なる点を与える（x 座標 ct が異なる）ので、4 つの点 P_i は 4 つの相異なるパラメータを与える。4 次方程式の解は高々 4 個であるから、$t_1,\ldots,t_4$ はちょうど $(*)$ の解全体である。

小問 (ii)

$(*)$ を c^2 で割ると、解の和および 2 つずつの積の和は

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

である。$\left(\sum t_i\right)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$ を用いると、

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}\left(a^2-b^2+r^2\right),$$

となり、示すべき式が得られる。

考えてみよう 面倒な通分をせずに $\sum 1/t_i^2$ を求めるにはどうすればよいか？

$(*)$ において $u = 1/t$ とおく。0 は解ではない（定数項が $c^2 \neq 0$ である）ので、$(*)$ を t^4 で割ることができ、

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

すなわち $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$ を得る。この方程式の解は $1/t_i$ である。これは $(*)$ の a と b を入れ替えたものであるから、同じ計算により

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}\left(b^2-a^2+r^2\right).$$

が得られる。

小問 (iii)

点 P_i は $(ct_i,\, c/t_i)$ であるから、$OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$ である。和をとり、小問 (ii) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。中心 (a,b) が完全に消えていることに注意しよう。

小問 (iv)

考えてみよう 「接する」とは、$(*)$ の解の言葉でいえばどういうことか？

$f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$ とおく。これは動点と中心との距離の2乗から r^2 を引いたものである。曲線がパラメータ t_0 で円に接するのは、$f(t_0) = 0$ かつ $f'(t_0) = 0$ のときである。すなわち、点が円上にあり、かつ1次の近似で中心からの距離が変化していないので、そこでの曲線の向きは半径に垂直であり、これは円の接線の向きにほかならない。（ここでは速度ベクトル $(c, -c/t^2)$ が決して零にならないことを用いている。）$(*)$ の4次式は $t^2 f(t)$ であり、$t_0 \neq 0$ であるから、f が t_0 を重解にもつことと $(*)$ が t_0 を重解にもつことは同値である。

したがって、C_1 と C_2 が相異なる2点（パラメータ $\alpha \neq \beta$）で接するならば、α と β はともに $(*)$ の重解である。これで4つの解すべてが尽くされるので、

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2+b^2-r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

が成り立つ。**解の積**。定数項を比較すると $c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$ であるから、$(\alpha\beta)^2 = 1$ すなわち $\alpha\beta = \pm 1$ である。

解の和。t^3 の項を比較すると $2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$ であるから、$\alpha+\beta = \dfrac{a}{c}$ である。

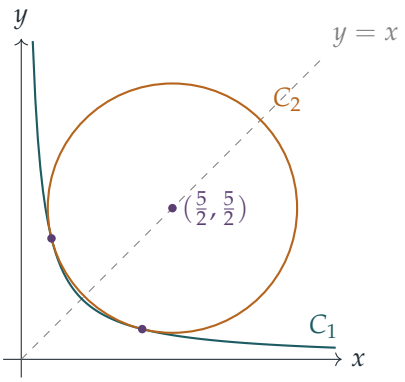
3つずつの積の和。t の項を比較すると $2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$ であるから、$\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$ である。

後の2式を割り算する（あるいは2番目の式を3番目の式に代入する）と $b = \alpha\beta\, a$ を得る。よって

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

であり、中心 (a, b) は $y = x$ または $y = -x$ 上にある。（$a = 0$ ならば $b = 0$ でもあり、中心は原点となるが、原点は両方の直線上にある。）

図は $c = 1$、$\alpha = 2$、$\beta = \frac{1}{2}$ の場合を示している。係数を比較すると $a = b = \frac{5}{2}$、$r^2 = \frac{17}{4}$ となり、円は双曲線と $(2, \frac{1}{2})$ および $(\frac{1}{2}, 2)$ で接する。



検算

- 小問 (iii) において、原点を中心とする円 $x^2+y^2=r^2$ をとり、$c=1$、$r^2>2$ とする。対称性から 4 つの点は $(p,q),(q,p),(-p,-q),(-q,-p)$ であり、いずれも原点からの距離は r であるから、総和は確かに $4r^2$ となる。
- 図の例では、$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ と $(2,\frac{1}{2})$ の距離の 2 乗は $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}=4.25$ であり、あるべき値になっている。そこでの半径の向き $(-\frac{1}{2},-2)$ は曲線の向き $(1,-\frac{1}{4})$ に垂直であり、接していることが確かめられる。
- 小問 (ii) の公式は、ランダムに選んだ数千個の円について、4 次方程式を数値的に解くことでコンピュータにより確認した。

よくある間違い

- $\sum t_it_j$ の符号を間違える。$t^4+pt^3+qt^2+\ldots$ に対して、解の和は $-p$ であるが、2 つずつの積の和は $+q$ である。
- 小問 (iv) で解の積だけを用いる。これからは $\alpha\beta=\pm1$ が得られるが、それだけでは (a,b) について何もわからない。a と b を引き出すには、もう一つ係数の比較が必要である。
- 「接する」ことがなぜ重解を与えるのかを説明しない。その理由は条件 $f(t_0)=f'(t_0)=0$ と $t_0\neq0$ にある。

STEP のその先へ

解と係数の関係に現れるのは基本対称式（elementary symmetric functions）である。古典的な定理によれば、$\sum t_i^2$ や $\sum t_i^{-2}$ のような解の**任意の**対称式（symmetric

polynomial）は係数を用いて表すことができる。$u = 1/t$ という係数の反転の工夫は射影幾何（projective geometry）の考え方の入り口であり、二次曲線（conic）と円が高々 4 点でしか交わらないという事実は、平面曲線の交わりに関するベズー（Bézout）の定理の特別な場合である。多項式とその解についてさらに学ぶには Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、この種の問題の演習には Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2022、第 2 問

純粋数学 • 無限降下法

> **STEP III 2022、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.5 節「**無限降下法**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/infinite-descent.html

鍵となる考え方

これはフェルマー（Fermat）の**無限降下法**（method of infinite descent）である。0 でない整数による解が存在すると仮定する。整除性（divisibility）の議論により、すべての変数が共通の因数をもつことが示される。その因数で割ると、真に小さい 0 でない整数による、同じ種類の（あるいはそれに近い種類の）新しい解が得られる。正の整数はいつまでも減り続けることはできないので、これが永遠に続くことはありえない。各小問でなすべきことは、注目すべき正しい素数（prime、2 または 3）を見つけ、新しい解が本当に元の解と同じ形をしていることを確かめることである。

解答

全体を通して二つの事実を用いる。素数 m が x^k を割り切るならば、m は x を割り切る。また、x が $m \geq 2$ の 0 でない倍数ならば、x/m は $|x/m| < |x|$ を満たす 0 でない整数である。

小問 (i)

a, b, c を 0 でない整数として、$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ と仮定する。このとき

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

は偶数である。奇数の 3 乗は奇数であるから、a は偶数である。$a = 2p$ とおく。すると p は $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$ を満たす 0 でない整数である。代入すると

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

これが最初の主張である。

次に、新しい方程式に対して同じ議論を繰り返す。$b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$ が得られるので b は偶数であり、$b = 2q$ とおくと

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

もう一度繰り返すと、$c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$ であるから $c = 2r$ とおけて、

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

ここで $p = a/2$、$q = b/2$、$r = c/2$ は、$|p| < |a|$、$|q| < |b|$、$|r| < |c|$ を満たす 0 でない整数であり、これが求めるものであった。

考えてみよう なぜこのことから、単に「別の解がある」ということではなく、解がまったく存在しないことがいえるのだろうか？

0 でない整数による解が存在すると仮定する。そのすべての中から、$|a|$ ができるだけ小さいものを一つ選ぶ。空でない正の整数の集合には必ず最小元が存在するので、このような選び方は可能である。すると上の議論により、$|p| < |a|$ を満たす 0 でない整数による別の解 (p, q, r) が得られ、これは $|a|$ の最小性に矛盾する。したがって、そのような整数 a、b、c は存在しない。（同じことであるが、この操作を続けると正の整数の無限に続く狭義単調減少列 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$ が得られることになり、それは不可能である。）

小問 (ii)

今度用いる素数は 3 である。a, b, c を 0 でない整数として、$9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$ と仮定する。

- $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$ であるから、3 は $10b^3$ を割り切る。3 は 10 を割り切らないので b^3 を割り切り、したがって b を割り切る。$b = 3q$ とおく。すると $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$、すなわち

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

- 次に $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$ であるから $3 \mid c$ である。$c = 3r$ とおくと $3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$、すなわち

$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$

▶ 最後に $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$ であるから $3 \mid a$ である。$a = 3p$ とおくと $27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$、すなわち

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

よって $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$ は、$|p| < |a|$ を満たす 0 でない整数による同じ方程式の解である。小問 (i) と同様に、$|a|$ が最小となる解を選ぶ。これにより矛盾が生じるので、0 でない整数解は存在しない。

小問 (iii)

3 の倍数でない整数は、ある整数 n を用いて $3n \pm 1$ と表せる。このとき

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

であり、これは 3 の倍数より 1 大きい。一方、3 の倍数の 2 乗は 3 の倍数（実際には 9 の倍数）である。

よって、平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であり、余りが 0 となるのは元の数自身が 3 の倍数であるときに限る。$x^2 + y^2$ について、考えられる余りは

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 1 = 2.$$

である。したがって、$x^2 + y^2$ が 3 の倍数となるのは両方の余りが 0 のとき、すなわち x と y がともに 3 の倍数のときに限る。

さて、a, b, c を 0 でない整数として、$a^2 + b^2 = 3c^2$ と仮定する。右辺は 3 の倍数であるから、いま示した結果により $a = 3p$、$b = 3q$ と表せる。このとき

$$9p^2 + 9q^2 = 3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 3\left(p^2 + q^2\right).$$

よって c^2 は 3 の倍数である。最初の結果より、c は 3 の倍数でなければならない。そうでなければ c^2 は 3 の倍数より 1 大きくなるからである。$c = 3r$ とおくと

$$9r^2 = 3\left(p^2 + q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2 + q^2 = 3r^2.$$

これは、$|p| < |a|$ を満たす 0 でない整数による同じ方程式の解である。$|a|$ が最小となる解を選べば前と同じ矛盾が生じるので、0 でない解は存在しない。

小問 (iv)

ここでは 4 を法（modulo）として考える。偶数 $2m$ の 2 乗は $4m^2 \equiv 0$ であり、奇数 $2m + 1$ の 2 乗は $4m^2 + 4m + 1 \equiv 1 \pmod 4$ である。よって、三つの平方数の和を 4 で割った余りは、三つのうち奇数であるものの個数（0、1、2 または 3）に等しい。これが 4 の倍数となるのは、三つの数がすべて偶数のときに限る。

考えてみよう $a^2+b^2+c^2=4abc$ のすべてを半分にすると、同じ方程式に戻るだろうか？

戻らない。$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$ とすると、方程式は $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$、すなわち $p^2+q^2+r^2=8pqr$ となる。係数が 2 倍になっている。そこで、半分にする操作で**保たれる**、より強い主張を証明する。

主張. どの整数 $k\geq 2$ に対しても、$a^2+b^2+c^2=2^kabc$ を満たす 0 でない整数は存在しない。

存在したと仮定する。そのようなすべての解（$k\geq 2$ は任意）の中から、$|a|$ ができるだけ小さいものを選ぶ。$k\geq 2$ であるから、右辺 2^kabc は 4 の倍数である。よって $a^2+b^2+c^2$ は 4 の倍数であり、上の注意により a、b、c はすべて偶数である：$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$。このとき

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad\Longrightarrow\quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

これは指数が $k+1\geq 2$ で $|p|<|a|$ を満たす 0 でない整数による解であり、a の選び方に矛盾する。よって主張は成り立つ。$k=2$ の場合から、$a^2+b^2+c^2=4abc$ を満たす 0 でない整数 a,b,c は存在しないことがわかる。

検算

- $|a|,|b|,|c|\leq 40$ を満たす 0 でないすべての a,b,c についてコンピュータで探索したところ、四つの方程式のいずれの解も、$2\leq k\leq 6$ に対する $a^2+b^2+c^2=2^kabc$ の解も見つからなかった。
- 小問 (iv) の議論が成り立つのは、係数が 2 の累乗だからである。この形の方程式の中には解を**もつ**ものもある。たとえば $1^2+1^2+1^2=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ や $3^2+3^2+3^2=1\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ である。これらでは係数が奇数なので、mod 4 の議論は手がかりをもたない。
- 惜しい例で降下法を試してみよう：$a^2+b^2=3c^2$ は $(a,b,c)=(1,1,1)$ では成り立たない。$1+1=2$ が 3 の倍数ではないからであり、これはまさに小問 (iii) における「$1+1=2$」の場合である。

よくある間違い

- 降下法からなぜ矛盾が生じるのかを述べ忘れること。「より小さい解が得られる」というだけでは、最小の解（あるいは正の整数はいつまでも減り続けられないとい

う事実）を持ち出すまでは証明にならない。

- 小問 (iv) で、半分にしても方程式は変わらないと主張すること。実際には変わる：係数が 2 倍になるのであり、だからこそ主張を強める必要があるのである。
- 理由を述べずに「$3 \mid c^2$ より $3 \mid c$」と書くこと。ここでの理由は小問 (iii) の最初の結果である（より一般には、3 が素数であることによる）。

STEP のその先へ

無限降下法は、フェルマーが $x^4 + y^4 = z^2$ には正の整数解が存在しないことを証明し、それによって彼の最終定理（Last Theorem）の $n = 4$ の場合を解決した方法である。ここでの各降下は、適当な素数の累乗を法として、変数がすべてはその素数で割り切れないような解をこの方程式がもたないことを示すことに相当する。これは p 進数（p-adic numbers）や、現代整数論における局所大域（local–global）の考え方への第一歩である。有名な方程式 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$（マルコフ（Markov）方程式）は無限に多くの解をもち、それらは美しい木構造によって生成される。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、降下法、合同式、平方和をちょうどこの水準で扱っている。

解答例

STEP III 2022、第 3 問

純粋数学 ・ 陰関数の微分

STEP III 2022、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を行う。停留点（stationary point）では $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の分子が 0 にならなければならず、そこから y が x で表される（あるいは両者の間に一次の関係が得られる）。これを曲線の方程式に代入し直すと x だけの方程式が一つ残り、問題は「その方程式が二つの実数解をもつのはいつか」に帰着する。(i) ではそれは形を変えた二次方程式であり、(ii) では四次方程式（quartic）である。後者の解の個数を数えるには、その極値点（turning point）を求めればよい。

解答

小問 (i)

$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ を x について陰関数微分すると、

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

停留点では $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ であるから $2ax + by = 0$、すなわち $y = -\frac{2a}{b}x$ である（$abc \neq 0$ なので b で割ってよい）。これを曲線の方程式に代入すると、

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

$4ac - b^2 \leq 0$ ならば、すべての x に対して左辺は ≤ 0 となる（$a > 0$ であったことに注意）ので、停留点は一つも存在しない。したがって、曲線が二つの停留点をもつな

らば $4ac - b^2 > 0$、すなわち $b^2 < 4ac$ でなければならず、これが示すべきことであった。(逆に $b^2 < 4ac$ のときは $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$ が得られ、ちょうど二つの点が得られる。)

考えてみよう これらの点において $bx + 2cy$ も 0 になり、導関数がそもそも定義されない、ということはありうるだろうか？

$2ax + by = 0$ と $bx + 2cy = 0$ が同時に成り立つとすると、行列式(determinant)$4ac - b^2$ は 0 でないので、解は $x = y = 0$ のみであり、これは曲線上にない。したがって、二つの点では確かに $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ である。

小問 (ii)

$ay^3 + bx^2y + cx = 1$ を陰関数微分すると、

$$(3ay^2 + bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2bxy + c = 0.$$

よって停留点では $2bxy + c = 0$ である。$c \neq 0$ であるから $x \neq 0$ であり、したがって $y = -\dfrac{c}{2bx}$ である。これを曲線の方程式に代入すると、

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3} - \frac{cx}{2} + cx = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3} + \frac{cx}{2} = 1.$$

両辺に $8b^3x^3$ を掛けて整理すると、

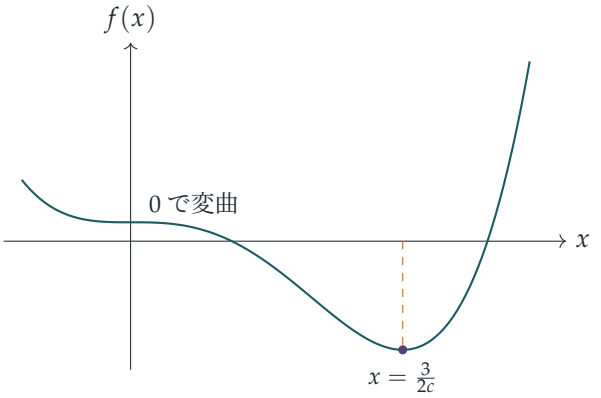
$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0,$$

となり、これが求める方程式である。

左辺を $f(x)$ とおく。$y = -c/(2bx)$ は x によって定まるので、各停留点の x 座標はすべて異なる。したがって、停留点が二つあるということは、f が少なくとも二つの相異なる実数解をもつということである。f の解の個数を数えるために、その導関数を調べる。

$$f'(x) = 16cb^3x^3 - 24b^3x^2 = 8b^3x^2(2cx - 3).$$

因数 x^2 は符号を変えないので、f' が符号を変えるのは $x = \frac{3}{2c}$ においてのみである。$c > 0$ と仮定する。このとき最高次の係数 (leading coefficient) $4cb^3$ は正であり ($b > 0$ なので)、f は $x < \frac{3}{2c}$ で狭義単調減少、$x > \frac{3}{2c}$ で狭義単調増加である。点 $x = 0$ は停留点ではあるが変曲点 (point of inflection) にすぎない。よって f は $\frac{3}{2c}$ の両側にそれぞれ高々一つの解しかもたず、二つの相異なる解をもつのは、その最小値が負であるとき、かつそのときに限る。$c < 0$ ならばすべてが逆になる。f は増加したのち減少し、二つの相異なる解をもつのは、その最大値が正であるとき、かつそのときに限る。いずれの場合も、条件は $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right) < 0$ である。



$a=-1, b=c=1$ の場合：$f(x)=4x^4-8x^3+1$ はただ一つの極値点、すなわち $x=\frac{3}{2}$ における極小点をもち、二つの実数解をもつ。

次に、極値点での値を計算する。

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3\cdot\frac{81}{16c^4}-8b^3\cdot\frac{27}{8c^3}-ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3}-\frac{108b^3}{4c^3}-ac^3=-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

よって

$$c\,f\left(\tfrac{3}{2c}\right)=-\frac{4ac^6+27b^3}{4c^2},$$

であり、これが負となるのはちょうど $4ac^6+27b^3>0$ のときである。したがって、曲線が二つの停留点をもつならば $4ac^6+27b^3>0$ である。

小問 (iii)

第 2 式と第 3 式は、$2bxy+c$ と $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の係数 $3ay^2+bx^2$ がともに 0 になることを述べているので、これは (ii) の方法が破綻する曲線上の点である。$c\neq 0$ であるから、第 2 式より $x\neq 0$ かつ $y=-\dfrac{c}{2bx}$ である。最初の二つの式は (ii) で用いたものとまったく同じであるから、x は

$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0. \qquad (*)$$

を満たす。$y=-c/(2bx)$ を第 3 式に代入すると、

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2}+bx^2=0 \quad\Longrightarrow\quad 4b^3x^4=-3ac^2.$$

これに c を掛けると $(*)$ の第 1 項は $-3ac^3$ となるので、$(*)$ は

$$-3ac^3-8b^3x^3-ac^3=0 \quad\Longrightarrow\quad x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}.$$

となる。$x^4 = -\dfrac{3ac^2}{4b^3}$ をこれで割ると（$x \neq 0$ なので割ってよい）、

$$x = \frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)} = \frac{3}{2c}.$$

を得る。つまり、この解は (ii) の f の極値点にちょうど位置している。$x = \frac{3}{2c}$ を $x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}$ に代入し直すと、

$$\frac{27}{8c^3} = -\frac{ac^3}{2b^3} \quad \Longrightarrow \quad 54b^3 = -8ac^6 \quad \Longrightarrow \quad 4ac^6 + 27b^3 = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。（同じことだが、(ii) の公式により $f\left(\frac{3}{2c}\right) = 0$ である。）これは (ii) の境界の場合である。四次方程式の二つの解が極値点で合わさって重根（repeated root）となり、曲線はそこで二つの停留点の代わりに特異点をもつ。

検算

- (i) で $a = c = 1, b = 1$ とする。曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ は楕円であり、$b^2 = 1 < 4$ である。その停留点は $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$ にあり、確かに曲線上にある。
- (ii) で $a = -1, b = c = 1$ とすると $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$ であり、f の最小値は $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$ となって、$-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$ と一致する。
- (iii) で $a = -2, c = 1.3$ とし、b を $27b^3 = -4ac^6$ となるように選ぶ。すると $x = \frac{3}{2c}$, $y = -\frac{c}{2bx}$ は丸め誤差の範囲で三つの式すべてを満たす。また、数千個のランダムな (a, b, c) に対するコンピュータによる検証でも、停留点の個数が (i) と (ii) の条件と一致することが確かめられた。

よくある間違い

- $x = 0$ が四次式の臨界点であることを忘れる。これは変曲点であって極値点ではなく、そのことを述べることで初めて解が高々二つであると結論できる。
- c の符号を見落とす。極値点が極小点となるのは $c > 0$ のときに限られる。条件を $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$ と書けば、両方の場合を一度に扱える。
- (i) で、$b^2 = 4ac$ の場合は $0 = 1$ となり、やはり停留点をもたないことに触れない。

STEP のその先へ

量 $4ac^6 + 27b^3$ は、定数倍を除いてこの四次式の**判別式**（discriminant）である。二次式に対する $b^2 - 4ac$（および三次式 $t^3 + pt + q$ に対する $4p^3 + 27q^2$）と同様に、これは

四次式が重根をもつときにちょうど 0 になる。小問 (iii) はその幾何学的な意味を示している。重根は曲線の**特異点**（singular point）、すなわち $ay^3 + bx^2y + cx$ の二つの偏導関数（partial derivative）が同時に 0 になる点に対応する。特異点と判別式は代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。多項式と曲線に関連する考え方への、やさしく視覚的な入門としては Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）を、この種の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を手に取ってみるとよい。

解答例

STEP III 2022、第 4 問

純粋数学 • 無限積

> **STEP III 2022、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.5 節「**ヴィエトの無限積**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/viete.html

鍵となる考え方

すべては 2 倍角の公式（double-angle formula）$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$ を繰り返し用いることに基づいている。1 回用いるごとに sinh の引数は半分になり、cosh の因数が 1 つ残る。n 回半分にすると、残った $\sinh(x/2^n)$ は非常に小さくなり、$x/2^n$ とほぼ同じように振る舞う。したがって $n \to \infty$ とすれば、有限の恒等式が無限積（infinite product）に変わる。最後の 2 つの小問は、うまく選んだ x の値でこの無限積を評価したものと、その三角関数版である。

解答

小問 (i)

$P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$ とおく。すべての正の整数 n に対して $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$ が成り立つことを証明する。

基本の場合（*base case*）$n = 1$。 $\theta = x/2$ として 2 倍角の公式を用いると、$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ となり、これは $n = 1$ の場合の主張である。

帰納段階（*inductive step*）。ある $n = k$ で結果が成り立つと仮定する。$\theta = x/2^{k+1}$ として 2 倍角の公式を用いると

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

となり、これは $n=k+1$ の場合の結果である。数学的帰納法（induction）により、すべての正の整数 n に対して成り立つ。

導出。 $x\neq 0$ ならば $x/2^n\neq 0$ であるから、$\sinh(x/2^n)\neq 0$ である（sinh の零点は 0 のみである）。したがって恒等式の両辺を $x\sinh(x/2^n)/2^n$ で割ることができ、

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

を得る。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$y\neq 0$ のとき、マクローリン級数（Maclaurin series）を y で割ると

$$\frac{\sinh y}{y} = 1+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}+\cdots = 1+y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

となる。

> **考えてみよう** 「最初の項以外はすべて 0 に近づく」と言うだけで十分だろうか。

十分とはいえない。項は無限個あるので、その和を上から抑えるべきである。$0<|y|\leq 1$ のとき $y^{2r-2}\leq 1$ であるから

$$0\leq\frac{\sinh y}{y}-1\leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1-1),$$

となり、右辺は $y\to 0$ のとき 0 に収束（converge）する。よって $\dfrac{\sinh y}{y}\to 1$ であり、逆数をとって $\dfrac{y}{\sinh y}\to 1$ である。

ここで $x\neq 0$ を固定し、(i) の恒等式で $n\to\infty$ とする。$y=x/2^n$ とおくと $y\to 0$ であるから、因数 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ は 1 に収束する。したがって左辺は $\dfrac{\sinh x}{x}$ に収束し、一方で右辺は部分積（partial product）$P_n(x)$ である。よって部分積は $\dfrac{\sinh x}{x}$ に収束し、これはまさに次の主張である。

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

小問 (iii)

$x = \ln 2$ のとき $\mathrm{e}^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$ であるから、

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n} + 1}{2 \times 2^{1/2^n}} = \frac{1 + 2^{1/2^{n-1}}}{2 \times 2^{1/2^n}},$$

となる（分子と分母に $2^{1/2^n}$ を掛けた）。$n = 1$ のときこれは $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ となり、$n = 2$ のときは

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1 + 2^{1/2}}{2 \times 2^{1/4}},$$

となって、示すべき式を得る。

(ii) の左辺については、$\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ であるから $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4 \ln 2}$ である。右辺については、最初の N 個の因数の部分積は

$$P_N(\ln 2) = \frac{\prod_{n=1}^{N} \left(1 + 2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N \cdot 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N}}} = \frac{3}{2} \cdot \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2} \cdot \frac{1}{2^{1 - 1/2^N}},$$

である。ここで $n = 1$ の因数 $(1+2)/2$ をくくり出し、$k = n - 1$ と添字を付け替え、指数部分の等比級数（geometric series）の和を計算した。$N \to \infty$ のとき $2^{1-1/2^N} \to 2$ であり、(ii) より $P_N(\ln 2) \to \dfrac{3}{4 \ln 2}$ である。よって部分積 $\prod_{k=1}^{N-1} \frac{1+2^{1/2^k}}{2}$ は収束し、

$$\frac{3}{4 \ln 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2},$$

となる。両辺の $\frac{3}{4}$ を約すと

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1 + 2^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{4}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{8}}}{2} \times \cdots.$$

を得る。

小問 (iv)

sin と cos についても、まったく同じ議論がそのまま通用する。$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ が同じ形をしているからである。帰納法により

$$\sin x = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

を得る。$0 < x < \pi$ のとき $0 < x/2^n < \pi$ であるから $\sin(x/2^n) \neq 0$ であり、先ほどと同様に割ることができる。マクローリン級数 $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$ から、$0 < |y| \leq 1$ に対して

$$\left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| \leq y^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1) \to 0,$$

が得られるので $\sin y/y \to 1$ であり、$n \to \infty$ とすると

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

となる。（あるいは、(ii) で $x = \mathrm{i}t$ とおき、$\cosh(\mathrm{i}t) = \cos t$ と $\sinh(\mathrm{i}t) = \mathrm{i}\sin t$ を用いてもよい。ただし (ii) の級数による議論は実数 y に対するものだったので、直接やり直すほうがすっきりする。）

$x = \frac{\pi}{2}$ とすると、左辺は $\dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$ であり、因数は $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ などとなる。

考えてみよう $\cos(\pi/8)$、$\cos(\pi/16)$、... を入れ子になった平方根（nested square roots）に直すにはどうすればよいか。

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を $2\cos\theta = \sqrt{2 + 2\cos 2\theta}$ の形で用いる。ここで正の平方根をとったのは、$\cos\theta > 0$ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で成り立つからである。$c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$ とおく。すると $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ であり、$\theta = \pi/2^{n+2}$ とすると

$$c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}.$$

となる。したがって $c_1 = \sqrt{2}$、$c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$、$c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ などとなり、積の第 n 因数は $c_n/2$ である。よって

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

が得られる。これは 1593 年のヴィエト（Viète）の公式である。

検算

- (i) で $n = 1$、$x = 2\theta$ とおくと、当然ながら 2 倍角の公式に戻る。
- (iii) では $\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$ であり、一般の n に対する式は $n = 1$ のときこれと一致する。
- 数値的には、(iii) の積は速く収束する。最初の 60 個の因数で 1.442695... となり、$1/\ln 2 = 1.4426950\ldots$ と一致する。また (iv) の積は 0.6366197... となり、$2/\pi$ と一致する。どちらもコンピュータで有効数字約 15 桁まで確認した。

よくある間違い

- $\sinh(x/2^n)$ で割るときに、$x \neq 0$ であるからそれが零でないことに触れない。

- (iii) での 1 つずれの誤り（off-by-one error）。$n = 1$ の因数は $3/(2\sqrt{2})$ であり、$(1 + 2^{1/2^k})/2$ の形ではない。また余分な累乗 $2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdots$ はまとめると因数 2 になり、1 にはならない。
- 問題が求めている級数からの議論をまったくせずに、「$y/\sinh y \to 1$」を仮定してしまう。

STEP のその先へ

無限積 $\prod a_n$ は、無限和が部分和の極限として定義されるのと同様に、部分積の極限として定義される。対数をとると一方が他方に変わるので、$\prod(1 + u_n)$ の収束は $\sum u_n$ の収束と密接に関係している。ここで得た $\sin x/x$ の積は、オイラー（Euler）によるさらに有名な積 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1 - x^2/(k^2\pi^2)\right)$ と並ぶものであり、後者からは $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が導かれる。小問 (ii) のような議論を厳密にするための極限の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読むとよい。

解答例

STEP III 2022、第 5 問

純粋数学 ・ 対称な定積分

STEP III 2022、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

対称な区間 $[-a, a]$ 上では、置換（substitution）$x \mapsto -x$ によって積分を $[0, a]$ 上に折りたたみ、x における値と $-x$ における値を組にすることができる。$1/(1+\text{何か})$ の形の被積分関数では、組 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$ がちょうど 1 になるのは $pq = 1$ のときであり、しかもそのときに限る。$\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$ はその典型例である。この問題の核心は、この組み合わせに気づくこと、そして答えが a になるのはそれが**唯一**の場合であるのはいつかを見抜くことにある。

解答

小問 (i)

$I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$ とおく。$x = -u$ と置換すると（$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ であり、積分の上端と下端が入れ替わってもとに戻る）、

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{u}+1}\,\mathrm{d}u,$$

となる。ここで分母と分子に e^{u} を掛けた。これを I のもとの形と足し合わせると、

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

よって、すべての $a \geq 0$ に対して $I = a$ であり、題意は示された。

小問 (ii)

説明。 $a \geq 0$ に対して $G(a) = \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$ と定める。g は連続（continuous）であるから、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により G は微分可能で、$G'(a) = g(a)$ が成り立つ（$a = 0$ では片側微分係数（one-sided derivative）とする）。ところが G は $[0,\infty)$ 上で恒等的に 0 であるから、そこでの導関数は 0 である。したがって、すべての $a \geq 0$ に対して $g(a) = 0$ である。（連続性は重要である。連続でなければ、g はどの積分にも影響を与えずに孤立した点で 0 でない値をとりうる。）

積分を折りたたむ。 0 で分割し、左半分で $x = -u$ とおく：

$$\int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{f}(-u)}.$$

$a = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x$ と書くと、

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} - a = \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{ここで} \quad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)} - 1.$$

を得る。$\mathrm{f} \geq 0$ であるから、どちらの分母も 1 以上であり、g は連続である。

? **考えてみよう** いま説明した結果は一方向の主張である。「必要十分」（if and only if）のうちどちらの向きを与えるのか。また、もう一方の向きはどこから得られるのか。

- すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ ならば、$\int_0^a g = 0$ であり、すべての $a \geq 0$ に対して積分は a に等しい。この向きはただちに分かる。
- 逆に、すべての $a \geq 0$ に対して積分が a に等しいならば、すべての $a \geq 0$ に対して $\int_0^a g = 0$ であり、最初の段落の結果（この連続な g に適用する）により、すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ となる。

したがって、積分に関する条件が成り立つのは、すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ であるとき、かつそのときに限る。

積の条件。 $p = \mathrm{f}(x)$、$q = \mathrm{f}(-x)$ とおく。両辺に $(1+p)(1+q) > 0$ を掛けると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 1 &\iff (1+q) + (1+p) = (1+p)(1+q) \\ &\iff 2 + p + q = 1 + p + q + pq \\ &\iff pq = 1. \end{aligned}$$

よって、すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ であることは、すべての $x \geq 0$ に対して $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ であることと同値である。最後に、式 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$ は x を $-x$ に置き換え

ても変わらないので、それがすべての $x \geq 0$ に対して 1 に等しいことと、すべての実数 x に対して 1 に等しいことは同値である。以上で同値関係の連鎖が完成する。

小問 (iii)

先ほどとまったく同じように積分を折りたたむ。今度は左半分で $\mathrm{h}(-u) = \mathrm{h}(u)$ を用いる：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{a} \mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

なぜなら、小問 (ii) で示した同値性により、$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ のときは常に括弧内が 1 に等しいからである。（条件 $\mathrm{f} \geq 0$ と連続性は、すべての被積分関数を連続にするためのものにすぎない。）

小問 (iv)

考えてみよう $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$ を $\dfrac{\text{定数}}{1+\mathrm{f}(x)}$ の形に書くにはどうすればよいか。

$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$ であるから、分母と分子に e^{x} を掛けて

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x} = \frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

を得る。$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{2x}$ とおく。これは連続かつ正であり、$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} = 1$ を満たす。また $\mathrm{h}(x) = 2\cos x$ とおく。これは連続な偶関数（even function）である。$a = \frac{1}{2}\pi$ として小問 (iii) を用いると、

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = 2.$$

検算

- 小問 (i) は小問 (iii) で $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x}$、$\mathrm{h} \equiv 1$ とした特別な場合であり、当然ながら $\int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a$ を与える。
- 反例：$\mathrm{f}(x) = x^2$ では $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = x^4 \neq 1$ であり、実際 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \neq 1$ となる。
- 小問 (iv) の積分をシンプソンの公式（Simpson's rule）で数値的に計算すると

2.0000000 となる。また、小問 (iii) の恒等式は、$f = e^{(\text{奇関数})}$ と偶関数 h を無作為に多数選んで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (ii) の「必要十分」の一方の向きしか証明しないこと。積分に関する条件から $g = 0$ に戻る段階こそ、最初の結果（および g の連続性）が必要になるところである。
- $x \geq 0$ で $f(x)f(-x) = 1$ が成り立てば、なぜすべての x で成り立つのかを述べ忘れること。この式は $x \mapsto -x$ に関して対称である。
- 小問 (iv) で、$2\cos x/(1 + e^{2x})$ と書き直さずに $e^{-x}\cos x/\cosh x$ を直接積分しようとすること。

STEP のその先へ

小問 (ii) の議論は微分積分学の基本定理を「逆向きに」使ったものであり、解析学で連続性の仮定がこれほど頻繁に現れる理由もここにある。積分は個々の点で何が起きているかを見ることができないので、積分から関数の値を復元できるのは連続性があるときだけなのである。折りたたみの技法は、関数を偶関数部分と奇関数部分に分解することの親戚である。ここでは、$\frac{1}{1+f(x)} - \frac{1}{2}$ が奇関数となるのは、ちょうど $f(x)f(-x) = 1$ のときである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）では、基本定理と、なぜ連続性が必要なのかが丁寧に扱われている。

解答例

STEP III 2022、第 6 問

純粋数学 ・ 転がる円と接線

STEP III 2022、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は 2 次のテイラー展開（Taylor expansion）であり、その真の要点は最後の行にある注意である。すなわち、1 次の項が消えるときには、比は 2 次の項によって決まる。小問 (ii) では、転がりの条件から、接点を通過する二つの円の弧の長さが等しいことがわかり、これにより C_1 がどれだけ回転したかがわかる。(c) の特別な点では、弦（chord）における 1 次の項がちょうど打ち消し合うので、(i) の 2 次の項が必要になる。

解答

小問 (i)

α が小さいとき、$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ および $\sin\alpha \approx \alpha$ であり、誤差は α^3 のオーダーである。よって

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\right) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

となり、題意が示された。同様にして

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

$(*)$ の分子と分母を α で割ると

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

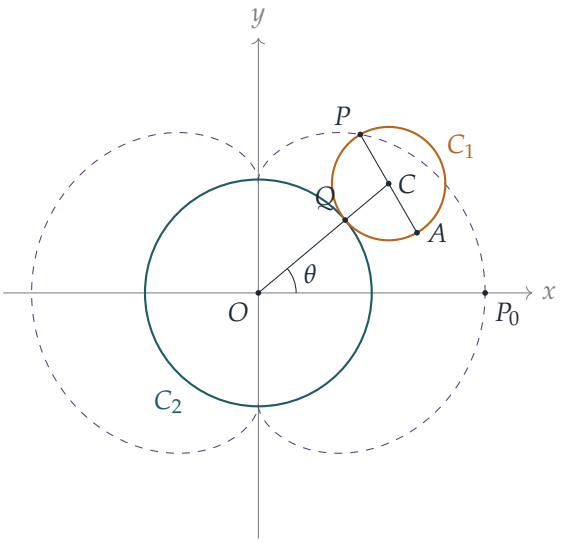
となる。分母は $-\sin\theta \neq 0$ に近づくので、この極限は問題なく存在する。

$\sin\theta = 0$ ならば $\cos\theta = \pm 1$ であり、分母の 1 次の項が消える：

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

よって $(*)$ は有限の極限をもたない。その大きさは限りなく大きくなり、$\alpha \to 0^+$ のとき $-\infty$ に、$\alpha \to 0^-$ のとき $+\infty$ に発散する。（幾何学的には、単位円の角 θ から $\theta+\alpha$ への弦が垂直になり、その傾き（gradient）が発散するのである。）

小問 (ii)(a)



図は $n = 3$ の場合であり、破線の曲線が P の軌跡である。C を C_1 の中心とする。二つの円は Q で接しているので、点 O、Q、C は一直線上にあり、$OC = (n-1)a + a = na$ である。よって

$$\overrightarrow{OC} = na(\cos\theta, \sin\theta),$$

であり、C から見て点 Q は $\theta + \pi$ の方向にある。

A を、C_1 上で P と直径の反対側にある点とする。これは最初に C_2 と接していた C_1 上の点であり、そのとき $((n-1)a, 0)$ にあった。滑らずに転がる（rolling without slipping）ということは、C_1 の A から Q までの弧の長さが、接点が C_2 上を移動した弧の長さ、すなわち $(n-1)a\theta$ に等しいということである。C_1 の半径は a であるから、角 ACQ は $(n-1)\theta$ である。

考えてみよう C から見て、A は Q から時計回りの側にあるか、反時計回りの側にあるか。

C_2 の外側を反時計回りに転がるとき、円 C_1 は反時計回りに自転するので、すでに転がり終えた点は接点から反時計回りに運ばれていく。よって $\overrightarrow{CA}$ は $\theta+\pi+(n-1)\theta = n\theta+\pi$ の方向を向き、$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CA}$ は $n\theta$ の方向を向く。（確認：$\theta = 0$ のとき $P = ((n+1)a, 0)$ となる。全体として C_1 は $n\theta$ だけ回転しており、これは硬貨を別の硬貨のまわりに転がしたときによく知られた「1 回転余分に回る」現象である。）したがって

$$\overrightarrow{OP} = na(\cos\theta, \sin\theta) + a(\cos n\theta, \sin n\theta),$$

となり、題意のとおり $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$ であり、また

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

小問 (ii)(b)

2 乗して加えると

$$OP^2 = a^2\big(n^2+1+2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)\big) = a^2\big(n^2+1+2n\cos(n-1)\theta\big).$$

これを $(n-1)^2a^2 = (n^2-2n+1)a^2$ と等しいとおくと $2n\cos(n-1)\theta = -2n$、すなわち $\cos(n-1)\theta = -1$ を得る。よって

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

であり、C_2 のまわりを 1 周するごとに $n-1$ 個の異なる位置が得られる。これらは P 自身が接点となる瞬間であり、曲線の尖点（cusp）である。

小問 (ii)(c)

$\theta_0 = \pi/(n-1)$ とすると $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$ であるから

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

各項に小問 (i) を適用する。ただし $n\theta$ の項については、小さな増分として $n\alpha$ を用いる：

$$\begin{aligned}\frac{y(\theta_0+\alpha)-y(\theta_0)}{a} &\approx n\left(\alpha\cos\theta_0-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0\right)\\ &\quad+\left(n\alpha\cos n\theta_0-\tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0\right)\\ &=n\alpha\cos\theta_0-\tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0-n\alpha\cos\theta_0+\tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0\\ &=\tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0,\\ \frac{x(\theta_0+\alpha)-x(\theta_0)}{a} &\approx n\left(-\alpha\sin\theta_0-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0\right)\\ &\quad+\left(-n\alpha\sin n\theta_0-\tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0\right)\\ &=\tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,\end{aligned}$$

いずれも誤差は α^3 のオーダーである。(i) の $\sin\theta=0$ の場合とまったく同じように 1 次の項がちょうど打ち消し合うので、答えは 2 次の項で決まる。分子と分母を $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$ で割ると

$$\frac{y(\theta_0+\alpha)-y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha)-x(\theta_0)}=\frac{\sin\theta_0+O(\alpha)}{\cos\theta_0+O(\alpha)}\longrightarrow\tan\theta_0,$$

となる。ただし $\cos\theta_0\neq0$ を仮定しており、これは $n\geq4$ のとき成り立つ。$n=3$ のときは $\theta_0=\frac{1}{2}\pi$ であり、同じ計算により逆数の比が $\cot\theta_0=0$ に近づくことがわかるので、弦は垂直になる。

この極限は弦の傾きの極限であるから、θ_0 における接線（tangent）の傾きである。ここで

$$x(\theta_0)=a(n\cos\theta_0-\cos\theta_0)=(n-1)a\cos\theta_0,\qquad y(\theta_0)=(n-1)a\sin\theta_0,$$

であるから、OP は x 軸と角 θ_0 をなし、その傾きは $\tan\theta_0$ である（$n=3$ のときは垂直である）。接線と OP は同じ方向をもつので、$(x(\theta_0),y(\theta_0))$ における接線は OP に平行である。実際には、接線は P を通るので、直線 OP 上にある。

検算

- $\theta=0$、$\alpha=0.001$ のとき、比 $(*)$ は -1999.9998 であり、$-2/\alpha=-2000$ と比べてよく一致する。
- $n=5$、$\theta_0=\frac{1}{4}\pi$、$\alpha=10^{-4}$ のとき、弦の傾きは 1.0004 であり、$\tan\frac{1}{4}\pi=1$ に近い。
- θ_0 において $OP=(n-1)a$ であるから、(c) の点は (b) で求めた $k=0$ の尖点である。そこでの接線が動径方向を向くのはこのためである。

よくある間違い

- C_1 の回転角を（転がった弧に対応する）$(n-1)\theta$ とし、C が O のまわりを回ることによる余分な θ を忘れる。
- (c) で 1 次の近似だけを用いる。これでは $0/0$ となり、何もわからない。
- $n=3$ のとき $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ となり、$\tan\theta_0$ が定義されないことを忘れる。

STEP のその先へ

この曲線は $n-1$ 個の尖点をもつ外サイクロイド（epicycloid）である。各尖点では速度 $(x'(\theta), y'(\theta))$ が零となるので、通常の公式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$ は使えない。小問 (c) では 2 次まで展開することでこれに対処しているが、これは形を変えたロピタル（l'Hôpital）の定理（l'Hôpital's rule）にほかならない。媒介変数表示された曲線の速度が零となる点は特異点（singular points）と呼ばれ、曲線の微分幾何学（differential geometry）の最初の講義で学ぶ。小問 (i) の背後にある極限とテイラー近似については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

解答例

STEP III 2022、第 7 問

純粋数学 ・ 外積による変換

STEP III 2022、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.5 節「三次元の回転」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/rotations-3d.html

鍵となる考え方

すべての土台は、ベクトルを $\mathbf{n}$ に沿った部分と $\mathbf{n}$ に垂直な部分とに分解することにある。写像（map）$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は平行な部分を消し、垂直な部分を長さを変えずに $\mathbf{n}$ のまわりに直角だけ回転させる。小問 (i) により、これを 2 回施すと垂直な部分の符号を反転させたものが得られることがわかれば、(ii) と (iii) の写像は、それぞれが 2 つの部分に別々にどう作用するかを見ることで読み取れる。

解答

小問 (i)

$\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$、$\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$ とすると、

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

もう一度 f を施すと、$\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$ の x 成分（component）は、$\mathrm{f}(\mathbf{r})$ の第 3 成分の b 倍から第 2 成分の c 倍を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

となり、求める式が得られる。$\mathbf{n}$ は単位ベクトル(unit vector)であるから $b^2+c^2=1-a^2$ であり、これは

$$-x+a^2x+aby+acz=a(ax+by+cz)-x=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\,a-x.$$

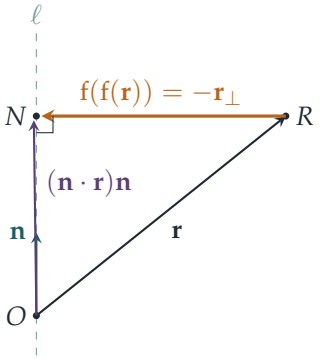
となる。これは $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$ の x 成分である。y 成分と z 成分も、$a\to b\to c\to a$、$x\to y\to z\to x$ と巡回的に置き換えることで同様に得られる。外積(cross product)はこの巡回的な文字の付け替えで不変だからである。よって

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}.$$

幾何学的な意味。 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$ と書く。ここで $\mathbf{r}_{\parallel}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ に沿った成分、$\mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ に垂直な成分である。すると

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}_{\perp}.$$

ℓ を O を通り $\mathbf{n}$ の向きをもつ直線とし、N を R から ℓ に下ろした垂線の足(foot of the perpendicular)とすると、$\overrightarrow{ON}=\mathbf{r}_{\parallel}$ である。このとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{RN}$ であり、これは R から軸 ℓ へ、ℓ と直角にまっすぐ向かうベクトルである。その長さは R と ℓ の距離に等しい。



小問 (ii)

軸について。 $\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{n})=\mathbf{0}$、したがって $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n}))=\mathbf{0}$ であり、$\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ を得る。線形性(linearity)により $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n})=\lambda\mathbf{n}$ であるから、直線 ℓ 上のすべての点は動かない。

垂直なベクトルについて。 次に $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ を満たす $\mathbf{r}$ をとる。小問 (i) より $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$ であるから、

$$\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})-(1-\cos\theta)\mathbf{r}=\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).$$

考えてみよう $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ のとき、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ はどのようなベクトルか。

これは $\mathbf{n}$ と $\mathbf{r}$ の両方に垂直であるから、O を通り $\mathbf{n}$ に垂直な平面内にあり、$\mathbf{r}$ と直角をなす。その長さは $|\mathbf{n}||\mathbf{r}| \sin 90^\circ = |\mathbf{r}|$ である。したがって $\mathbf{r}$ と $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ はその平面内にある長さの等しい 2 つの直交するベクトルであり、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに右手系（right-handed）の向きに 90° 回転させたもの（$\mathbf{n}$ の先端から O の方を見たとき反時計回り）である。$\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ が $\mathbf{i}$ を $\mathbf{j}$ の方へ θ だけ回転させたものであるのとまったく同様に、ベクトル $\cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに同じ向きに θ だけ回転させたものである。

一般のベクトルについて。 f は線形である（外積は第 2 引数について線形である）から、g も線形である。一般の $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$ と書くと、g は $\mathbf{r}_\parallel$ をそのまま残し、$\mathbf{r}_\perp$ を $\mathbf{n}$ のまわりに θ だけ回転させる。これはまさに ℓ を軸とする回転（rotation）の作用である。

したがって $R \mapsto P$ は **O を通り $\mathbf{n}$ の向きをもつ直線のまわりの角 θ の回転**であり、その向きは $\mathbf{n}$ に関して右手系の向き（$\mathbf{n}$ の先端から O の方を見たとき反時計回り）である。

小問 (iii)

小問 (i) を用いると、

$$\mathrm{h}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} - 2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = \mathbf{r} - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

2 つの成分で表すと、$\mathrm{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_\parallel$ である。

- $\mathrm{h}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} - 2\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ であるから、$\mathbf{n}$ に沿った成分は向きが反転する。
- $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ ならば $\mathrm{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ であるから、平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ 上のすべての点は動かない。

幾何学的には、$\overrightarrow{RQ} = -2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ は平面 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ に垂直であり、RQ の中点の位置ベクトルは $\mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ で、これは Π 上にある。よって Q は R の鏡像であり、写像 $R \mapsto Q$ は **O を通り $\mathbf{n}$ に垂直な平面に関する鏡映**（reflection）である。

検算

- $\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0,0,1)^{\mathsf{T}}$ とする。このとき $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = (-y, x, 0)^{\mathsf{T}}$ であり、2 回施すと $(-x,-y,0)^{\mathsf{T}}$ となって、$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r} = (0,0,z)^{\mathsf{T}} - (x,y,z)^{\mathsf{T}}$ と一致する。さらに $\mathrm{g}(\mathbf{r}) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)^{\mathsf{T}}$ はおなじみの z 軸のまわりの回転であり、$\mathrm{h}(\mathbf{r}) = (x,y,-z)^{\mathsf{T}}$ は平面 $z = 0$ に関する鏡映である。
- $\theta = 0$ のとき $\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ となり、h を 2 回施すと恒等写像（identity）になる。角 0 の

回転と鏡映ならば当然そうなるはずである。

- 2000 組のランダムな単位ベクトル $\mathbf{n}$、ベクトル $\mathbf{r}$、角 θ を用いたコンピュータによる検算で、x 成分の公式、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ の恒等式、g が $\mathbf{n}$ のまわりの右手系の向きの角 θ の回転に一致すること、h が平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ に関する鏡映に一致することが確かめられた。

よくある間違い

- $a^2+b^2+c^2=1$ を使い忘れること。$\mathbf{n}$ が単位ベクトルでなければ、(i) の恒等式は成り立たない。
- (ii) で $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ の場合だけを確かめ、それが $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ および線形性と合わせて、なぜすべての $\mathbf{r}$ について決着をつけるのかを説明しないこと。
- (iii) を**直線** ℓ に関する鏡映と言ってしまうこと。ℓ 上の点は動かないのではなく向きが反転する。動かないのは $\mathbf{n}$ に垂直な平面である。

STEP のその先へ

(ii) の公式はロドリゲスの回転公式（Rodrigues' rotation formula）であり、f の行列は反対称（antisymmetric）な「外積行列」（cross-product matrix）K である。したがって回転は $I+\sin\theta\,K+(1-\cos\theta)K^2$ と表され、これは $\exp(\theta K)$ にも等しい。(iii) の写像はハウスホルダー鏡映（Householder reflection）$I-2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ であり、数値線形代数（numerical linear algebra）の主力となる道具である。大学 1 年次の講義では、これらはそれぞれ行列式（determinant）が $+1$ と -1 の直交行列（orthogonal matrix）として登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらを学ぶのに適した本である。

解答例

STEP III 2022、第 8 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理と無理性

> **STEP III 2022、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.5 節「**有理角になりそうでならない角**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/rational-angles.html

鍵となる考え方

ド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）を用いて $\cos\theta$ をくくり出すと、$\sin k\theta$ と $\cos k\theta$ は、$\cos^k\theta$（または $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$）と $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ の多項式（polynomial）との積として表される。$\sec^2\theta - 1$ が**偶数**（even integer）であるとき、その多項式の値は整数であり、その偶奇（parity）は第 1 項から読み取ることができる。度数法で有理数の角があれば、ある $\sin k\theta$ が 0 になるはずであるが、偶奇の議論によりそれは決して起こりえないことがわかる。

解答

小問 (i)

$\cos\theta \neq 0$ と仮定し、$\sec\theta$ が存在するようにする。ド・モアブルの定理より、

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

二項展開（binomial expansion）すると、$(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$ である。j が奇数の項は純虚数で $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$ であり、j が偶数の項は実数で $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$ である。虚部

（imaginary part）をとると、

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t-\binom{k}{3}t^3+\binom{k}{5}t^5-\cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k-\binom{k}{3}t^2+\binom{k}{5}t^4-\cdots\right).\end{aligned}$$

$\cos^k\theta\tan\theta=\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ かつ $t^2=\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ であるから、これは

$$\sin k\theta=\sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k-\binom{k}{3}(\sec^2\theta-1)+\binom{k}{5}(\sec^2\theta-1)^2-\cdots\right)$$

となり、示すべき式が得られた。$j>k$ のとき $\binom{k}{j}=0$ であるから、括弧内の和はおのずと有限で終わる。同様に実部をとると、

$$\cos k\theta=\cos^k\theta\left(1-\binom{k}{2}(\sec^2\theta-1)+\binom{k}{4}(\sec^2\theta-1)^2-\cdots\right).$$

小問 (ii)

ここでは $a\geq 3$ として $\cos\theta=1/a$ であるから、$0^\circ<\theta<90^\circ$ である。特に $\sin\theta\neq 0$ かつ $\cos\theta\neq 0$ である。また $\sec^2\theta-1=a^2-1$ であり、a は奇数なので、これは**偶数**である。$X=a^2-1$ とおく。

$\sin k\theta=0$ を満たす最小の正の整数を k とする。$\sin\theta\neq 0$ より $k\neq 1$ なので $k>1$ であり、小問 (i) が使える：

$$0=\sin k\theta=\sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k-\binom{k}{3}X+\binom{k}{5}X^2-\cdots\right).$$

因数 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ は 0 でないから、括弧内は 0 である。第 2 項以降の各項は偶数 X を少なくとも 1 つ因数にもち、二項係数（binomial coefficient）は整数であるから、

$$0=k-\binom{k}{3}X+\binom{k}{5}X^2-\cdots\equiv k\pmod 2.$$

よって k は偶数である。ここで

$$0=\sin k\theta=2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

ところが $\frac{1}{2}k$ は $0<\frac{1}{2}k<k$ を満たす整数であるから、k の最小性より $\sin(\frac{1}{2}k\theta)\neq 0$ である。したがって、示すべきとおり $\cos(\frac{1}{2}k\theta)=0$ である。

考えてみよう θ が有理数であるという仮定は、どこで使われるのか？

それこそが、そもそも k を生み出すものである。p,q を正の整数として $\theta=p/q$ とする（θ は度数法で測っていることを思い出そう）。すると $180q\theta=180p$ なので、

$\sin(180q\,\theta) = 0$ である。したがって $\sin m\theta = 0$ を満たす正の整数 m が**存在し**、ゆえにそのような最小のものも存在する。それを k とする。これは上の仮定を満たすので、k は偶数であり、$n = \frac{1}{2}k$ とおくと $\cos n\theta = 0$ となる。

ここで、$\cos n\theta$ が 0 になりえないことを示す。$n = 1$ ならば $\cos n\theta = 1/a \neq 0$ である。$n > 1$ ならば、小問 (i) の余弦の公式より

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

やはり第 2 項以降はすべて偶数なので、括弧内は奇数であり、特に 0 でない。よって $\cos n\theta \neq 0$ となり、矛盾する。ゆえに θ は無理数（irrational）である。

小問 (iii)

今度は $\cot\phi = 1/b$ なので $\tan\phi = b$（ただし $b \geq 2$）であり、$0° < \phi < 90°$ である。やはり $\sin\phi \neq 0$ かつ $\cos\phi \neq 0$ であり、今回は

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$$

となる。b は偶数なので、これは**偶数**である。したがって、$a^2 - 1$ の代わりに $X = b^2$ として、小問 (ii) とまったく同じ議論が成り立つ。詳しく書くと次のとおりである。

p, q を正の整数として $\phi = p/q$ とする。すると $\sin(180q\,\phi) = 0$ なので、$\sin k\phi = 0$ を満たす最小の正の整数 k が存在し、$\sin\phi \neq 0$ より $k > 1$ である。$\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$ であるから、小問 (i) より

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

よって k は偶数である。このとき $0 = \sin k\phi = 2\sin(\frac{1}{2}k\phi)\cos(\frac{1}{2}k\phi)$ であり、最小性より $\sin(\frac{1}{2}k\phi) \neq 0$ なので、$n = \frac{1}{2}k$ として $\cos n\phi = 0$ となる。$n = 1$ ならば、これは $\cos\phi = 0$ を意味するが、これは誤りである。$n > 1$ ならば

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right)$$

であり、$\cos^n\phi \neq 0$ かつ括弧内は奇数なので 0 でない。この矛盾により、ϕ は無理数であることが示された。

検算

- 小問 (i) で $k = 2$ と $k = 3$ を試すと、公式から $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$、$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$、$\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ が得られる。また、15 までの k について、どちらの公式もランダムな角での直接計算と一致する。

- 偶奇の条件は本質的である。$a = 2$（偶数）とすると $\theta = 60°$、$b = 1$（奇数）とすると $\phi = 45°$ となり、どちらも有理数である。それぞれの場合 $X = 3$ または 1 は奇数であり、議論はまさに破綻すべきところで破綻している。
- $a = 3$ のとき $\theta \approx 70.5288°$、$b = 2$ のとき $\phi \approx 63.4349°$ である。コンピュータによる検証で、30 未満のすべての奇数 a と偶数 b について、すべての $k < 2000$ に対し $\sin k\theta$ と $\sin k\phi$ が 0 から十分離れていることが確認できる。

よくある間違い

- $\sin\theta\cos^{k-1}\theta \neq 0$ で割る前に、それが成り立つ理由を述べ忘れる。
- k がどこから来るのかを説明しない。最小の k が存在するのは、θ が有理数ならば $\sin(180q\,\theta) = 0$ となるからにほかならない。
- k の最小性を用いて $\sin(\frac{1}{2}k\theta) = 0$ を除外することなく、$\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$ と結論してしまう。

STEP のその先へ

ここに現れた括弧内の式は、前に掛かる因数を除けば**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）であり、偶奇を使う技法は、整数の恒等式を素数を法として還元する（reducing modulo a prime）という考え方の最初の一端である。よく知られた関連する結果に**ニーベンの定理**（Niven's theorem）がある：180° の有理数倍 θ のうち $\cos\theta$ が有理数となるのは、$\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ となるものに限る。これは $2\cos\theta$ が代数的整数（algebraic integer）であることを示して証明される。このような議論の背後にある整数論を身につけるには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）がよい出発点である。

解答例

STEP III 2022、第 9 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP III 2022、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで起こる衝突（collision）はすべて同じ型の衝突である。すなわち、運動している粒子が、質量が k 倍の静止した粒子に衝突する。したがって、小問 (i) の最初に求めた係数 α と β は、B（質量 km）が C（質量 k^2m）に衝突する小問 (ii) でもそのまま使える。そのあと、「同じ点で出会う」という条件は、どれも同じ時刻を表す二つの式を等しいとおくだけのことである。小問 (ii) では k と e についての方程式が二つ得られ、そのうちの一つはちょうど小問 (i) の条件そのものになる。

解答

A、B、C を、なめらかな面上の一直線に沿って運動する質点とみなし、衝突は瞬間的に起こるものとする。速度はすべて A の初めの運動の向きを正として測る。

小問 (i)

1 回目の衝突。運動量（momentum）は保存され、ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

$v_1 = v_2 - eu$ を第 1 式に代入すると $u = v_2 - eu + kv_2$ となるので、

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}\,u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}\,u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}\,u = \frac{1-ke}{k+1}\,u = \alpha u,$$

となり、示すべき式が得られる。

2 回目の衝突。時刻は 1 回目の衝突から測る。B は壁までの距離 D を時間 $D/(\beta u)$ で進む。B は速さ $e\beta u$ ではね返るので、衝突点に向かって $\frac{1}{2}D$ 戻るのにさらに時間 $D/(2e\beta u)$ かかる。2 回目の衝突がそこで起こるならば、その時刻は

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1+\frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

である。この点は壁から $\frac{1}{2}D$ の位置にあるので、1 回目の衝突点から $\frac{1}{2}D$ だけ**先**の位置でもある。A は一定の速度 αu で運動するので、$\alpha > 0$ かつ $\alpha u T = \frac{1}{2}D$ でなければならない：

$$\alpha\,\frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

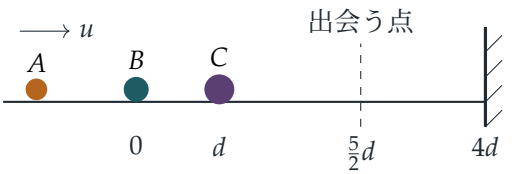
両辺に $k+1$ を掛けると $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$ となるので、

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

となり、これが求める結果である。この値で実際に $\alpha > 0$ となる。実際、このとき $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$ であり、$e > 0$ のとき $1+e-e^2 < 1+2e$ であるから、これは 1 より小さい。

小問 (ii)

原点を B の初めの位置にとる。すると C は $x = d$ から出発し、壁は $x = 4d$ にある。求める出会う点は壁から $\frac{3}{2}d$ の位置、すなわち $x = \frac{5}{2}d$ である。



A が B に衝突する瞬間を $t = 0$ とする。この衝突は小問 (i) の衝突とまったく同じなので、衝突後 A は速度 αu、B は速度 βu で運動する。ここで α と β は前と同じである。

> **考えてみよう**　B が C に衝突すると何が起こるか。衝突の計算をやり直す必要があるだろうか。

その必要はない。C は静止しており、その質量 k^2m は B の質量 km の k 倍である。したがってこれは、質量比 k、同じ e で、衝突前の速さが u の代わりに βu となった小問 (i) の衝突そのものである。B は時刻 $t_1 = d/(\beta u)$ に C に衝突する。衝突後、B は $\alpha\beta u$、C は $\beta^2 u$ で運動する。

ここで、それより前に他の衝突が起こらないと仮定して（これは最後に確かめる）、各粒子が $x = \frac{5}{2}d$ に到達する時刻を求める。

- A は $x=0$ から αu で運動するので、時刻 $t=\dfrac{5d}{2\alpha u}$ に到達する。
- B は時刻 t_1 に $x=d$ に達し、そのあと速さ $\alpha\beta u$ で $\frac{3}{2}d$ 進む。到達時刻は $t=\dfrac{d}{\beta u}+\dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$ である。
- C は壁までの $3d$ を $\beta^2 u$ で進み、そのあと $\frac{3}{2}d$ を $e\beta^2 u$ で戻る。到達時刻は

$$t=\frac{d}{\beta u}+\frac{3d}{\beta^2 u}\left(1+\frac{1}{2e}\right)=\frac{d}{\beta u}+\frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

である。

三つの粒子が同時に衝突するためには、三つの時刻がすべて等しくなければならない。

B と C。 共通の項 $d/(\beta u)$ を消去し、$2\beta^2 u/(3d)$ を掛けると

$$\frac{1}{\alpha}\beta=\frac{2e+1}{e}\quad\Longleftrightarrow\quad e\beta=\alpha(2e+1).$$

これはちょうど小問 (i) の条件であるから、

$$k=\frac{1+e-e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

（これは偶然ではない。どちらの状況でも、一方の粒子は衝突のあと、衝突前の速さの β 倍で壁まで D 進み、$\frac{1}{2}D$ 戻ってくる。その間に他方の粒子は、衝突前の速さの α 倍で $\frac{1}{2}D$ 前進する。ここでは $D=3d$ であり、衝突前の速さは βu である。）

A と B。 $\dfrac{5}{2\alpha}=\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{3}{2\alpha\beta}$ に $2\alpha\beta$ を掛けると $5\beta=2\alpha+3$ を得る。さらに $k+1$ を掛けると

$$5(1+e)=2(1-ke)+3(k+1)\quad\Longrightarrow\quad 5e=k(3-2e)\quad\Longrightarrow\quad k=\frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

考えてみよう k を表す式が二つ得られた。e はどうすれば求められるか。

(1) と (2) を等しいとおく。$0<e<1$ よりどちらの分母も正なので、たすき掛けしてよい：

$$\begin{aligned}5e^2(2e+1)&=(3-2e)(1+e-e^2)\\10e^3+5e^2&=3+e-5e^2+2e^3\\0&=8e^3+10e^2-e-3.\end{aligned}$$

$e=\frac{1}{2}$ を代入してみると $1+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-3=0$ となるので、$2e-1$ は因数である：

$$8e^3+10e^2-e-3=(2e-1)(4e^2+7e+3)=(2e-1)(4e+3)(e+1).$$

他の根 $-\frac{3}{4}$ と -1 は負であるから、$0 < e < 1$ を満たす根は $e = \frac{1}{2}$ のみであり、示すべきことが示された。このとき $k = \frac{5}{4}$ である。

状況に矛盾がないことの確認。$e = \frac{1}{2}$、$k = \frac{5}{4}$ のとき $\alpha = \frac{1}{6}$、$\beta = \frac{2}{3}$ である。B が C に衝突する前は、A（速さ $\frac{1}{6}u$）は B（速さ $\frac{2}{3}u$）より遅いので、途中で B に追いつくことはない。その後は、B（速さ $\frac{1}{9}u$）は C（速さ $\frac{4}{9}u$）より遅いので、C が壁に達する前に B が C に追いつくことはない。このとき B は A より遅くなっているので、A は B に近づき、両者は計算した点でのみ出会う。したがって余分な衝突は起こらず、三つの粒子はすべて時刻 $t = 15d/u$ に $x = \frac{5}{2}d$ に到達する。

検算

- 小問 (i) で $v_1 + kv_2 = u$（運動量）と $v_2 - v_1 = eu$（反発）が成り立つ。$e = 1$、$k = 1$ ならば $\alpha = 0$、$\beta = 1$ となる。完全弾性衝突（perfectly elastic collision）では等しい質量の物体どうしが速度を交換するはずであり、そのとおりになっている。
- 小問 (ii) で $u = d = 1$ とし上の値を用いると、三つの到達時刻は、A が $\frac{5/2}{1/6} = 15$、B が $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$、$C$ が $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$ である。
- 式 (1) に $e = \frac{1}{2}$ を代入すると $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$ となり、(2) の $\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$ と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で、出会う点を衝突点から測るべきところを壁から測ってしまう。ここではたまたまどちらも $\frac{1}{2}D$ で同じになるが、小問 (ii) では壁から $\frac{3}{2}d$ の出会う点は B の初めの位置から $\frac{5}{2}d$ の位置である。
- B–C の衝突を一から計算し直して、係数を落としてしまう。質量比が再び k であることに気づけば、その手間は省ける。
- C が壁から $\beta^2 u$ ではなく $e\beta^2 u$ で戻ってくることを忘れる。

STEP のその先へ

この問題がうまくいくのは、問題が**自己相似**（self-similar）だからである。質量を k 倍、速さを β 倍に拡大すると一つの衝突が次の衝突に移るので、同じ計算が繰り返される。同じ考え方は、質量が等比数列的に減少する球を並べてエネルギーを非常に効率よく伝える仕組みや、有名な「ブロックの衝突で π を数える」問題の背後にもある。後者では、運動量とエネルギーを制約条件として速度空間（velocity space）で考えると、解析が最もすっきりする。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*

（力学入門）は、重心系（centre-of-mass frame）で考える方法も含めて衝突を体系的に扱っており、重心系で考えると α や β のような式が見通しよく理解できる。

解答例

STEP III 2022、第 10 問

力学 ・ ばねのつり合い

> **STEP III 2022、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

P における角が直角なので、2 本のばねの力は互いに垂直である。したがって各ばねの方向に力を分解すれば、連立方程式を解くことなく、それぞれの張力（tension）が単独で求まる。エネルギーについては、弾性エネルギーの項と重力の項が見事に組み合わさり、p は θ の簡単な関数となる。そのうえで小問 (ii) の本質は、θ に対する**物理的な制約**、すなわち両方のばねが伸びていなければならないという条件にある。

解答

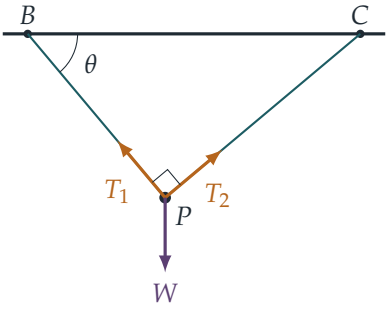
P を質点とみなし、ばねは軽く、フックの法則（Hooke's law）に従うものとする。すなわち、弾性係数（modulus of elasticity）λ、自然長（natural length）a のばねを長さ l まで伸ばしたとき、張力は $\lambda(l-a)/a$、蓄えられるエネルギーは $\lambda(l-a)^2/(2a)$ である。

小問 (i)

$BC = 2a$ かつ角 $BPC = 90^\circ$ であるから、三角形 BPC の斜辺（hypotenuse）は BC であり、

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90^\circ - \theta.$$

PB、PC の張力をそれぞれ T_1、T_2 とする。



直線 PB は水平と角 θ をなすので、鉛直とは角 $90^\circ - \theta$ をなす。同様に PC は鉛直と角 θ をなす。$PB \perp PC$ であるから、PB 方向に分解すると現れるのは T_1 と重力だけであり、重力の BP 方向（B から遠ざかる向き）の成分は $W\cos(90^\circ - \theta) = W\sin\theta$ である。よって

$$T_1 = W\sin\theta, \qquad \text{同様に、分解方向}PC, \qquad T_2 = W\cos\theta.$$

フックの法則より

$$T_1 = \frac{s_1 W(2a\cos\theta - a)}{a} = s_1 W(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = s_2 W(2\sin\theta - 1).$$

等しいとおいて

$$s_1 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \qquad s_2 = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta - 1},$$

これが求める s_1 であり、あわせて s_2 も得られた。

小問 (ii)

重力による位置エネルギー。 P は BC より、P から引いた三角形の高さ $PB\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$ だけ下にある。BC を基準の高さとすると、重力による位置エネルギー（potential energy）は $-Wa\sin 2\theta$ である。

弾性エネルギー。 PB の伸び（extension）は $a(2\cos\theta - 1)$ であるから、小問 (i) を用いて

$$\frac{s_1 W\, a^2(2\cos\theta - 1)^2}{2a} = \tfrac{1}{2}Wa\, s_1(2\cos\theta - 1)^2 = \tfrac{1}{2}Wa\sin\theta\,(2\cos\theta - 1),$$

同様に PC のエネルギーは $\frac{1}{2}Wa\cos\theta\,(2\sin\theta - 1)$ である。

合計。 足し合わせると

$$\begin{aligned} -paW &= -Wa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}Wa\big(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\big) \\ &= -Wa\sin 2\theta + Wa\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

したがって

$$p = \tfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\big(\theta + \tfrac{\pi}{4}\big).$$

考えてみよう θ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の任意の値をとれるだろうか？

とれない。弾性係数 s_1W、s_2W は正であり、張力 $W\sin\theta$、$W\cos\theta$ も正であるから、両方のばねは**伸びて**いなければならない。すなわち $2\cos\theta - 1 > 0$ かつ $2\sin\theta - 1 > 0$ である。（もしどちらかが 0 ならば、そのばねは力を及ぼさないにもかかわらず、0 でない張力を生じなければならないことになる。）よって $\cos\theta > \frac{1}{2}$ かつ $\sin\theta > \frac{1}{2}$、すなわち

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{したがって} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

$\frac{\pi}{2}$ に関して対称なこの区間において、$\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ は高々 1 であり（$\theta = \frac{\pi}{4}$ で等号成立）、端点での値 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$ より真に大きい。ここで

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

であるから

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \geq p > \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

となり、示すべきことが得られた。

有効数字 1 桁。 $0.65 \leq p < 0.75$ を示せばよく、根号の評価は 2 乗することで正当化する。$1.6^2 = 2.56 < 3$ より $\sqrt{3} > 1.6$ であるから、$p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$ である。$1.5^2 = 2.25 > 2$ より $\sqrt{2} < 1.5$ であるから、$p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$ である。よって有効数字（significant figure）1 桁で $p = 0.7$ である。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき配置は対称であり、実際 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$、$p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$ となる。
- $\theta \to \frac{\pi}{6}^+$ のとき $s_1 \to \infty$ となる。ばね PB は自然長にあり、張力を生じるには無限に硬くなければならない。このとき $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$ となり、これは下限に一致する。
- $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 内の多数の無作為な θ について、求めた位置が全位置エネルギーの停留点（stationary point）であること（したがって確かに平衡（equilibrium）であること）、およびそのエネルギーが $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$ に等しいことを、計算機で確認した。

よくある間違い

- 重力による位置エネルギーを正の符号にしてしまう。P は基準の高さより**下**にある。

- $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ を $(0, \frac{\pi}{2})$ 全体で考えてしまい、誤った下限 $\frac{1}{2}$ を得る。ばねは張力を受けていなければならない。
- 誤差が四捨五入の結果を変えないことを示さずに、$\sqrt{3} \approx 1.732$ を用いる。

STEP のその先へ

小問 (ii) で項が打ち消し合ったのは偶然ではない。平衡状態では全位置エネルギーが停留しており、フックの法則に従うばねでは弾性エネルギーがちょうど（張力 × 伸び）の半分になるので、これが重力に逆らってなされる仕事と結びつくのである。平衡を位置エネルギーの停留点として調べ、その安定性（stability）を 2 階導関数によって調べることは、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このエネルギーの観点を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2022、第11問

確率・統計 ・ 二項分布の平均偏差

STEP III 2022、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

硬貨が公平であるため、X の分布は平均（mean）に関して対称（symmetric）になり、平均より下の確率と上の確率は一致する。この対称性によって、絶対値（absolute value）を含む和が片側だけの和に変わる。さらに (i)(c) の恒等式（identity）によって $\sum r\binom{2n}{r}$ がより小さな二項分布（binomial distribution）の裾の和（tail sum）に変わり、これも再び対称性で求めることができる。

解答

以下では常に $X \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$ とする。したがって $\mathrm{P}(X = r) = \binom{N}{r}2^{-N}$ であり、$\mu = \frac{1}{2}N$ である。$\binom{N}{r} = \binom{N}{N-r}$ であるから $\mathrm{P}(X = r) = \mathrm{P}(X = N - r)$ が成り立つ。すなわち、分布は $\frac{1}{2}N$ に関して対称である。

小問 (i)(a)

$N = 2n$ のとき、写像 $r \mapsto 2n - r$ は $\{0, \ldots, n-1\}$ を $\{n+1, \ldots, 2n\}$ に移す。よって対称性より

$$\mathrm{P}(X \leq n-1) = \mathrm{P}(X \geq n+1).$$

3 つの事象 $X \leq n-1$、$X = n$、$X \geq n+1$ はすべての結果を尽くすので、$2\,\mathrm{P}(X \leq n-1) + \mathrm{P}(X = n) = 1$ であり、これから

$$\mathrm{P}(X \leq n-1) = \tfrac{1}{2}\big(1 - \mathrm{P}(X = n)\big).$$

小問 (i)(b)

ここでは $\mu = n$ であるから

$$\delta = \sum_{r=0}^{2n} |r-n| \binom{2n}{r} \frac{1}{2^{2n}}.$$

$r = n$ の項は 0 である。$r \geq n+1$ の項で $r = 2n - s$ と置き換えると、$0 \leq s \leq n-1$ で $|r-n| = n-s$、$\binom{2n}{r} = \binom{2n}{s}$ となる。したがって、平均より上の項は平均より下の項をちょうど繰り返す：

$$\delta = 2\sum_{r=0}^{n-1} (n-r)\binom{2n}{r}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)\binom{2n}{r}\frac{1}{2^{2n-1}},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (i)(c)

$1 \leq r \leq 2n$ に対して

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = 2n \cdot \frac{(2n-1)!}{(r-1)!\,(2n-r)!} = 2n\binom{2n-1}{r-1}.$$

ここで (b) の和を $2^{2n-1}\delta = A - B$ と分ける。ただし

$$A = n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}, \qquad B = \sum_{r=1}^{n-1} r\binom{2n}{r}$$

である（B の $r=0$ の項は 0 なので省いた）。

和 A。(a) より $\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r} = 2^{2n}\,\mathrm{P}(X \leq n-1) = 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ であるから

$$A = n\,2^{2n-1} - \tfrac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

考えてみよう s が 0 から $n-2$ までのとき、$\binom{2n-1}{s}$ の和はどのように求めればよいか。

和 B。恒等式を用いて $s = r-1$ とおくと

$$B = 2n\sum_{s=0}^{n-2}\binom{2n-1}{s}.$$

$0 \leq s \leq 2n-1$ にわたる $\binom{2n-1}{s}$ の列は項の個数が偶数であり、総和は 2^{2n-1} である。この列は $s \mapsto 2n-1-s$ に関して対称であり、この写像は $\{0,\ldots,n-1\}$ と $\{n,\ldots,2n-1\}$

を入れ替えるので、前半の和は 2^{2n-2} となる。いま考えている和はその前半より 1 項少ないところで止まるので

$$\sum_{s=0}^{n-2}\binom{2n-1}{s} = 2^{2n-2} - \binom{2n-1}{n-1} = 2^{2n-2} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n},$$

である。ここで $\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ を用いた。よって

$$B = n\,2^{2n-1} - n\binom{2n}{n}.$$

まとめる。

$$2^{2n-1}\delta = A - B = \left(n - \frac{n}{2}\right)\binom{2n}{n} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}, \qquad \text{よって} \qquad \delta = \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

小問 (ii)

今度は $N = 2n+1$、$\mu = n + \frac{1}{2}$ であり、これは X のとりうる値ではない。対称性 $r \mapsto 2n+1-r$ は $\{0,\dots,n\}$ と $\{n+1,\dots,2n+1\}$ を入れ替え、$|r-\mu|$ と $\binom{2n+1}{r}$ をともに保つ。したがって (i)(b) と同様に

$$\delta = 2\sum_{r=0}^{n}\left(n+\tfrac{1}{2}-r\right)\binom{2n+1}{r}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}(2n+1-2r)\binom{2n+1}{r}.$$

- 同じ対称性により、$\binom{2n+1}{r}$ の列の前半の和は 2^{2n+1} の半分である：$\sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{r} = 2^{2n}$。
- 恒等式 $r\binom{2n+1}{r} = (2n+1)\binom{2n}{r-1}$（(i)(c) とまったく同様に証明できる）と (i)(a) により

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n+1}{r} = (2n+1)\sum_{s=0}^{n-1}\binom{2n}{s} = (2n+1)\left(2^{2n-1} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n}\right).$$

したがって

$$\sum_{r=0}^{n}(2n+1-2r)\binom{2n+1}{r} = (2n+1)2^{2n} - (2n+1)\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right) = (2n+1)\binom{2n}{n},$$

であり、$N = 2n+1$ のとき

$$\boxed{\delta = \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}}$$

となる。

検算

- $N=3$（$n=1$）：$|X-\frac{3}{2}|$ は確率 $\frac{1}{4}$ で $\frac{3}{2}$、確率 $\frac{3}{4}$ で $\frac{1}{2}$ となるので、$\delta=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$ である。公式は $\frac{3\cdot 2}{8}=\frac{3}{4}$ を与える。$n=0$（$N=1$）のときは $\frac{1}{2}$ を与え、これも正しい。
- $N=4$（$n=2$）：(i)(c) は $\frac{2\cdot 6}{16}=\frac{3}{4}$ を与え、$N=3$ のときと同じになる。実は $N=2n+1$ のときの δ は常に $N=2n+2$ のときの δ に等しい。$\binom{2n+2}{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$ であるから、偶数の場合の公式で n を $n+1$ に置き換えると奇数の場合の公式に帰着する。
- どちらの公式も、$N\le 60$ のすべての N について δ の定義と完全に一致することを計算機で確かめた。たとえば $N=10$ のとき $\delta=\frac{315}{256}\approx 1.230$ である。

よくある間違い

- 対称性から生じる因数 2 を忘れること。(i)(b) で 2^{2n} ではなく 2^{2n-1} が現れるのはこの因数のためである。
- $s=r-1$ とずらした後の s の範囲を誤ること。和は $n-2$ で止まり、列の半分より 1 項少ない。その欠けた項 $\binom{2n-1}{n-1}$ こそが答えを 0 でなくしている。
- (ii) で μ を整数として扱うこと。消える項はなく、列の前半と後半はどちらも $n+1$ 項からなる。

STEP のその先へ

スターリングの公式（Stirling's formula）により $\binom{2n}{n}\approx 4^n/\sqrt{\pi n}$ であるから、N が大きいとき $\delta\approx\sqrt{N/(2\pi)}$ となる。$\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{N}$ であるから、これは $\delta\approx\sigma\sqrt{2/\pi}$ であり、正規分布（normal distribution）の平均絶対偏差（mean absolute deviation）にちょうど一致する。これは中心極限定理（central limit theorem）が予言するとおりである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、二項分布の正規近似（normal approximation）とその背後にある中心極限定理の両方を扱っている。

解答例

STEP III 2022、第 12 問

確率・統計　・　円内のランダムな弦

STEP III 2022、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.3 節「「ランダム」とは何を意味するか？」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/bertrand.html

鍵となる考え方

この問題に現れる弦（chord）は、すべて一つの事実から導かれる。半径 a の円で、中心からの距離が d である弦の長さは $2\sqrt{a^2 - d^2}$ である。したがって、なすべきことは d を確率変数で表し、それから平均をとることである。小問 (ii) で置換（substitution）$u = a^2 - r^2 \sin^2 t$ が自然なのは、R の確率密度関数（probability density function）が、この置換に必要な因子 r をちょうど与えてくれるからである。

解答

小問 (i)

角 AOB を Θ とする。Θ は $[0, 2\pi]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、確率密度は $\frac{1}{2\pi}$ である。三角形 AOB は頂角 Θ の二等辺三角形（isosceles triangle）である。O から AB に垂線を下ろすと、角と弦はともに二等分されるので、

$$AB = 2a \sin \tfrac{1}{2}\Theta.$$

この範囲では $\sin \frac{1}{2}\Theta \geq 0$ であるから、これはすべての $\Theta \in [0, 2\pi]$ について成り立つ。$\Theta > \pi$ のときは優角（reflex angle）を測っていることになるが、弦は同じである。し

たがって

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

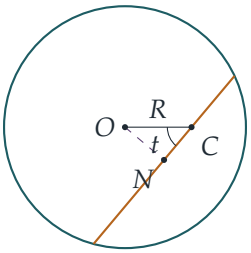
小問 (ii)

R の確率密度関数。$0 \le r \le a$ のとき、事象 $R \le r$ は、C が O を中心とする半径 r の円板の内部にあることを意味する。確率は面積に比例するから、

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{よって} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

であり、それ以外では $f_R(r) = 0$ である。

弦の長さ。O から弦に下ろした垂線の足を N とする。直角三角形 ONC において、斜辺（hypotenuse）は $OC = R$、C における角は t であるから、$ON = R\sin t$ である。



中心からの垂線は弦を二等分し、N は弦の中点である。よって、O、N と弦の一端がつくる三角形に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると、

$$\text{弦の長さ} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

$R < a$ であるから、根号の中は正である。C の両側にわたる弦全体を数えていることに注意する。

長さの期待値（expected value）。t を固定し、C を無作為に選ぶと、

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

$\sin t \ne 0$ となるように $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ とする。$u = a^2 - r^2\sin^2 t$ と置換すると $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$ であり、$r = 0$ のとき $u = a^2$、$r = a$ のとき $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$ である。すると

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

となる。ここで $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$ を用いた。鋭角では $\cos t \ge 0$ であるから、これは正しい。以上で求める式が得られた。

考えてみよう 分母 $\sin^2 t$ を、$1-\cos^3 t$ と約分できる形に変えるにはどうすればよいか。

$c=\cos t$ とおく。すると $\sin^2 t = 1-c^2 = (1-c)(1+c)$ であり、$1-c^3$ は 3 乗の差なので $(1-c)(1+c+c^2)$ と因数分解できる。$c \neq 1$ であるから、$1-c$ を約分できて、

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c+\frac{1}{1+c}\right),$$

となる。ここで $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$ を用いた。最後に、$1+\cos t = 2\cos^2\frac{1}{2}t$ より $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$ であるから、

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\left(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right),$$

となり、求める式が得られる。この形は $t=0$ でも問題がなく、$\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$ を与える。C を通り OC に沿う弦は直径であるから、これは正しい。

小問 (iii)

T の確率密度は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $\frac{2}{\pi}$ である。L の 2 番目の形（$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$ であるから積分しやすい）を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{1}{2}t\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

検算

- $t=\frac{1}{2}\pi$ のとき弦は OC に垂直であり、$\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0+\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$ である。直接計算しても $\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$ となる。
- t が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、$\mathrm{L}(t)$ は $2a$ から $\frac{4}{3}a$ まで減少するはずであり、(iii) の答え $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$ は、平均である以上当然のことながら、この間にある。
- $a=1.7$、$t=0.7$ として、弦の長さを R の確率密度に関して数値積分すると 3.01799 となり、$\mathrm{L}(0.7)$ の 2 つの式の値と一致する。(i) の答え $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ も数値積分で確かめた。

よくある間違い

- R を $[0,a]$ 上の一様分布とみなしてしまう。点は**面積**について一様に分布しており、中心から遠いところほど面積が多いので、確率密度は $2r/a^2$ となる。

- C の片側にある弦の部分だけを用いてしまう。あるいは $ON = R\cos t$ と書いてしまう（これは弦に沿った距離 CN である）。
- 小問 (iii) で、$\mathrm{L}(t)$ の 2 番目の形ではなく 1 番目の形を積分してしまう。2 番目の形は、1 行で積分できるように問題文があらかじめ用意したものである。

STEP のその先へ

これは幾何確率（geometric probability）の問題であり、「無作為に選ぶ」という言葉は、分布を定めて初めて意味をもつ。答え $\frac{4a}{\pi}$ と $\frac{16a}{3\pi}$ が異なるのは、それぞれが異なる弦の選び方を表しているからであり、これがベルトランの逆説（Bertrand's paradox）の要点である。積分幾何学（integral geometry）は、回転と平行移動によって変わらない直線全体の上の測度を用いて、これを体系的に扱う。領域上の連続分布や、ここで計算したような期待値については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照のこと。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2022 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

