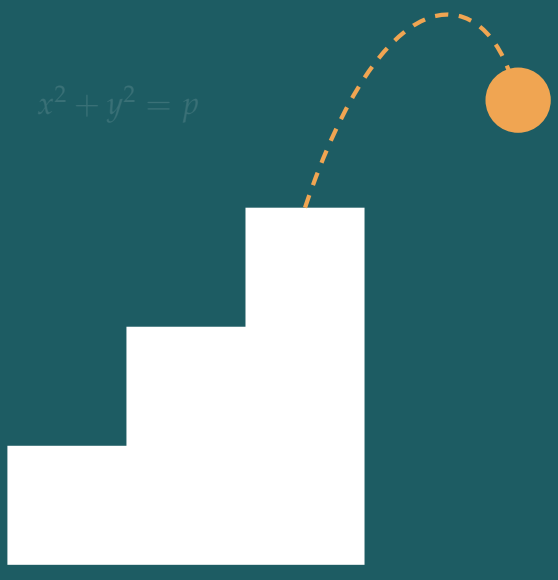
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP II と III

2021 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP II と III

2021 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2021 年解答例

2021 年の STEP 問題（STEP II と III）の全 24 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP II

Q1 三角方程式 純粋数学 . . . 3
Q2 解の対称式 純粋数学 . . . 7
Q3 整数部分と小数部分 純粋数学 . . . 11
Q4 ランベルトの W 関数 純粋数学 . . . 15
Q5 一階微分方程式 純粋数学 . . . 20
Q6 円の幾何と近似 純粋数学 . . . 24
Q7 回転行列 純粋数学 . . . 29
Q8 積分の漸化式 純粋数学 . . . 33
Q9 静力学 力学 . . . 37
Q10 非慣性系 力学 . . . 41
Q11 条件付き確率の漸化式 確率・統計 . . . 45
Q12 破産問題 確率・統計 . . . 50

STEP III

Q1 媒介変数表示された曲線の法線 純粋数学 . . . 54
Q2 行列式と不等式 純粋数学 . . . 58
Q3 積分の不等式 純粋数学 . . . 62
Q4 ベクトルと正射影 純粋数学 . . . 65
Q5 極方程式で表された曲線 純粋数学 . . . 69
Q6 逆関数と導関数 純粋数学 . . . 74
Q7 図形における複素数 純粋数学 . . . 79
Q8 漸化式と極限 純粋数学 . . . 84
Q9 反発係数を伴う斜め衝突 力学 . . . 89
Q10 巻きつく糸の運動 力学 . . . 94

Q11 指数分布 確率・統計 98
Q12 和の分散 確率・統計 102

解答例

STEP II 2021、第 1 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 2021、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

正弦と余弦の積は扱いにくいが、和であれば扱いやすい。そこで、冒頭の恒等式（identity）を使って積を和に置き換える。(i) では、これによって三つの積が $\cos 2x$ の 3 次式に変わり、因数がはっきり見えるようになる。(ii) では、正接（tangent）を払ってから、各因数を種類の異なる相手と組にすると、方程式全体が二つの簡単な因数の積にまとまる。特に注意が必要なのは、正接が定義されない点の扱いだけである。

解答

恒等式

加法定理（addition formulae）による展開

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

を辺々加えると $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$ を得る。$A = 3a$、$B = a$ とおくと

$$\cos a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a),$$

となり、示すべき式が得られる。同様に、$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$ を辺々加えると $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$ を得る。$A = a$、$B = 3a$ とおき、$\sin(-2a) = -\sin 2a$ を用いると

$$\sin a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a - \sin 2a).$$

（役割を入れ替えて $A = 3a$、$B = a$ とおくと、対となる式 $\cos a\sin 3a = \frac{1}{2}(\sin 4a + \sin 2a)$ が得られる。これも後で必要になる。）

小問 (i)

第一の恒等式により $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$ である。$c = \cos 2x$ とおくと $\cos 4x = 2c^2 - 1$ である。方程式は

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

となる。項を二つずつ組にすると $2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$、すなわち

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

であるから、$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ または $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

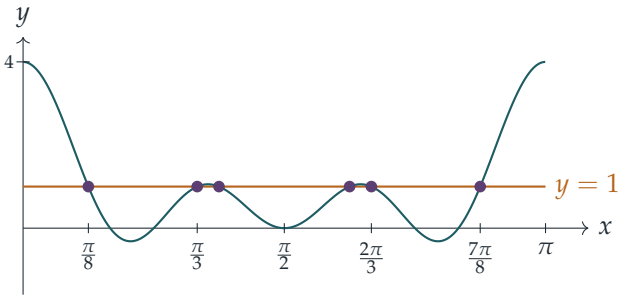
$0 \le x \le \pi$ のとき $0 \le 2x \le 2\pi$ であり、-1 と 1 の間（両端を除く）にある $\cos 2x$ の各値に対して、この範囲の $2x$ の値が二つずつ対応する。

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

どの段階も逆にたどれるので、解は

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

である。グラフからも、直線 $y = 1$ との交点がちょうど六つであることが確かめられる。



小問 (ii)

$\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$ であるとする。この式が意味をもつためには四つの正接がすべて定義されていなければならないので、$\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$、$\cos 4x$ はすべて 0 でない。したがって両辺に $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$ を掛けてよく、

$$\sin x\cos 3x \cdot \cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x \cdot \sin 2x\sin 4x.$$

を得る。

考えてみよう なぜ $\sin x$ を $\cos 3x$ と、$\cos x$ を $\sin 3x$ と組にするのか？

それは、これらがまさに先の恒等式で和に変換できる積であり、しかもどちらの和も、方程式の他の部分にすでに現れている $\sin 4x$ と $\sin 2x$ だけで表されるからである。$\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$ と $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$ を用いて両辺を 2 倍すると

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

となる。ここで左辺の $\sin 2x \cos 2x$ を $\frac{1}{2}\sin 4x$ で置き換えると、すべての項が因数 $\sin 4x$ をもつ。

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

すべてを一方の辺に移項すると

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

最初の括弧は $\cos(4x + 2x) = \cos 6x$ である。二つ目については $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$ より $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$ である。よって

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

であるから、$\cos 6x = \frac{1}{2}$ または $\sin 4x = 0$ となり、示すべきことが示された。

次に、$0 \leq x \leq \pi$ における $(\star)$ の解を求める。

考えてみよう $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ の解はすべて $(\star)$ の解だろうか？

必ずしもそうではない。逆にたどれない可能性があったのは余弦を掛けた段階だけであり、それが逆にたどれるのは四つの正接がすべて定義されるときに限られる。したがって $(\star)$ の解は、$\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ の解のうち $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$ を満たすものである。

場合 $\sin 4x = 0$。$[0, \pi]$ においては $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$ である。$x = \frac{\pi}{4}$ と $x = \frac{3\pi}{4}$ では $\tan 2x$ が定義されず、$x = \frac{\pi}{2}$ では $\tan x$ が定義されない。$x = 0$ と $x = \pi$ ではすべての正接が 0 となり、$(\star)$ は $0 = 0$ となる。よって $x = 0$ と $x = \pi$ は解である。

場合 $\cos 6x = \frac{1}{2}$。このとき $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ であるから $x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{18}$ である。$0 \leq 6x \leq 6\pi$ より

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}.$$

を得る。いずれも m が 3 の倍数でない $\frac{m\pi}{18}$ の形である。余弦 $\cos nx$ が 0 になるのは nx が $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$ の奇数倍のときに限られ、そのためには $9 \mid nm$ が必要である。$3 \nmid m$ である

から $9 \mid n$ が必要になるが、これは $n \in \{1,2,3,4\}$ では不可能である。よって四つの正接はすべて定義され、これら六つの値はすべて解である。

以上より、$(\star)$ は $0 \le x \le \pi$ において八つの解をもつ。

$$x = 0,\ \frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18},\ \pi.$$

検算

- (i) で $x = \frac{\pi}{8}$ のとき：$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ かつ $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ であるから、積は $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$ となる。
- (ii) で $x = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$ のとき：$\tan 10^\circ \approx 0.17633$ であり、一方 $\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$ である。
- 両方の方程式を $[0, \pi]$ 上でコンピュータで調べると、それぞれちょうど六つと八つの解が上の値に見つかる。

よくある間違い

- (ii) で $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ を残してしまうこと。これらは $\sin 4x = 0$ を満たすが、$(\star)$ のいずれかの正接が定義されなくなる。
- $x = 0$ と $x = \pi$ を忘れること、あるいは各周期における $2x$（または $6x$）の二つ目の値を見落とすこと。
- 式の整理の途中で $\sin 4x$ で割ってしまい、問題が求めさせようとしている因数を失うこと。

STEP のその先へ

積和公式（product-to-sum formulae）は、$e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$ を実数の世界に映した影である。$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ と書けば、余弦のどんな積も和に変わる。これはフーリエ級数（Fourier series）への第一歩であり、そこでは関数が $\cos nx$ と $\sin nx$ の和として展開される。(ii) に隠れていた印象的な恒等式 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$ は、三角関数の値を 1 の冪根（roots of unity）として見たときに現れる驚きの典型例である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この視点を見事に展開している。

解答例

STEP II 2021、第 2 問

純粋数学 ・ 解の対称式

> **STEP II 2021、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つの数の冪乗の和（sums of powers）は、たった 2 つの量、すなわちそれらの和と積によって決まる。$a+b$ と a^2+b^2 がわかれば積 ab が決まり、したがって a^3+b^3 も決まる。これが小問 (i) の制約条件である。小問 (iii) では、c を「取り除いて」同じ事実を用いる。3 変数の和から c, c^2, c^3 を引くと 2 変数の和が残り、小問 (i) の制約条件は c が満たすべき三次方程式（cubic equation）に変わるのである。

解答

小問 (i)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ より $p^2 = q+2ab$ であるから、

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

次に因数分解（factorisation）$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ を用いると、

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

よって、求める通り $3pq-p^3 = 2r$ である。ここでは p, q, r が実数であることを一切用いていない点に注意しよう。この恒等式（identity）は任意の複素数（complex number）a, b について成り立つ。これは小問 (iii) で必要になる。

小問 (ii)

二次方程式（quadratic equation）$2x^2 - 2px + (p^2 - q) = 0$ は、解の公式（quadratic formula）により常に2つの解をもつ（等しいこともあり、実数でないこともある）。それらを a, b とおく。両辺を2で割ると、この二次式は $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$ となるから、

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

これで $(*)$ の第1式がただちに得られる。さらに

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

これが第2式であり、

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = p^3 - \frac{3p(p^2 - q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

最後の等号では仮定 $3pq - p^3 = 2r$ を用いた。以上より、$(*)$ の3つの式はすべて成り立つ。

この二次方程式の選び方は偶然ではない。小問 (i) から ab がどうあるべきかがわかっており、和が p、積が $\frac{1}{2}(p^2 - q)$ である2つの解をもつ二次式は、まさに $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$ なのである。

小問 (iii)

次のようにおく。

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

考えてみよう 小問 (i) では p, q, r が実数であると仮定していたが、ここではそれらは複素数かもしれない c を含んでいる。それでも小問 (i) を使えるだろうか。

使える。小問 (i) の最後で述べたように、そこでの議論は純粋に代数的なもので、実数であることは一度も用いていない。したがって $3pq - p^3 = 2r$、すなわち

$$3(s - c)(t - c^2) - (s - c)^3 = 2(u - c^3).$$

展開すると

$$3(s - c)(t - c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s - c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

であるから、方程式は

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

となる。c の冪ごとに整理すると

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

よって、求める通り c は $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$ の解である。

係数は s, t, u のみに依存し、これらは a, b, c について対称（symmetric）である。c の役割を a（または b）に置き換えて同じ議論を繰り返せば、a と b も解であることがわかる。したがって、残りの 2 つの解は a と b である。

考えてみよう a, b, c が相異なる（distinct）ことはなぜ重要なのだろうか。

三次方程式の解は高々 3 個である。a, b, c は 3 つの**相異なる**解であるから、これらが解のすべてであり、いずれも単解（simple root）である。よって

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x - a)(x - b)(x - c).$$

（たとえば $a = b$ であれば、わかっている解は 2 つだけとなり、3 つ目の解を特定できない。）定数項を比較すると $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$、すなわち

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

小問 (iv)

ここでは $s = 3, t = 1, u = -3, v = 2$ である。まず整合性を確認する。小問 (iii) の条件は $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$ となり、成り立っている。小問 (iii) によれば、a, b, c は

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9 - 1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

すなわち $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ の解であるはずである。$x = 1$ とすると $1 - 3 + 4 - 2 = 0$ であるから、

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = (x - 1)\big((x - 1)^2 + 1\big),$$

よって解は $1, 1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}$ である。そこで

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

とおく。小問 (iii) はどこを探せばよいかを教えてくれたにすぎないので、ここで実際に確かめなければならない。

▶ $a + b + c = 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3$。

- $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ かつ $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$ であるから、$a^2+b^2+c^2 = 1+2\mathrm{i}-2\mathrm{i} = 1$。
- $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$ かつ $(1-\mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) = -2-2\mathrm{i}$ であるから、$a^3+b^3+c^3 = 1-4 = -3$。
- $abc = 1\cdot(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1\cdot 2 = 2$。

$(**)$ の 4 つの式はすべて成り立つ。（これら 3 つの数をどのように並べ替えても同様に成り立つ。）

検算

- 小問 (i) で $a=1, b=2$ とすると、$p=3, q=5, r=9$ であり、$3pq-p^3 = 45-27 = 18 = 2r$。
- 小問 (iii) で $a,b,c = 1,2,3$ とすると、$s=6, t=14, u=36, v=6$ であり、$s^3-3st+2u = 216-252+72 = 36 = 6v$。三次式は $6x^3-36x^2+66x-36 = 6(x-1)(x-2)(x-3)$ となり、期待通りである。
- 小問 (i)–(iii) の恒等式は、ランダムに選んだ多数の複素数 a, b, c についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (iii) で、三次式の係数が a, b, c について対称であることに触れずに「a と b が残りの解である」と述べてしまう。
- 相異なることを用いて a, b, c が解の**すべて**であると確認せずに、解の積から $s^3-3st+2u = 6v$ を導いてしまう。
- 小問 (iv) で、三次方程式の解を求めたところで止めてしまう。問題は 4 つの式を明示的に確かめることを求めている。

STEP のその先へ

この問題は、冪和 $a^k+b^k+c^k$ と基本対称式（elementary symmetric functions）$a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc を結びつけるニュートンの恒等式（Newton's identities）の小さな場合である。対称式の基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）は、あらゆる対称多項式が基本対称式を用いて表せることを主張しており、これはガロア理論（Galois theory）の出発点である。さらに詳しくは Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照のこと。

解答例

STEP II 2021、第 3 問

純粋数学 ・ 整数部分と小数部分

STEP II 2021、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての実数は、整数部分（integer part）と $[0,1)$ に属する小数部分（fractional part）にただ一通りに分けられる。したがって、方程式が「整数と $[0,1)$ に属する数の和が 4.9 に等しい」と述べているならば、両方の部分が決まってしまう。整数は 4、小数部分は 0.9 でなければならない。(ii) と (iii) では方程式が入り組んでいるが、3 つの式をすべて足し合わせると、各 $\lfloor t \rfloor + \{t\}$ がまとまって t に戻る。こうして 1 本のすっきりした一次方程式が得られ、そこからもとの各方程式を引くと、未知数がちょうど「整数と小数部分の和」の形に分離される。

解答

以下では次の事実を用いる。n が整数で $0 \le f < 1$ かつ $n + f = c$ ならば、$n = \lfloor c \rfloor$ かつ $f = \{c\}$ である。これは $n \le c < n+1$ であることから、n が c を超えない最大の整数として定まるからである。

小問 (i)

第 1 式において、$\lfloor x \rfloor$ は整数であり $0 \le \{y\} < 1$ であるから、

$$\lfloor x \rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

第 2 式において、$\lfloor y \rfloor$ は整数であり $0 \le \{x\} < 1$ であるから、$\lfloor y \rfloor = \lfloor -1.4 \rfloor = -2$ かつ $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$ である。よって

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

これらは両方の式を満たし（$4+0.9=4.9$ および $0.6-2=-1.4$）、しかもこれが唯一の解であることが示された。

小問 (ii)

3つの式を足し合わせる。x、y、z はそれぞれ単独で1回ずつ現れ、さらに異なる2つの式にまたがって $\lfloor\cdot\rfloor+\{\cdot\}$ に分かれた形でもう1回現れる。

$$(x+y+z)+\big(\{x\}+\lfloor x\rfloor\big)+\big(\lfloor y\rfloor+\{y\}\big)+\big(\{z\}+\lfloor z\rfloor\big)=3.9+5.3+5,$$

すなわち $2(x+y+z)=14.2$ であるから、

$$x+y+z=7.1.$$

考えてみよう $x+y+z$ がわかった今、もとの方程式の1つを引くと何が残るだろうか。

$x+y+z=7.1$ から第1式を引くと、x が消えて $y-\lfloor y\rfloor$ と $z-\{z\}$ が残る。

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=7.1-3.9=3.2,$$

これが求める結果である。同様に、第2式と第3式を引くと

$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=7.1-5.3=1.8,\qquad \{x\}+\lfloor y\rfloor=7.1-5=2.1.$$

これらはいずれも「整数と小数部分の和」の形であるから、

$$\begin{aligned}\lfloor z\rfloor&=3, & \{y\}&=0.2,\\ \lfloor x\rfloor&=1, & \{z\}&=0.8,\\ \lfloor y\rfloor&=2, & \{x\}&=0.1.\end{aligned}$$

したがって $x=1.1$、$y=2.2$、$z=3.8$ である。これが唯一可能な解であり、実際に条件を満たす。

$$1.1+2+0.8=3.9,\qquad 0.1+2.2+3=5.3,\qquad 1+0.2+3.8=5.$$

小問 (iii)

同じ工夫が使える。$2\lfloor y\rfloor+2\{y\}=2y$ に注意して3つの式を足し合わせると、

$$2x+4y+2z=14.2,\qquad \text{ゆえに}\qquad x+2y+z=7.1.$$

ここから各式を順に引くと

$$2\{y\}+\lfloor z\rfloor=3.2,\qquad \lfloor x\rfloor+\{z\}=1.8,\qquad \{x\}+2\lfloor y\rfloor=2.1.$$

真ん中の式はおなじみの形であるから、$\lfloor x \rfloor = 1$ かつ $\{z\} = 0.8$ である。

3 番目の式では、$2\lfloor y \rfloor$ はやはり整数であり $0 \leq \{x\} < 1$ であるから、先ほどの議論がそのまま使える。すなわち $2\lfloor y \rfloor = 2$ かつ $\{x\} = 0.1$ である。よって $\lfloor y \rfloor = 1$ であり、$x = 1.1$ となる。

考えてみよう 1 番目の式でも、答えはただ一つに決まるだろうか。

決まらない。ここで $2\{y\}$ は $[0,1)$ ではなく $[0,2)$ に属するので、3.2 を整数と $[0,2)$ に属する数の和として表す方法は 2 通りある。

- $\lfloor z \rfloor = 3$、$2\{y\} = 0.2$ であり、したがって $\{y\} = 0.1$。
- $\lfloor z \rfloor = 2$、$2\{y\} = 1.2$ であり、したがって $\{y\} = 0.6$。

（$\lfloor z \rfloor \geq 4$ ならば $2\{y\} < 0$ となり、$\lfloor z \rfloor \leq 1$ ならば $2\{y\} \geq 2.2$ となる。どちらも不可能である。）$\lfloor y \rfloor = 1$ および $\{z\} = 0.8$ と合わせると、次の 2 つの候補が得られる。

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad \text{または} \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

どちらももとの連立方程式を満たす。

$$(1.1, 1.1, 3.8): \quad 1.1+2+0.8 = 3.9, \quad 0.1+2.2+3 = 5.3, \quad 1+0.2+3.8 = 5;$$
$$(1.1, 1.6, 2.8): \quad 1.1+2+0.8 = 3.9, \quad 0.1+3.2+2 = 5.3, \quad 1+1.2+2.8 = 5.$$

よって、(iii) の連立方程式の解はちょうどこの 2 つである。

検算

上で行ったように、答えをもとの式に代入すると、どの式も成り立つ。独立した確認として、x と y を $[-10, 10]$ に含まれる 0.1 の倍数すべてにわたって動かすコンピュータ探索を行ったところ、(i) の解はちょうど 1 つ、(ii) の解も 1 つ、(iii) の解はちょうど上の 2 つであった。また、(ii) の解について $\{y\} + \lfloor z \rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$ となっており、確かにそうなるべき値になっている。

よくある間違い

- 負の数の床関数（floor）の値を誤ること。$\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ であって -1 ではない。したがって (i) では $\{x\} = 0.6$ である。
- (iii) で $2\{y\}$ を小数部分だと思い込み、解を 1 つしか見つけないこと。$2\{y\}$ は $[0,2)$ に属するので、2 つ目の解が現れるのである。

- 候補をもとの方程式で確かめないこと。上の推論が示しているのは、それらが唯一可能な候補だということだけである。

STEP のその先へ

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ と書くことは、1 を法として（modulo 1）考えることと同じである。小数部分とは、円周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ における x の像にほかならない。床関数と小数部分は整数論（number theory）のいたるところに現れる。たとえば、$n!$ を割り切る素数の冪の指数を与えるルジャンドル（Legendre）の公式や、無理数 α に対して $n\alpha$ の小数部分が $[0,1)$ 上にどのように散らばるかという研究がその例である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、こうした一連の考え方へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP II 2021、第 4 問

純粋数学 ・ ランベルトの W 関数

> **STEP II 2021、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.9 節「新しい関数を発明する」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/lambert-w.html

鍵となる考え方

関数 g は xe^x の逆の操作を行うものであるから、この問題全体は、各方程式をある新しい変数 u について $ue^u = c$ の形に変形することに尽きる。いったんこの形になれば、小問 (i) のグラフからすべてがわかる。すなわち、$c < -\frac{1}{e}$ ならば解はなく、$-\frac{1}{e} < c < 0$ ならば解は 2 つあり、g が選び出すのは常にそのうち $u \geq -1$ を満たす方だけである。対数は $x = e^u$ と置換することで処理する。

解答

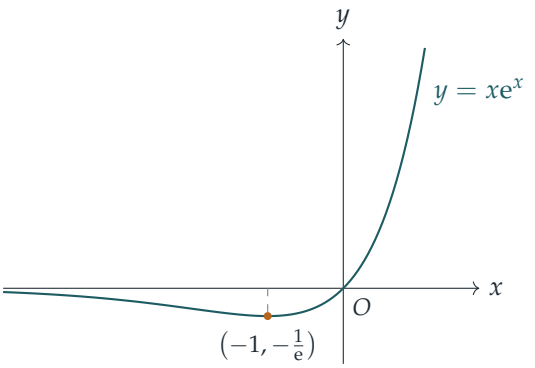
小問 (i)

$y = xe^x$ とおく。積の微分法（product rule）により

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)e^x,$$

であり、$e^x > 0$ であるから、これが 0 になるのは $x = -1$ のときだけである。傾きは $x < -1$ で負、$x > -1$ で正であるから、停留点（stationary point）は $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ における極小点（minimum）ただ 1 つである。

曲線の符号は x の符号と一致し、曲線は原点を通る。$x \to \infty$ のとき、$y \to \infty$ と急速に増大する。$x \to -\infty$ のときは e^x が x に勝つので、$y \to 0$ となり、下側から近づく。すなわち、x 軸の負の部分が漸近線（asymptote）である。



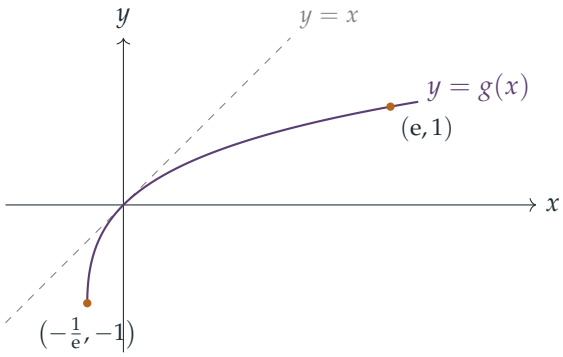
小問 (ii)

f が逆関数（inverse）をもつためには、$[a, \infty)$ 上で一対一（one-to-one）でなければならない。$a < -1$ ならば、この区間は $x = -1$ 付近で極小点の両側にある点を含む。f は連続（continuous）であり、$(-\infty, -1]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[-1, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、$-\frac{1}{\mathrm{e}}$ よりわずかに大きいある値を 2 回とることになる。$a \geq -1$ ならば f は狭義単調増加であり、したがって一対一である。よって、とりうる最小の値は

$$a = -1.$$

である。このとき f は $[-1, \infty)$ を $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$ の上へ写すので、g の定義域（domain）は $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$、値域（range）は $[-1, \infty)$ である。

g のグラフは、小問 (i) のグラフの右側の枝を直線 $y = x$ に関して対称に折り返したもの（鏡映（reflection））である。このグラフは $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, -1\right)$ から鉛直な接線（vertical tangent）をもって始まり（これは極小点における水平な接線を折り返したものである）、原点を傾き 1 で通り（$f'(0) = 1$ であるから）、増加の仕方はますます緩やかになっていく。実際、$g(\mathrm{e}) = 1$ であり、大きな x に対して $g(x)$ は $\ln x$ よりもゆっくり増加する。



小問 (iii) では、次の 2 つの事実を繰り返し用いる。$c \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$ に対して、$u = g(c)$ は $u\mathrm{e}^u = c$ の解のうち $u \geq -1$ を満たすものである。また、小問 (i) のグラフから、方程式 $u\mathrm{e}^u = c$ は次のようになる。

- $c < -\frac{1}{\mathrm{e}}$ ならば実数解をもたない。
- $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ ならば実数解を 2 つもつ。すなわち $g(c) \in (-1, 0)$ と、-1 より小さいもう 1 つの解である。
- $c \geq 0$ ならば実数解をちょうど 1 つ、$g(c)$ をもつ（$u < 0$ のとき左辺は負である）。

小問 (iii)

(a) e^x（これは決して 0 にならない）を掛けると

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

となる。$\frac{1}{5} > 0$ であるから、実数解はちょうど 1 つであり、

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

である。

(b) $\ln x$ が定義されるためには $x > 0$ が必要であるから、$u = \ln x$ を実数として $x = \mathrm{e}^u$ とおく。方程式は

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

となる。しかし、すべての u に対して $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$ であり、$\mathrm{e} > 2$ であるから $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$ である。よって**実数解は存在しない**。

(c) 先ほどと同様に $x = \mathrm{e}^u$ とおくと

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

となる。$\mathrm{e} < 3$ であるから $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$ であり、u の値は 2 つある。したがって（$u \mapsto \mathrm{e}^u$ は一対一であるから）実数解 x も 2 つある。そのうちの 1 つは

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

である。

考えてみよう これは大きい方の解か、それとも小さい方の解か。

もう一方の u の値は -1 より小さく、一方 $g(-\frac{1}{3}) > -1$ である。e^u は u について増加関数であるから、解 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$ は 2 つの解のうち**大きい方**である。

(d) ここでも $x > 0$ である。指数をとると $x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$ となる。$u\mathrm{e}^u$ の形にするには前に掛かる因数と指数を一致させる必要があるので、$u = -\frac{x}{3}$ とおき、両辺に $-\frac{1}{3}$ を掛ける。

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

(c) と同様に $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$ であるから、u の値は 2 つあり、どちらも負である。よって $x = -3u$ により正の解が 2 つ得られる。そのうちの 1 つは

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

である。今度は写像 $u \mapsto x = -3u$ が**減少**である。もう一方の u の値は -1 より小さいので、もう一方の解は 3 より大きい。一方、ここで得た解は $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$ を満たす。したがって、求めた解は 2 つのうち**小さい方**である。

小問 (iv)

$x > 0$ であるから対数をとると、$x^x = 10 \iff x\ln x = \ln 10$ となる。$x = \mathrm{e}^u$ とおくと

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

となる。$\ln 10 > 0$ であるから、これはただ 1 つの解 $u = g(\ln 10)$ をもつ。よって解は

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

である。(同値な表し方として、$c \neq 0$ のとき $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$ であるから、解は $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$ とも書ける。)

検算

- 数値的には $g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$ である。(c) ではこれにより $x \approx 0.5384$ となり、$3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$ である。もう一方の解は約 0.2204 であり、確かに小さい。
- (d) では $x \approx 1.8572$ であり、$3\ln 1.8572 \approx 1.8572$ である。もう一方の解は約 $4.536 > 3$ であり、予想どおりである。
- (iv) では $g(\ln 10) \approx 0.9188$ であるから $x \approx 2.5062$ となり、$2.5062^{2.5062} \approx 10.00$ である。
- (b) では、$2x\ln x + 1$ の最小値は $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$ ($x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ のとき) であり、解が存在しないことが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、曲線がそこで一対一に「見える」からといって $a = 0$ としてしまう。極値をとる点は $x = -1$ であり、原点ではない。
- (d) で $-\frac{1}{3}$ を掛け忘れ、前に掛かる因数が指数と一致せず、g を適用できなくなる。
- g を用いて求めた解が常に大きい方であると思い込む。(c) では $x = \mathrm{e}^u$ が u について増加なのでそのとおりだが、(d) では $x = -3u$ によって大小が逆転するので成り立たない。

STEP のその先へ

関数 g はランベルト W 関数（*Lambert W function*）の主枝（principal branch）であり、通常 W_0 と書かれる。$-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ のときの $u\mathrm{e}^u = c$ のもう一方の解は、第 2 の枝 W_{-1} から得られる。この関数は、遅延微分方程式（delay differential equations）、組合せ論（combinatorics、ラベル付きの木の数え上げ）、物理学など、未知数が指数関数の内側と外側の両方に現れるところならどこにでも現れる。逆関数が一対一でなくなる点を越えて逆関数を延長することは、複素解析（complex analysis）における枝と分岐点（branch point）の理論の出発点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、こうした考え方に出会うための素晴らしい一冊である。

解答例

STEP II 2021、第 5 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2021、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は一階微分方程式（first-order differential equation）であり、変数分離形（separable）でもなく、扱いやすい形の線形（linear）方程式でもすぐにはないが、与えられた置換（substitution）によって直接積分できる方程式に変わる。小問 (ii) は幾何の問題に見えるが、接線（tangent）の方程式を書き下し、それが $(1, t)$ を通るという条件を課すと、ちょうど $a = 1$ のときの小問 (i) の方程式が得られる。グラフの概形は導関数（derivative）から得られ、その導関数は驚くほど簡単な形になる。

解答

小問 (i)

この方程式は $x \neq a$ でしか意味をもたないので、$x > a$ である区間、または $x < a$ である区間で考える。$y = (x-a)u$ とおくと、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

これを方程式に代入すると

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

u を含む項が打ち消し合う。これこそがこの置換の狙いである。$x = (x-a) + a$ と書くと

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{よって} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

となる。ただし c は定数である。両辺に $x-a$ を掛けて

$$\boxed{y = a + (x-a)\big(c - \ln|x-a|\big)}$$

を得る。ここで定数 c は $x=a$ の両側で異なってもよい。

確認：$y' = c - \ln|x-a| - 1$ であるから $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$ となり、確かに方程式を満たす。

小問 (ii)

点 $\big(t, \mathrm{f}(t)\big)$ における接線は $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$ である。これが $(1,t)$ を通るための必要十分条件は

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{すなわち} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

t を x と書き直すと、これは $a=1$ のときの小問 (i) の方程式であり、$x \neq 1$ で成り立つ。したがって $x<1$ と $x>1$ のそれぞれにおいて

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(c - \ln|x-1|\big),$$

であり、定数は各側で別々に定める。

> **考えてみよう** $\mathrm{f}(0)=0$ のような一つの条件だけで、すべての x について曲線が決まらないのはなぜか。

方程式は $x=1$ において何も教えてくれないので、$x<1$ での解と $x>1$ での解は互いに独立である。問題がそれぞれの小問に別々の条件を与えているのはそのためである。

(a) $x<1$ では $|x-1| = 1-x$ である。条件 $\mathrm{f}(0)=0$ より $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$ となるので $c=1$ であり、

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(1-x)\big) \quad (x<1).}$$

微分すると $\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$ である。したがって次がわかる。

- $\mathrm{f}'(x) = 0$ となるのは $1-x=1$ のときに限られ、停留点（stationary point）は $(0,0)$ ただ一つである。$x<1$ で $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$ であるから、曲線は下に凸（convex）であり、$(0,0)$ は極小（minimum）である。よって $\mathrm{f}(x) \geq 0$ であり、曲線は原点で x 軸にちょうど接する。
- $x \to 1^-$ のとき、$z = x-1 \to 0$ とおくと、$z\ln|z| \to 0$ を用いて $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$ となる。傾き（gradient）$-\ln(1-x) \to +\infty$ であるから、曲線は $(1,1)$ に近づき、そこで垂直になる。

- $x \to -\infty$ のとき、$x-1$ と $1-\ln(1-x)$ はともに負で絶対値が大きくなるので、$f(x) \to +\infty$ である。

描くのに役立つ点：$f(1-e)=1$、$f(-1)=2\ln 2-1 \approx 0.39$。

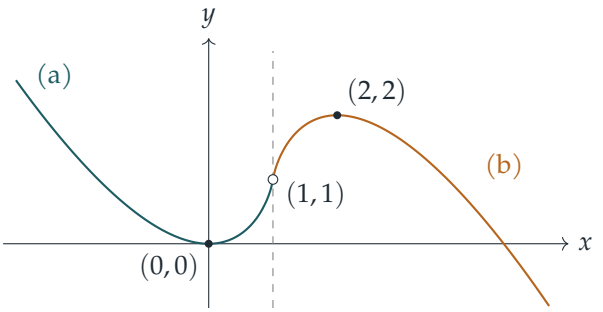
(b) $x>1$ では $|x-1|=x-1$ である。条件 $f(2)=2$ より $2=1+1\cdot(c-0)$ となるので、ここでも $c=1$ であり、

$$f(x)=1+(x-1)\big(1-\ln(x-1)\big) \quad (x>1), \qquad f'(x)=-\ln(x-1).$$

- 停留点は $x=2$ における $(2,2)$ のみである。ここで $f''(x)=-\dfrac{1}{x-1}<0$ であるから、曲線は上に凸（concave）であり、$(2,2)$ は極大（maximum）である。
- $x \to 1^+$ のとき、（同じ極限により）$f(x) \to 1$ であり、$f'(x) \to +\infty$ である。すなわち曲線は $(1,1)$ から垂直に出発する。
- $x \to \infty$ のとき $1-\ln(x-1) \to -\infty$ であるから、$f(x) \to -\infty$ である。曲線は $(1+e,1)$ を通り、$x \approx 4.59$ の付近で x 軸とただ一度交わる。

> **考えてみよう** (a) を解き終えた後、(b) の概形をもっと手早く知る方法はあるだろうか。

ある。$s=|x-1|$ とおくと、(a) の枝は $f(1-s)=1-s(1-\ln s)$、(b) の枝は $f(1+s)=1+s(1-\ln s)$ である。よって $f(1+s)-1=-\big(f(1-s)-1\big)$ となり、(b) の枝は (a) の枝を $(1,1)$ のまわりに半回転させたものである。極小点 $(0,0)$ は極大点 $(2,2)$ に移る。



曲線は $x=1$ では定義されない（白丸）が、どちらの枝も垂直な接線をもって $(1,1)$ に近づく。

検算

- 接線の性質を直接確かめる。$t=0$ では接線は水平で $y=0$ であり、確かに $(1,0)$ を通る。$t=2$ では接線は $y=2$ であり、$(1,2)$ を通る。

- $t = -1$ のとき：$\mathrm{f}(-1) \approx 0.386$、$\mathrm{f}'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$ である。$x = 1$ における接線の高さは $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$ であり、t に等しい。
- 対称性の確認：すべての $s > 0$ に対して $\mathrm{f}(1+s) + \mathrm{f}(1-s) = 2$ である。たとえば $\mathrm{f}(4) + \mathrm{f}(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$。

よくある間違い

- $\ln|x-a|$ の絶対値（modulus）を書き忘れ、その結果、小問 (a) で $x < 1$ を扱えなくなる。
- (a) で求めた定数が $x > 1$ でも自動的に使えると思い込む。ここではたまたま同じ値になるが、それは $\mathrm{f}(2) = 2$ を用いて確かめなければならない。
- $x \to 1$ のとき $\mathrm{f}(x) \to 0$ となる、あるいは発散すると結論してしまう。項 $(x-1)\ln|x-1|$ は 0 に収束するので $\mathrm{f} \to 1$ である。発散するのは傾きのほうである。

STEP のその先へ

方程式 $(x-a)y' = y - x$ は、原点を $x = a$、$y = a$ に平行移動すると**同次形**（homogeneous）になる。実際、$X = x - a$、$Y = y - a$ とおくと $XY' = Y - X$ となる。このとき置換 $Y = Xu$ は同次形方程式に対する標準的な解法である。y' の係数が 0 になる点 $x = a$ は**特異点**（singular point）であり、特異点の両側での解は互いにまったく関係がなくてもよい。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式の教科書）は、この二つの考え方をともに扱っている。

解答例

STEP II 2021、第 6 問

純粋数学 ・ 円の幾何と近似

STEP II 2021、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの三角形の中で起こる。すなわち A、道路の中心 O、そして自転車が描く円の中心 O' の三点がつくる三角形である。対称性（symmetry）により O' は O を通り $\angle AOB$ を二等分する直線上にあり、接する（tangency）という条件から距離 OO' が決まる。あとはこの三角形で余弦定理（cosine rule）と正弦定理（sine rule）を用いれば、d と $\alpha - \theta$ が求まる。最後の小問では、1 よりはるかに小さいとは、w/R について一次の項（first-order terms）までを残し、小角近似（small-angle approximation）を用いるという意味である。

解答

O を原点とし、対称軸（line of symmetry）を鉛直にとる。すると $A = \big(-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha\big)$ であり、B はその鏡像である。O からの距離を r とすると、道路は領域 $R \le r \le R+w$ である。

小問 (i)

弦（chord）AB 上で O に最も近い点はその中点 M である。なぜなら三角形 OAB は二等辺三角形（isosceles）なので $OM \perp AB$ となるからである。このとき

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

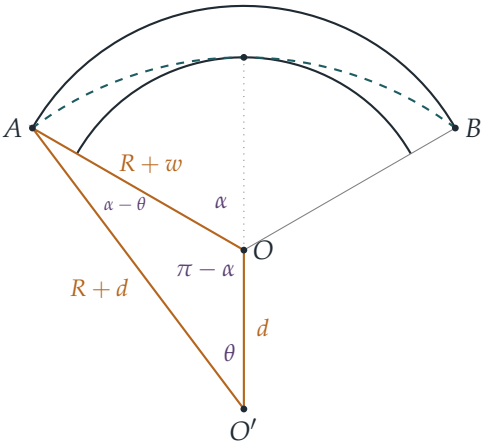
となる。ここで $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$（$\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$ による）を用い、続いて $w < R$ を用いた。よって M は内側の円の真に内部にあり、そこは道路の外である。A から B へまっすぐ走る経路は必ず M を通るので、道路上にとどまることはできない。

小問 (ii)

O' はどこにあるか？円は A と B を通るので、その中心は両者から等距離にあり、AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）、すなわち O を通る対称軸上にある。この円は内側の円に接し、しかもそれより大きい（$R+d>R$）ので、内側の円はこの円の内部にあって内側から接する（internally tangent）。内接する二円では、中心間の距離は半径の差に等しい：

$$OO' = (R+d) - R = d.$$

経路は外側、つまり道路の方へふくらむので、図のように O' は O に関して道路と反対側にある。すると三角形 AOO' において $OA = R+w$、$OO' = d$、$O'A = R+d$ であり、O における角は $\pi - \alpha$ である（$\angle AOM = \alpha$ の補角（supplementary angle）である）。O' における角は $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$ なので、A における角は $\pi - (\pi - \alpha) - \theta = \alpha - \theta$ である。



(a)　三角形 AOO' に余弦定理を適用し、$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned}(R+d)^2 &= (R+w)^2 + d^2 + 2(R+w)d\cos\alpha \\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R+w)d\cos\alpha \\ 2d\big(R - (R+w)\cos\alpha\big) &= w(2R+w),\end{aligned}$$

となるので

$$d = \frac{w(2R+w)}{2\big(R-(R+w)\cos\alpha\big)}.$$

分母の括弧は小問 (i) により正なので、これは意味のある正の長さである。

(b) 同じ三角形に正弦定理を適用し、角 $\alpha-\theta$（対辺 $OO'=d$）と角 $\pi-\alpha$（対辺 $O'A=R+d$）を組にすると

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)}{d}=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{R+d}\quad\Longrightarrow\quad\sin(\alpha-\theta)=\frac{d\sin\alpha}{R+d}.$$

小問 (iii)

$\varepsilon=w/R$ とおくと、$0<\varepsilon\ll 1$ である。(a) の結果を R で割ると

$$\frac{d}{R}=\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\big(1-(1+\varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

$\cos\alpha\le\frac{1}{2}$ より、分母は少なくとも $2\big(1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\big)=1-\varepsilon$ であるから

$$0<\frac{d}{R}\le\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\approx 2\varepsilon,$$

となり、これは 1 よりはるかに小さい。（一次の近似では $d/R\approx\varepsilon/(1-\cos\alpha)$ である。）

考えてみよう 正弦が小さいことからわかるのは、角が 0 に近いか、または π に近いかということだけである。どちらだろうか？

(b) より $0<\sin(\alpha-\theta)=\dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1+d/R}<\dfrac{d}{R}$ であり、これは小さい。角 $\alpha-\theta$ は三角形 AOO' の内角なので正であり、さらに $\theta>0$ より $\alpha\le\frac{1}{2}\pi$ よりも小さい。$(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上で正弦は増加し、$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$ を満たすので、$\alpha-\theta\le\frac{\pi}{2}\sin(\alpha-\theta)<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{R}$ となり、これもまた 1 よりはるかに小さい。

小問 (iv)

友人は外側の縁に沿って走る。これは O において 2α の角をなす半径 $R+w$ の弧なので、その経路の長さは $L=2\alpha(R+w)$ である。私の経路は、AB に関して O' と反対側にある半径 $R+d$ の弧であり、O' において 2θ の角をなすので、その長さは $2\theta(R+d)$ である。したがって

$$\begin{aligned}S&=2\alpha(R+w)-2\theta(R+d)\\&=2(R+d)(\alpha-\theta)+2\alpha(R+w)-2\alpha(R+d)\\&=2(R+d)(\alpha-\theta)+2\alpha(w-d),\end{aligned}$$

となり、題意が示された（$2\alpha(R+d)$ を加えて引いた）。

近似。ここからは ε について一次まで計算し、残す項に比べて ε^2 のオーダーの項は無視する。(iii) より $\alpha-\theta$ は小さいので、$\alpha-\theta\approx\sin(\alpha-\theta)$ であり、その誤差は $(\alpha-\theta)^3$

のオーダーである。(b) より

$$2(R+d)(\alpha-\theta) \approx 2(R+d)\cdot\frac{d\sin\alpha}{R+d} = 2d\sin\alpha.$$

よって

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha-\sin\alpha).$$

ここで (iii) の $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$ を用いると

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w\cdot\frac{\alpha-\alpha\cos\alpha-\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

最後に $L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$ であり、S はすでに ε について一次なので、L を $2\alpha R$ で置き換えても S/L は二次のオーダーでしか変わらない。よって

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

となり、これが求める割合である。

検算

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ のとき、この割合は $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$ であり、$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ のときはおよそ $0.654\,\frac{w}{R}$ である。どちらも正であり、そうでなければならない。$\tan\alpha > \alpha$ から $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$ が得られるからである。
- $R = 1$、$w = 0.01$、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ のとき、厳密な式からは $d \approx 0.01005$、$\alpha-\theta \approx 0.00995$、$S/L \approx 0.006285$ が得られ、近似値 0.006366 と比べられる。相対誤差は約 1% で、当然そうあるべきように w/R のオーダーであり、w を 10 分の 1 にすると誤差も 10 分の 1 になる。
- コンピュータによる検算では、A と B を座標上に置いて接する円を直接求め、R、w、α を無作為に何千通りも選んで、d、$\sin(\alpha-\theta)$、S の式が正しいことを確かめた。

よくある間違い

- $OO' = R+d+R$ や $OO' = w$ としてしまうこと。二円は**内側で**接するので、中心間の距離は半径の差 d である。
- 三角形 AOO' の O における角に対して、$\cos(\pi-\alpha)$ ではなく $\cos\alpha$ を使ってしまうこと。これでは最後の項の符号が逆になる。
- (iii) で、$\sin(\alpha-\theta)$ が小さいことだけを述べること。角そのものが小さいと結論するには、$\alpha-\theta$ が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ にあることも必要である。

STEP のその先へ

「1 よりはるかに小さい」というのは摂動論（perturbation theory）の言葉である。小さなパラメータ ε について展開し、主要項を残し、誤差が本当により高次であることを確かめるのである。大学ではこれをテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）とランダウの記号（big-O notation）によって厳密に扱い、ここでは S/L が与えられた割合の ε 倍に ε^2 のオーダーの項を加えたものに等しいことが示される。剰余項付きのテイラーの定理を丁寧に扱ったものとしては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、同じ趣向の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2021、第 7 問

純粋数学 • 回転行列

> **STEP II 2021、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

2×2 の回転行列（rotation matrix）は非常に限られた形をしている。すなわち $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ という形であり、その列ベクトルは単位ベクトル（unit vector）である。$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ もこの形を保つことを要請すると、ϕ は完全に決まる。$\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$ を満たす一般の行列に対しては、行列式（determinant）（これは乗法的である）と、関係式 $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$ が有用な道具となる。後者を用いると、$\mathbf{S}$ の任意の累乗を $\mathbf{S}$ と $\mathbf{I}$ の一次結合で表すことができる。

解答

小問 (i)

$c=\cos\phi$、$s=\sin\phi$ とおくと、

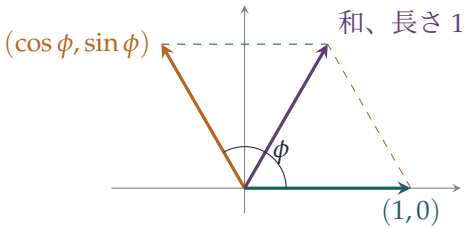
$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1+c & -s\\ s & 1+c\end{pmatrix}.$$

これはすでに $\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}$ という形をしており、このような行列が回転行列となるのは $p^2+q^2=1$ のときであり、かつそのときに限る（このとき、ある θ について $(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$ となる）。したがって

$$(1+c)^2+s^2=1 \iff 2+2c=1 \iff \cos\phi=-\tfrac{1}{2}.$$

が必要である。$0^\circ\le\phi<360^\circ$ の範囲では、これより $\phi=120^\circ$ または $\phi=240^\circ$ を得る。

幾何学的には、$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ の第 1 列は単位ベクトル $(1,0)$ と $(\cos\phi,\sin\phi)$ の和であり、この和もまた単位ベクトルでなければならない。すなわち、3 つのベクトルは $\phi=120^\circ$ の場合の図のように正三角形（equilateral triangle）をなす。



いずれの場合も $\mathbf{R}^3$ は 3ϕ の回転であり、これは 360° または 720°、すなわち整数回の一周である。よって $\mathbf{R}^3=\mathbf{I}$ である。

小問 (ii)

行列式。det は乗法的であるから、$(\det\mathbf{S})^3=\det(\mathbf{S}^3)=\det\mathbf{I}=1$ である。行列は実行列なので、$\det\mathbf{S}$ は 3 乗すると 1 になる実数であり、そのような実数は 1 のみである。よって $\det\mathbf{S}=ad-bc=1$ である。

2 次の関係式。展開すると、

$$\mathbf{S}^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ca+dc & bc+d^2\end{pmatrix},\qquad (a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}a^2+ad-1 & ab+bd\\ ac+dc & ad+d^2-1\end{pmatrix}.$$

非対角成分は一致し、対角成分も $bc=ad-1$（すなわち $\det\mathbf{S}=1$）より一致する。よって、求めるとおり $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$ である。

トレース。$t=a+d$ とおく（t はトレース（trace）である）。関係式に $\mathbf{S}$ を掛け、再び関係式を用いると、

$$\mathbf{S}^3=t\mathbf{S}^2-\mathbf{S}=t\big(t\mathbf{S}-\mathbf{I}\big)-\mathbf{S}=(t^2-1)\mathbf{S}-t\mathbf{I}.$$

$\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$ とおくと、

$$(t^2-1)\mathbf{S}=(t+1)\mathbf{I}.$$

を得る。

考えてみよう そのまま t^2-1 で割って終わりにしてよいだろうか？

注意なしにはできない。$t^2-1=0$ の場合を別に調べる必要があり、実際に起こるのはこの場合である。

- $t^2\neq1$ ならば、$\mathbf{S}=\dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I}=k\mathbf{I}$（$k$ は実数）となる。このとき $\mathbf{S}^3=k^3\mathbf{I}=\mathbf{I}$ より $k^3=1$ でなければならず、$k=1$、すなわち $\mathbf{S}=\mathbf{I}$ となるが、これは除外されている。

- よって $t^2 = 1$ である。方程式は $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$ となるので、$t = -1$ である（$t = 1$ とすると $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$ となり、これは誤りである）。

したがって $a + d = -1$ である。

小問 (iii)

まず $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ である。そうでなければ $\mathbf{S} + \mathbf{I} = 2\mathbf{I}$ となり、その行列式は 4 で、長さを 2 倍にするので回転ではないからである。よって小問 (ii) が適用でき、$a + d = -1$ である。

$\mathbf{S} + \mathbf{I}$ は回転であるから、その回転角を θ とすると、

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

トレースの条件より $2\cos\theta - 2 = -1$、よって $\cos\theta = \frac{1}{2}$、$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。すると

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

となり、これは回転行列の形をしていて、$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ を満たす。したがって $\mathbf{S}$ は回転であり、その余弦は $-\frac{1}{2}$、正弦は $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

回転角は 120°（$\theta = 60^\circ$ のとき）または 240°（$\theta = 300^\circ$ のとき）である。どちらも実際に起こる。小問 (i) より、これらの回転はいずれも $\mathbf{S} + \mathbf{I}$ が回転であり、かつ $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$ を満たすからである。（同じことであるが、$\mathbf{S}$ が回転であるとわかれば、小問 (i) そのものが可能な回転角を与えている。）

検算

- $\phi = 120^\circ$ のとき $\mathbf{R} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ であり、これは 60° の回転である。$\phi = 240^\circ$ のときは 300° の回転である。
- 行列 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$ を満たし（計算して確かめよ）、回転ではない。それでも小問 (ii) の予測どおり、行列式は 1、トレースは -1 である。その $\mathbf{S} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は回転ではなく、小問 (iii) と整合する。
- $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ を満たす多数のランダムな実行列についてコンピュータで確認したところ、いずれも行列式 1、トレース -1 であり、$\mathbf{S}^2$ の関係式も成り立った。また、小問 (iii) で θ を走査したところ、$\theta = 60^\circ, 300^\circ$ のみが見つかった。

よくある間違い

- $t^2 - 1$ が 0 になりうるかを確かめずに割ってしまうこと。$t^2 = 1$ の場合こそがまさに答えである。
- 小問 (iii) で小問 (ii) を使う前に、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ を示しておく必要があることを忘れること。
- $\det(\mathbf{S} + \mathbf{I}) = 1$ であれば $\mathbf{S} + \mathbf{I}$ が回転になるのに十分だと考えること。ここではそれは自動的に成り立つので、何の情報も与えない。

STEP のその先へ

関係式 $\mathbf{S}^2 = (a + d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$ は、ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）の 2×2 の場合である。この定理は、任意の正方行列はそれ自身の特性多項式（characteristic polynomial）を満たす、というものである。小問 (ii) は、位数（order）3 の実 2×2 行列の固有値（eigenvalue）は 1 の 3 乗根（cube roots of unity）のうち実数でない 2 つであることを述べており、そのような行列は常に 120° の回転と**相似**（similar）であるが、必ずしもそれと等しいとは限らない。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、固有値と相似が展開されている。

解答例

STEP II 2021、第 8 問

純粋数学 ・ 積分の漸化式

STEP II 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.9 節「*e* に迫る分数」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/e-approximations.html

鍵となる考え方

関数 $t^n(1-t)^n$ はただ一つの二次式 $u = t(1-t)$ の累乗であるから、その微分は連鎖律（chain rule）を 2 回使うだけで済む。この関数とその導関数（derivative）はどちらも $t = 0$ と $t = 1$ で消えるので、e^t に対して部分積分（integration by parts）を 2 回行うと境界項（boundary term）はすべて消え、小問 (i) の第 2 次導関数がそのまま漸化式（recurrence）に変わる。積分の値は 0 とごく小さな量の間に挟まれ、このことから e が分数 $-a_n/b_n$ によって非常によく近似されることが導かれる。

解答

小問 (i)

$u = t(1-t) = t - t^2$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 - 2t$、$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -2$ であり、

$$(1-2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2 = 1 - 4u$$

である。$f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$ とすると、連鎖律より $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ である。積の微分法則（product rule）によってもう一度微分すると（u^{n-2} が多項式となるよ

う $n \geq 2$ とする)、

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big] \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

小問 (ii)

$n \geq 2$ として引き続き $f(t) = t^n(1-t)^n$ とすると、$n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ である。毎回、多項式の側を微分し e^t の側を積分して部分積分を 2 回行うと、

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

考えてみよう なぜ二つの境界項はどちらも消えるのか？

$f(t) = u^n$ と $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ はどちらも因子 $u = t(1-t)$ を含み（ここで $n \geq 2$、したがって $n-1 \geq 1$ であることを用いる)、$t = 0$ と $t = 1$ のどちらにおいても $u = 0$ となるからである。よって

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

ここで小問 (i) の結果を $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$ の形に書いて代入すると、

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1} \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$ を用いた。$n!$ で割ると

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

となり、題意が示された。

小問 (iii)

まず、$T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$ である。

$T_1 = \int_0^1 (t - t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ については、$\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$ および $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^t$ が成り立つことを微分によって確かめられるので、

$$\int_0^1 (t - t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2 + 3t - 3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

すなわち $T_1 = 3 - \mathrm{e}$ である。

したがって $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$（$(a_0, b_0) = (-1, 1)$）、$T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$（$(a_1, b_1) = (3, -1)$）であり、係数はすべて整数である。ある $n \geq 2$ について、T_{n-2} と T_{n-1} が整数係数でこの形に書けると仮定する。小問 (ii) より

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

であり、$2(2n-1)$ は整数であるから、どちらの括弧の中も整数である。（強い）数学的帰納法（strong induction）により、$n \geq 0$ であるすべての T_n は $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ を用いて $a_n + b_n\mathrm{e}$ と書ける。

小問 (iv)

評価。$0 < t < 1$ のとき $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$ であるから $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$ であり、また $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$ である。よって開区間 $(0, 1)$ 上で

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}$$

が成り立つ。被積分関数（integrand）は連続であるから、これらの狭義の不等式（strict inequality）を $[0, 1]$（長さ 1 の区間）上で積分しても狭義のままである：

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

（$n = 0$ のときは左側の因子は単に 1 であり、狭義性は $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$ から従う。）

極限。$b_n \neq 0$ であるから、$T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$ を b_n で割ると

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{よって} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

ここで、b_n が零でない**整数**であり、したがって $|b_n| \geq 1$ であることを用いた。$n \to \infty$ のとき $\mathrm{e}/n! \to 0$ であるから、$-a_n/b_n \to \mathrm{e}$ である。

実際には、この評価はかなり甘い。漸化式から $(a_2, b_2) = (-19, 7)$、$(a_3, b_3) = (193, -71)$ であり、近似値 $\frac{19}{7} \approx 2.714$ と $\frac{193}{71} \approx 2.71831$ が得られる。一方、$\mathrm{e} \approx 2.71828$ である。

検算

- 小問 (i) で $n = 2$ とおく：$t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$ の第 2 次導関数は $2 - 12t + 12t^2$ であり、公式からは $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$ が得られる。
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$ は正であり、小問 (iv) が示すとおり $\mathrm{e}/1!$ より小さい。さらに $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$ であり、これは計算機による積分の数値計算で確かめられる。漸化式と評価も、n が 11 までについて同様に確かめられる。

- $n = 4, 5, 6$ に対する $-a_n/b_n$ の値は $\frac{2721}{1001}$、$\frac{49171}{18089}$、$\frac{1084483}{398959}$ であり、e との差はそれぞれ約 10^{-7}、3×10^{-10}、5×10^{-13} である。これは $e/n!$ だけから予想されるよりもはるかに速い。

よくある間違い

- 境界項がなぜ消えるのかを述べ忘れること、あるいはそれに $n \geq 2$ が必要であることに気づかないこと。$n = 1$ のときは導関数 $1 - 2t$ が両端で零にならない。
- 小問 (iv) で $|b_n| \geq 1$ を使わずに $b_n \neq 0$ だけを用いること。零でない実数はいくらでも小さくなりうる。T_n/b_n が発散しないのは、b_n が整数であるという事実のおかげである。

STEP のその先へ

これは、e が無理数（irrational）であること、さらには超越数（transcendental）であることを証明したエルミート（Hermite）の 1873 年の手法の核心である。すなわち、零ではないが零に収束するような整数係数の組合せ $a_n + b_n e$ を構成するのである。もし $e = p/q$ ならば、$q(a_n + b_n e) = qa_n + b_n p$ は $qe/n!$ より小さい正の整数となるが、これは n が大きいとき不可能である。同じ多項式 $t^n(1-t)^n$ は、$\zeta(3)$ が無理数であることを示した Beukers の有名な証明にも現れる。数が分数によってどれほどよく近似できるかについてさらに知りたければ、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

解答例

STEP II 2021、第 9 問

力学 ・ 静力学

STEP II 2021、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

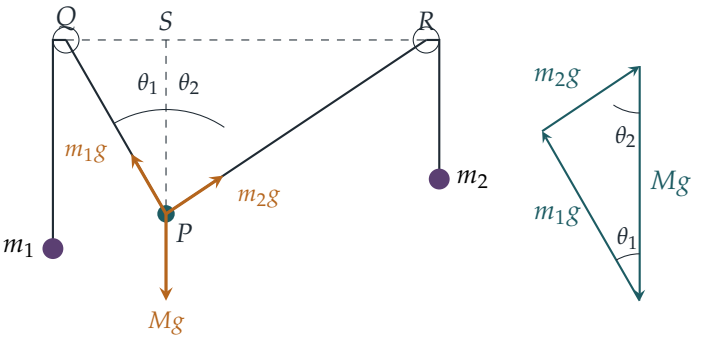
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

滑車（pulley）は滑らか（smooth）なので、糸の各部分の張力（tension）はその先に吊るされた質点の重さに等しい。したがって、P にはたらく 3 つの力の大きさの比は $m_1 : m_2 : M$ である。これら 3 つの力をつなぎ合わせると閉じた三角形ができ、その辺は $m_1 g$、$m_2 g$、Mg、角は θ_1 と θ_2 から作られる。この三角形に余弦定理（cosine rule）を適用すれば、すべてが求まる。不等式は「2 つの角がともに鋭角（acute）であるような三角形が存在する」という条件から得られ、比は $\tan\theta_1$ と $\tan\theta_2$ から得られる。

解答

モデル化。質点は大きさのない質点（point mass）とし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとし、滑車は小さく滑らかであるとする。よって PQ の張力は m_1 を支える鉛直部分の張力に等しく、m_1 は釣り合い（equilibrium）の状態にあるから $T_1 = m_1 g$ である。同様に PR の張力は $T_2 = m_2 g$ である。$h = SP$ とおく。



小問 (i)

P において水平方向と鉛直方向に分解する（g は約分する）と、

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

同じことだが、3 つの力を矢印の先と根元をつなぐように並べると、辺が $m_1 g$、$m_2 g$、Mg の閉じた三角形ができる（図の右側）。これを力の三角形（triangle of forces）という。辺 Mg は鉛直なので、辺 Mg と辺 $m_1 g$ のなす角は θ_1（辺 $m_2 g$ の対角）であり、Mg と $m_2 g$ のなす角は θ_2（$m_1 g$ の対角）である。残りの角、すなわち Mg の対角は $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$ である。

図よりも計算のほうが好みなら、同じ事実は $(*)$ からも得られる。$m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$ と $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$ と書き、両辺を 2 乗して加えると、

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{よって} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

となり、2 つの辺の役割を入れ替えれば

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

(a) $\theta_1 + \theta_2$ は 0° より大きく 180° より小さいので、力の三角形はつぶれていない本当の三角形である。したがって三角形不等式（triangle inequality）は等号なしで成り立ち、$M < m_1 + m_2$ が得られる。

下からの評価には、θ_2 が鋭角であること、すなわち $\cos\theta_2 > 0$ を用いる。$2Mm_2 > 0$ なので、上の式から

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

が得られる。最後の変形は $M > 0$ かつ $m_1^2 - m_2^2 > 0$ であるから正しい。以上を合わせて

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

考えてみよう θ_1 に関する条件ではなく、θ_2 に関する条件が効いてくるのはなぜだろうか。

三角形では、大きい辺に向かい合う角ほど大きい。$m_1 > m_2$ なので、角 θ_2（$m_1 g$ の対角）は θ_1（$m_2 g$ の対角）より大きい。よって θ_2 が鋭角でありさえすれば、θ_1 も自動的に鋭角となる。実質的な制約は θ_2 に関するものだけである。（実際、$m_1 > m_2$ なので、すべての $M > 0$ に対して $\cos\theta_1 > 0$ が成り立つ。）

(b) $SP = h$ とすると、直角三角形 QSP と RSP において

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

したがって

$$\begin{aligned} r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ &= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad ((*)\text{ と余弦の式を用いた}) \\ &= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2}, \end{aligned}$$

となり、これが求める比である。(a) より分母・分子はともに正なので $r > 0$ であり、$m_1 > m_2$ なので $r < 1$ である。つまり図が示すとおり、点 S は Q に近い側にある。

小問 (ii)

力の三角形の辺 Mg（その対角は $180^\circ - (\theta_1+\theta_2)$）に対する余弦定理は

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

となる。（計算で示すなら、$(*)$ の 2 つの式をそれぞれ 2 乗して加えればよい。）$M^2 = m_1^2+m_2^2$ のとき、これより $\cos(\theta_1+\theta_2) = 0$ でなければならない。θ_1 と θ_2 は鋭角なので $0^\circ < \theta_1+\theta_2 < 180^\circ$ であり、可能なのは

$$\theta_1+\theta_2 = 90^\circ.$$

のみである。よって糸は P で直角をなす。（この M の値は (a) の範囲に確かに入っているので、この配置は実現可能である。）

このとき余弦の式は簡単になり、$\cos\theta_1 = \dfrac{2m_1^2}{2Mm_1} = \dfrac{m_1}{M}$、$\cos\theta_2 = \dfrac{m_2}{M}$ となる。$\theta_2 = 90^\circ - \theta_1$ なので $\sin\theta_1 = \cos\theta_2 = m_2/M$ であり、

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

したがって

$$\frac{QR}{SP} = \frac{h\tan\theta_1 + h\tan\theta_2}{h} = \frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

となり、$QR : SP = (m_1^2+m_2^2) : m_1m_2$ である。

検算

- $m_1 = 5$、$m_2 = 3$、$M = 6$（$4 < M < 8$ の範囲内）として $(*)$ を数値的に解くと、$\theta_1 \approx 29.93^\circ$、$\theta_2 \approx 56.25^\circ$ となる。このとき $\tan\theta_1/\tan\theta_2 \approx 0.3846 = \frac{5}{13}$ であり、$r = \frac{36-25+9}{36-9+25} = \frac{20}{52}$ と一致する。

- 範囲の端では、$M \to \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$ のとき $\theta_2 \to 90^\circ$ かつ $r \to 0$ となり（糸 PR が水平になる）、$M \to m_1 + m_2$ のときは両方の角が 0 に近づき、P は QR のはるか下まで下がる。
- 小問 (ii) で $m_1 = 4$、$m_2 = 3$、$M = 5$ とすると、$\tan\theta_1 = \frac{3}{4}$、$\tan\theta_2 = \frac{4}{3}$、$QR/SP = \frac{25}{12}$ となる。$(*)$ を確かめると、$4 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{4}{5}$ かつ $4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 5$ である。

よくある間違い

- 力の三角形で Mg の対角を $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$ ではなく $\theta_1 + \theta_2$ としてしまう。こうすると余弦定理の符号が逆になる。
- 三角形不等式を等号つきで使ってしまう、あるいは下からの評価に角が鋭角であるという条件が必要なことを忘れる。
- 比を逆にしてしまう。$r = QS/SR$ であり、QS は重いほうの質点の側の辺である。

STEP のその先へ

力の三角形は、ある一般的な事実の最も簡単な場合である。釣り合っている力の和は零ベクトルになるので、それらを先と根元をつなぐように描くと閉じた多角形ができる。技術者はこの考え方（「力の多角形（force polygon）」）を骨組み構造の解析に用いており、大学 1 年の力学では、モーメント（moment）も釣り合うという条件とともに、静力学（statics）のベクトル形式として再び登場する。さらに知りたければ、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2021、第 10 問

力学 ・ 非慣性系

> **STEP II 2021、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.5 節「加速する列車の中の重力」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/accelerating-frame.html

鍵となる考え方

座標軸は列車とともに動くので、慣性系（inertial frame）ではない。最もすっきりした対処法は、ビーズの**真の**加速度、すなわち列車に対するビーズの相対加速度に列車自身の加速度を加えたものを求めることである。そうすればニュートンの第 2 法則（Newton's second law）が成り立つ。また、針金は滑らか（smooth）なので抗力（reaction）は針金に垂直であり、ビーズの経路に沿って仕事をしない。運動方程式（equation of motion）とビーズの（相対）速度との内積をとると、未知の抗力が消え、保存されるエネルギーのような量が残る。

解答

ビーズを質量 m の質点、針金を滑らかなものとしてモデル化する。したがって、針金がビーズに及ぼす抗力 $\mathbf{N}$ はつねに針金に垂直である。東向きと上向きの単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ とする。

列車は西向きに加速するので、その加速度は $-a\mathbf{i}$ である。列車に対するビーズの位置は $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ なので、ビーズの真の（地上から見た）加速度は

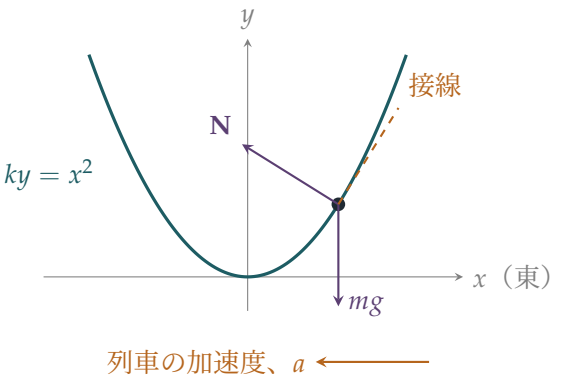
$$(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

である。ビーズにはたらく力は重力 $-mg\mathbf{j}$ と $\mathbf{N}$ だけなので、ニュートンの第 2 法則よ

り

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$

が成り立つ。



小問 (i)

ビーズが列車に対して原点にとどまったと仮定する。するとビーズは列車と同じ加速度 $-a\mathbf{i}$ をもつので、水平方向の力 $-ma\mathbf{i}$（ただし $a>0$）が必要になる。しかし原点では針金 $y=x^2/k$ の傾きは $2x/k=0$ なので、針金はそこで水平であり、滑らかな針金からの抗力はこれに垂直、すなわち鉛直である。重力も鉛直である。水平方向の力ははたらかないので、ビーズは列車とともに加速することはできず、列車に対して動かなければならない。（ビーズの真の水平加速度は 0 であるのに対し、列車の加速度は西向きに a なので、ビーズは針金に沿って東向き、すなわち x の正の向きに滑り始める。）

小問 (ii)

ビーズが針金に沿って動く間、列車に対する相対速度 $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$ は針金に接している。針金は列車に固定されているからである。$\mathbf{N}$ は針金に垂直なので、

$$\mathbf{N}\cdot(\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j})=0.$$

である。$(*)$ を $m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m(\ddot{y}+g)\,\mathbf{j}=\mathbf{N}$ と変形し、両辺と $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$ との内積（scalar product）をとって m で割ると、

$$\dot{x}(\ddot{x}-a)+\dot{y}(\ddot{y}+g)=0,$$

となり、示すべき式が得られる。左辺はちょうどある関数の導関数になっている：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy\right)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}-a\dot{x}+g\dot{y}=0,$$

よって、運動の間 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy$ は一定である。

考えてみよう 地上から見ると抗力は仕事をするのに、相対速度との内積をとってよいのはなぜだろうか。

地上から見ると、ビーズの速度には余分な $-at\,\mathbf{i}$ が加わり、これは針金に沿った向きではないので、そこでは $\mathbf{N}$ が仕事をする。しかし恒等式 $\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}=0$ は純粋に幾何的な事実であり、針金に接する任意のベクトル $\mathbf{u}$ について成り立つ。相対速度はそのようなベクトルである。用いたのはこれだけである。

小問 (iii)

最初は $x=y=0$ かつ $\dot{x}=\dot{y}=0$ なので、定数は 0 である。列車に対する速さを v とし、$y=x^2/k$ を用いると、

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g} - x\Big). \tag{†}$$

となる。$v^2\geq 0$ なので、ビーズは $0\leq x\leq ak/g$ の範囲に限られ、$v=0$ となるのはこの区間の両端だけである。小問 (i) より、ビーズは x の正の向きに動き始める。$0<x<ak/g$ の間は速さが正なので、ビーズは $x=ak/g$ に達するまで針金に沿って同じ向きに動き続け、そこで一瞬静止する。（ビーズは実際にそこで引き返す。その点での $(*)$ の接線成分は 0 でないからである。実際、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax-gx^2/k)=a-2a=-a\neq 0$ である。）その後、ビーズは $x=0$ と $x=ak/g$ の間を振動する。

この区間では $y=x^2/k$ は x について増加するので、最大の高さは $x=ak/g$ で達成される：

$$b=\frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2=\frac{a^2k}{g^2}.$$

小問 (iv)

$(\dagger)$ より $v^2=2\big(ax-gx^2/k\big)$ であり、これは x の 2 次式で、2 つの根 0 と ak/g の中点で最大となる。よって列車に対する速さが最大となるのは

$$x=\frac{ak}{2g}.$$

のときである。そこでは

$$v^2=2\Big(\frac{a^2k}{2g}-\frac{a^2k}{4g}\Big)=\frac{a^2k}{2g},\qquad \text{よって}\qquad v_{\max}=a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

検算

- 極限の場合：$a = 0$ ならビーズは単に針金の最下点にとどまり、実際 $b = 0$ かつ $v_{\max} = 0$ となる。
- 有効重力（effective gravity）：列車内では、ビーズは東に傾いた有効重力 $(a, -g)$ を感じる。最も速く動く点 $x = ak/(2g)$ は、ちょうど針金の傾き $2x/k$ が a/g に等しくなる点であり、そこで接線は有効重力に垂直になる。つまり、傾いた場における針金の「最下点」である。折り返し点 $x = ak/g$ はその 2 倍遠くにあり、これは x について 2 次のポテンシャル中での対称な振動の場合と同じである。
- 次元（dimensions）：k は長さなので、a^2k/g^2 は長さ、$a\sqrt{k/g}$ は速さである。
- 数値的に、$a = 2$、$k = 1.5$、$g = 9.8$（SI 単位）として、コンピュータで運動を逐次計算すると、最大の高さ 0.06247 m と、$x = 0.1531$ m における最大の速さ $0.5533\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ が得られ、a^2k/g^2、$a\sqrt{k/(2g)}$、$ak/(2g)$ と一致する。

よくある間違い

- ビーズの真の水平加速度を $\ddot{x}$ と書いてしまうこと。これは列車に対する相対加速度であり、列車自身の加速度 $-a$ を加えなければならない。
- a の符号を間違えること：列車は**西**向きに加速するので、列車内ではビーズは**東**向き、すなわち x の正の向きに押される。
- 速さが針金の最下点 $x = 0$ で最大になるとしてしまうこと。列車内では実質的な「下」が傾いているので、最も速い点は代わりに $x = ak/(2g)$ となる。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、非慣性系（non-inertial frame）における力学の最初の一端である。列車の系では、項 $-ax$ は東向きの一様な「見かけの」力（fictitious force）ma に対するポテンシャルエネルギー（potential energy）のようにはたらき、これを重力に加えると傾いた有効重力が得られる。大学ではこれが、遠心力（centrifugal force）やコリオリ力（Coriolis force）が現れる回転座標系や、**N** のような拘束力（constraint force）を最初から消去するラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へと発展する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、非慣性系と見かけの力についての優れた章がある。

解答例

STEP II 2021、第 11 問

確率・統計 ・ 条件付き確率の漸化式

> **STEP II 2021、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.5 節「**最後の乗客の座席**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/airline-seat.html

鍵となる考え方

T_1 がどこに座るかで条件付ける（condition）。T_1 が自分の席 S_1 に座れば、他の全員は何の問題もない。T_1 が S_k に座れば、$T_2, \ldots, T_{k-1}$ は無事に自分の席に座り、T_k が新たな「無作為に選ぶ人」となる。決定的に重要なのは、このとき T_k が、かつての T_1 とまったく同じ立場に置かれるという観察である。ただし列車は小さくなり、空いている席 S_1 が T_k 自身の席の役割を果たす。これにより問題は漸化式（recurrence）に帰着する。

解答

以下、「T_r が追い出される」とは、T_r が来たときに S_r がすでに埋まっていることを意味する。無作為に（at random）席を選ぶのは、追い出された乗客（または T_1）だけである。

小問 (i)

$n = 2$ のとき、T_1 はそれぞれ確率（probability）$\frac{1}{2}$ で S_1 または S_2 に座り、T_2 が S_2 に座れるのは T_1 が S_1 に座ったときに限る。よって

$$P_2 = \frac{1}{2}.$$

$n = 3$ のとき、T_1 の座る席で条件付ける。各場合の確率は $\frac{1}{3}$ である。

- S_1：T_2 と T_3 はどちらも自分の席が空いているので、T_3 は S_3 に座れる。
- S_3：T_3 は確実に S_3 に座れない。
- S_2：T_2 が追い出され、S_1 と S_3 から無作為に選ぶ。T_3 が S_3 に座れるのは T_2 が S_1 を選んだときに限り、その確率は $\frac{1}{2}$ である。

よって

$$P_3 = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

小問 (ii)

T_1 が S_k（ただし $2 \le k \le n-1$）に座ったとする。すると $T_2, \ldots, T_{k-1}$ は全員自分の席が空いているので、そこに座る。T_k が来たとき、空いている席は

$$S_1,\ S_{k+1},\ S_{k+2},\ \ldots,\ S_n,$$

の $n-k+1$ 席であり、T_k はこれらの中から一様に（uniformly）無作為に選ぶ。まだ来ていない乗客は $T_{k+1}, \ldots, T_n$ で、それぞれ自分の席を望んでおり、まだ来ていない者の中に S_1 を割り当てられた者はいない。

考えてみよう なぜこれは、$n-k+1$ 席の元の問題とまったく同じなのか？

ラベルを付け替える。T_k を「最初の乗客」と呼び、S_1 を T_k に割り当てられた席とみなす。m 席の元の問題では、最初の乗客は m 席すべての中から一様に選び、後の各乗客は自分の席が空いていればそこに座り、そうでなければ空いている席の中から一様に選ぶ。そして最初の乗客に割り当てられた席を望む者は他にいない。今の場合、$m = n-k+1$ として、乗客 $T_k, T_{k+1}, \ldots, T_n$ は席 $S_1, S_{k+1}, \ldots, S_n$ についてまさにこの規則に従い、S_1 を望む者は他にいない。規則が席のラベルを使うのは、乗客自身の席が空いているかを判定するときだけであるから、二つの過程の確率はまったく同じである。小さい方の問題でも T_n は依然として最後の乗客であるから、

$$\mathrm{P}(T_n \text{ の座る席が} S_n \mid T_1 \text{ の座る席が} S_k) = P_{n-k+1}.$$

さて、$n \ge 3$ のとき、T_1 の座る席で条件付ける。$S_1, \ldots, S_n$ のそれぞれの確率は $\frac{1}{n}$ である。それが S_1 ならば T_n は確実に S_n に座れ、S_n ならば T_n は確実に座れない。よって全確率の法則（law of total probability）により、

$$P_n = \frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1} + \frac{1}{n}\cdot 0 = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{r=2}^{n-1} P_r\right),$$

ここで $r = n-k+1$ と置き換えた。これは、k が 2 から $n-1$ まで動くとき、$n-1$ から 2 まで減少しながら動く。これが求める結果である。

小問 (iii)

すべての $n \geq 2$ について $P_n = \frac{1}{2}$ であることを示す。累積帰納法（strong induction）を用いる。

基底段階。 小問 (i) より $P_2 = \frac{1}{2}$ である。

帰納段階。 $n \geq 3$ とし、$r = 2, 3, \ldots, n-1$ について $P_r = \frac{1}{2}$ であると仮定する。小問 (ii) の和は $n-2$ 項からなり、各項は $\frac{1}{2}$ に等しいので、

$$P_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}.$$

よって $r = 2, \ldots, n$ について $P_r = \frac{1}{2}$ であり、帰納法により、すべての $n \geq 2$ について $P_n = \frac{1}{2}$ である。（小問 (i) で求めた $P_3 = \frac{1}{2}$ とも一致する。）

小問 (iv)

$n = 2$ のとき $T_{n-1} = T_1$ であり、この乗客は確率 $\frac{1}{2}$ で S_1 に座る。よって $Q_2 = \frac{1}{2}$ である。

次に $n \geq 3$ とする。このとき T_{n-1} は T_1 ではない。再び T_1 の座る席 S_k で条件付ける。

- $k = 1$：全員が自分の席に座るので、T_{n-1} は S_{n-1} に座れる。
- $k = n$：$T_2, \ldots, T_{n-1}$ は全員自分の席が空いているので、やはり T_{n-1} は S_{n-1} に座れる。
- $k = n-1$：T_{n-1} は確実に S_{n-1} に座れない。
- $2 \leq k \leq n-2$：小問 (ii) とまったく同様に、残りの過程は T_k を先頭とする $m = n-k+1$ 席の元の問題になる。その小さい列車において T_{n-1} は最後から二番目の乗客であるから、確率は Q_{n-k+1} である。ここで m は $3, 4, \ldots, n-1$ の範囲を動く。

したがって、$n \geq 3$ のとき

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \sum_{m=3}^{n-1} Q_m\right).$$

$n = 3$ のとき和は空であり、$Q_3 = \frac{2}{3}$ である。$3 \leq m \leq n-1$ について $Q_m = \frac{2}{3}$ ならば、

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \frac{2(n-3)}{3}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{2}{3},$$

となるので、累積帰納法により、すべての $n \geq 3$ について $Q_n = \frac{2}{3}$ である。まとめると、

$$Q_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad Q_n = \tfrac{2}{3} \quad (n \geq 3).$$

考えてみよう 漸化式を使わずに $\frac{1}{2}$ や $\frac{2}{3}$ を見抜く方法はあるだろうか？

ある。誰かが無作為に選ぶときはいつでも、S_1 と、後から来る乗客のまだ空いている各席とは同等に扱われる。したがって、過程が終わるまでの間、席 S_1 と S_n のどちらが先に埋まるかは等確率である。T_n が成功するのは S_1 が先に埋まるときに限るので、確率は $\frac{1}{2}$ となる。T_{n-1} については（$n \geq 3$ として）、S_1, S_{n-1}, S_n のうちどれが無作為に選ぶ人によって最初に埋められるかを見る。どれも等確率であり、T_{n-1} が追い出されるのはそれが S_{n-1} のときに限るので、確率は $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ となる。

検算

- $n = 3$ の場合は手で列挙できる。(T_1, T_2, T_3) の結果は、確率 $\frac{1}{3}$ で (S_1, S_2, S_3)、確率 $\frac{1}{3}$ で (S_3, S_2, S_1)、そしてそれぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で (S_2, S_1, S_3) と (S_2, S_3, S_1) である。よって T_3 が S_3 に座る確率は $\frac{1}{2}$、T_2 が S_2 に座る確率は $\frac{2}{3}$ であり、上で求めた結果と一致する。
- $n = 2, \ldots, 8$ について、起こりうるすべての乗車過程をコンピュータで厳密に列挙すると、常に $P_n = \frac{1}{2}$、$n \geq 3$ では $Q_n = \frac{2}{3}$ となり、小問 (ii) の条件付き確率もすべての k について確かめられる。$n = 20$ として 10^5 回の乗車過程をシミュレーションしたところ、0.500 と 0.668 が得られた。

よくある間違い

- T_1 が S_1 そのものを選びうることを忘れる。これが漸化式の「$1+$」を生む。
- 小問 (iv) で、T_1 が S_n に座る場合を見落とす。これは T_{n-1} にとっては好都合な場合であり、定数は 1 ではなく 2 になる。
- Q の漸化式を $n = 2$ に適用してしまう。このとき T_{n-1} は T_1 であり、答えは $\frac{2}{3}$ ではなく $\frac{1}{2}$ である。

STEP のその先へ

ここでの漸化式は第一歩解析（first-step analysis）である。すなわち、最初の無作為な選択で条件付け、同じ問題の小さな複製を見いだすのである。同じ手法により、マルコフ連鎖（Markov chain）の到達確率や期待到達時間が求められる。これは大学 1 年次の確率論の中心的な話題である。上の対称性による議論は、うまく選んだ「どちらが先に起こるか？」という問いが長い計算に取って代わりうることを垣間見せてくれ

る。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を展開している。

解答例

STEP II 2021、第 12 問

確率・統計 ・ 破産問題

> **STEP II 2021、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの試合も、以前に経験した状態へ何度も戻ってくる。そこで、勝ち方を無限に列挙して足し合わせることはしない。その状態から勝つ確率を P とおき、次に何が起こるかで条件付け（conditioning）を行うと、両辺に P が現れる方程式が得られる。同じ手法を慎重なゲームに適用すると、それは小問 (ii) の試合に帰着する。

解答

小問 (i)

A が試合に勝つ確率を P とする。最初のゲームで条件付けを行う。A は確率 p_{A} でそのゲームに勝ち、試合は終了する。B は確率 p_{B} でそのゲームに勝ち、A は負けとなる。それ以外の場合、すなわち確率 $1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}}$ でゲームは引き分けとなり、各ゲームは独立（independent）であるから試合は最初からやり直しとなる。よって、そこから A が勝つ確率は再び P である。したがって

$$P = p_{\mathrm{A}} + (1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})P \quad\Longrightarrow\quad (p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})P = p_{\mathrm{A}} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}},$$

ここで $p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} > 0$ で割った。（同値な方法として、A が第 k ゲームで勝つ確率は $(1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})^{k-1}p_{\mathrm{A}}$ であり、$0 < p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} < 1$ であるからこの等比級数（geometric series）は収束する。）

小問 (ii)

何ゲームか行った後の、A の勝ち数から B の勝ち数を引いた値を D とする。各ゲームで D は $+1$ または -1 だけ変化し、初めて $|D| = 2$ となった時点で試合は終わる。

長さが偶数であること。 n ゲーム後に A の勝ちが a、B の勝ちが b であるとすると、$a + b = n$ かつ $D = a - b = n - 2b$ であるから、D と n の偶奇（parity）は一致する。試合が終わるのは $D = \pm 2$ のときであり、これは偶数であるから、n は偶数である。

確率。 ゲームを 2 つずつ組にして考える。開始時点で試合は互角（$D = 0$）であり、試合は偶数回のゲームの後にしか終わらないから、試合を終わらせなかった組の後では毎回再び互角になる。互角の状態から、続く 2 ゲームは確率 p^2 で AA（A の勝ち）、確率 q^2 で BB（B の勝ち）、合計確率 $2pq$ で AB または BA となり、後者の場合は再び互角に戻る。互角の状態から A が勝つ確率を P とすると、

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p^2}{1 - 2pq}.$$

$p + q = 1$ より $1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ であるから $1 - 2pq = p^2 + q^2$ となり、

$$P = \frac{p^2}{p^2 + q^2},$$

が示された。ここで $p^2 + q^2 > 0$ であるから、この割り算は問題ない。

小問 (iii)

慎重な方式。 トークンの枚数は各ラウンドで 1 ずつ増減し、1 から始まって 0（負け）または 4（勝ち）で止まる。4 を飛び越えることはできないから、プレイヤーが勝つのは、枚数が 0 より先に 4 に達するときであり、そのときに限る。

> ? **考えてみよう** トークンが 2 枚の状態から、プレイヤーには何が必要か。これは以前に見たことがあるだろうか。

トークンが 2 枚の状態から、プレイヤーが勝つのは、ラウンドの勝ち数が負け数を 2 上回る（4 に達する）のが、負け数が勝ち数を 2 上回る（0 に達する）より先に起こるときである。これはプレイヤーを A、賭けのゲームを B とした小問 (ii) の試合そのものである。よって、トークンが 2 枚の状態から勝つ確率は $\dfrac{p^2}{p^2 + q^2}$ である。

トークンが 1 枚の状態からは、最初のラウンドに勝たなければならない。さもなければ 0 枚になって負ける。したがって最初のラウンドで確率 p でトークンは 2 枚になり、各ラウンドは独立であるから、

$$P_{\text{cautious}} = p \cdot \frac{p^2}{p^2 + q^2} = \frac{p^3}{p^2 + q^2}.$$

（方程式を使いたければ、トークン k 枚の状態から勝つ確率を P_k として、$P_1 = pP_2$、$P_2 = pP_3 + qP_1$、$P_3 = p + qP_2$ から同じ答えが得られる。）

大胆な方式。 トークン 1 枚からは枚数は 2 か 0 になり、2 枚からは 4 か 0 になる。したがってプレイヤーが勝つのは最初の 2 ラウンドに勝つときだけである：

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

比較。 どちらの確率も正であるから、その比を 1 と比較する：

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

$p^2 + q^2 > 0$ であるから、この比が 1 より大きいのは

$$p > p^2+q^2 \iff p - p^2 > q^2 \iff pq > q^2 \iff p > q,$$

のとき、かつそのときに限る。最後の段階では $q > 0$ で割った（$p < 1$ であるから正当である）。そして $p > q = 1 - p$ となるのはちょうど $p > \frac{1}{2}$ のときである。同様に、比が 1 より小さいのはちょうど $p < q$、すなわち $p < \frac{1}{2}$ のときである。よって、$\frac{1}{2} < p < 1$ のときは慎重な方式が有利であり、$0 < p < \frac{1}{2}$ のときは大胆な方式が有利である。（$p = \frac{1}{2}$ ではどちらも $\frac{1}{4}$ となる。）

検算

- $p = \frac{1}{2}$ のとき、慎重なゲームは対称なランダムウォーク（random walk）であり、1 から出発して 0 より先に 4 に達する確率は $\frac{1}{4}$ である。我々の公式は $\frac{1}{8}/\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ を与え、大胆なゲームの $p^2 = \frac{1}{4}$ と一致する。
- $p = 0.7$ のとき：慎重な方式は $0.343/0.58 \approx 0.591$、大胆な方式は 0.49 となる。$p = 0.3$ のとき：慎重な方式は $0.027/0.58 \approx 0.0466$、大胆な方式は 0.09 となる。いずれも、トークン枚数の分布をラウンドごとに追跡するコンピュータによる検証と一致する。
- 小問 (ii) で $p = \frac{1}{2}$ とすると $\frac{1}{2}$ となり、対称性から要請されるとおりである。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、「AB」と「BA」を確率 $2pq$ ではなく確率 pq の 1 つの結果として扱ってしまう。
- 試合を終わらせなかったゲームの組の後では必ず互角に戻ることの正当化を忘れる。実際に互角に戻るのは、試合が奇数回のゲームの後には終わり得ないからである。

- 比較の際に、量が正であることを述べずに展開したり割り算したりする。

STEP のその先へ

慎重なゲームは**賭博者の破産問題**（gambler's ruin）である。これは吸収壁（absorbing barriers）をもつランダムウォークであり、k から出発して目標を N とする場合の一般的な答えは、$p \neq q$ のとき $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$ である。不利なゲームでは大胆な賭け方が最善であり、有利なゲームでは控えめな賭け方が最善であるという結果は、Dubins と Savage による最適な賭け方の研究にさかのぼる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの種の第一歩での条件付けによって、ランダムウォークと賭博者の破産問題を扱っている。

解答例

STEP III 2021、第 1 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線の法線

STEP III 2021、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの小問も同じ手順で進む。媒介変数表示（parametric equations）を微分し、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の逆数に負号をつけて法線（normal）の傾き（gradient）を求め、そのあと方程式を整理する。面白いのはこの整理の部分である。両辺に掛けて分数を払うと、三角関数の項がまとまって、短く対称な直線の方程式になる。直線が $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ や $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ の形になれば、その幾何学的な性質（切片や原点からの距離）は一目で読み取れる。

解答

小問 (i)

t で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

よって、$0 < t < \frac{1}{2}\pi$（このとき $\sin t$ と $\cos t$ は 0 でない）において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

$t = \phi$ における接線（tangent）の傾きは $\cot\phi$ であるから、法線の傾きは $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$ である。したがって法線は

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\left(x + 4\cos^3\phi\right).$$

両辺に $\cos\phi$ を掛け、x と y の項を左辺にまとめると、

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

よって法線は

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{あるいは同値な形で} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

2 番目の形から、法線は座標軸と $(8\cos\phi, 0)$ および $(0, 8\sin\phi)$ で交わることがわかる。

接すること。 $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$ とおく。示すべきことは 3 つある。

P が曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 上にあること。 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$ より両座標は正であるから、実数の立方根はそれぞれ $2\cos\phi$ と $2\sin\phi$ である。よって $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$ となる。

P が法線上にあること。 代入すると、

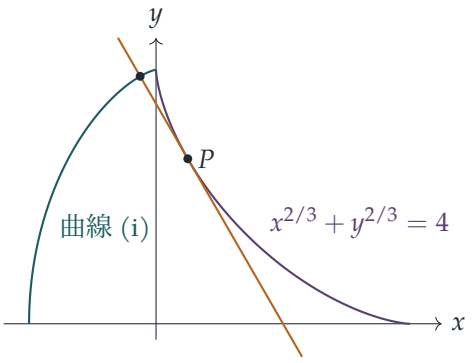
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

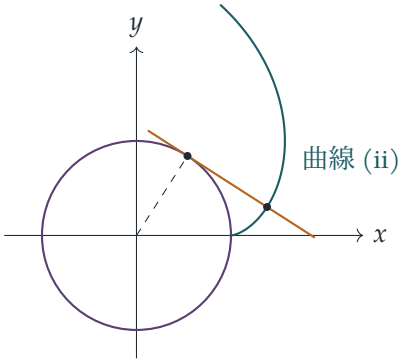
P において傾きが一致すること。 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると（$x, y > 0$ で有効）、

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 点}P,$$

となり、これは点 P における値として法線の傾きにちょうど一致する。

曲線上の点を通り、その点での曲線の傾きと同じ傾きをもつ直線は、その点における接線である。よって法線は $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ に P で接する。これが示すべきことであった。





どちらの図でも、曲線（青緑）上の点における法線（琥珀色）が第 2 の曲線（紫）に接している。いずれも ϕ のある特定の値について描いたものである。

小問 (ii)

t で微分すると（$t\sin t$ と $t\cos t$ の項には積の微分法（product rule）を用いる）、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$ では $t\cos t \neq 0$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$ である。$t = \phi$ における法線の傾きは $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$ であり、その方程式は

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\left(x - \cos\phi - \phi\sin\phi\right).$$

両辺に $\sin\phi$ を掛けると、

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

$\phi\sin\phi\cos\phi$ の項は打ち消し合い、$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ であるから、

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

考えてみよう 垂線の足を求めずに、原点から直線までの距離を求めるにはどうすればよいか。

点 (x_0, y_0) から直線 $ax + by = c$ までの距離は $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である。ここでは $(x_0, y_0) = (0, 0)$、$a = \cos\phi$、$b = \sin\phi$、$c = 1$ であるから、距離は

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

直接見ることもできる。$(\cos\phi, \sin\phi)$ は直線に垂直な単位ベクトル（unit vector）であり、点 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 自身がこの方程式を満たす。よって O からの垂線の足（foot of the perpendicular）は $(\cos\phi, \sin\phi)$ であり、距離は 1 である。

曲線。ϕ の値によらず、どの法線も原点からの距離が 1 である。O からの距離が 1 の直線は、O を中心とする半径 1 の円と垂線の足でのみ交わり、そこで半径と垂直である。したがってその直線は円の接線である。よってどの法線も

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

に接し、接点は $(\cos\phi, \sin\phi)$ である。

検算

- (i) で $\phi = \frac{1}{3}\pi$ とする。曲線上の点は $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$ であり、法線 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$ は座標軸と $(4, 0)$ および $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$ で交わる。点 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1, 5.196)$ は $2 + 6 = 8$ を満たすので法線上にあり、また $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$ である。
- (ii) で $\phi \to 0$ とすると、曲線は単位円上の点 $(1, 0)$ から始まり、そこでの法線は鉛直な直線 $x = 1$ に近づく。これは確かに $x^2 + y^2 = 1$ の接線である。
- 1000 個のランダムな ϕ の値に対するコンピュータでの検証により、すべての法線の方程式、(i) における接すること、(ii) における距離が 1 であることが、丸め誤差の範囲で確かめられた。

よくある間違い

- (i) で $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を誤る。$12\cos t - 12\sin^2 t \cos t$ は $12\cos^3 t$ に簡約され、この因数分解こそが傾きをこれほど簡単にしている。
- (i) で P が法線上にあることだけを確かめる。曲線上の点を通る直線が、その点で自動的に接線になるわけではない。傾きも一致しなければならない。
- (ii) で、方程式・中心・半径を示さずに「円」とだけ答える。

STEP のその先へ

曲線のすべての法線の包絡線（envelope）を、その曲線の**縮閉線**（evolute）という。これは曲率中心（centre of curvature）の軌跡である。したがって小問 (i) は、星形線（アステロイド、astroid）$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ が第 1 の曲線の縮閉線であることを示している。(ii) の曲線は単位円の**伸開線**（involute）（糸巻きからぴんと張った糸をほどいていくとき、糸の端が描く軌跡）であり、その縮閉線は円である。円の伸開線は、ほとんどの歯車の歯の形を与える。これらの考え方は曲線の微分幾何学（differential geometry）に属する。Needham の *Visual Complex Analysis* は、このような平面曲線についての推論に寄り添う、美しく幾何学的な一冊である。

解答例

STEP III 2021、第 2 問

純粋数学 ・ 行列式と不等式

STEP III 2021、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

x, y, z の各定義式は、分母を払うと a, b, c について線形（linear）な方程式になる。このような方程式が三つ集まると、零でない解 (a, b, c) をもつ同次連立一次方程式（homogeneous linear system）ができるので、係数行列は正則でない（singular）、すなわちその行列式（determinant）は 0 でなければならない。この行列式こそ、求めたい x, y, z の対称式そのものである。その後の不等式は、示すべき式を x, y, z で書き直し、平方和に関する基本的な事実と相加相乗平均の不等式（AM–GM）を用いれば得られる。

解答

小問 (i)

a, b, c は相異なるので、どの分母も 0 ではない。分母を払うと

$$x(b-c) = a, \qquad y(c-a) = b, \qquad z(a-b) = c.$$

ここで行列の積を一行ずつ計算すると

$$\begin{aligned} a - xb + xc &= a - x(b-c) = a - a = 0, \\ ya + b - yc &= b - y(c-a) = b - b = 0, \\ -za + zb + c &= c - z(a-b) = c - c = 0, \end{aligned}$$

となり、これが求める行列の等式である。

この 3×3 行列を M とおく。a, b, c は相異なるので、すべてが 0 ということはない。よって M は零でないベクトルを零ベクトルに移す。

考えてみよう なぜこのことから $\det M = 0$ が導かれるのか。

もし $\det M \neq 0$ ならば逆行列 M^{-1} が存在し、$M\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の両辺に左から M^{-1} を掛けると $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となって、$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ に矛盾する。したがって $\det M = 0$ である。第 1 行に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned}\det M &= 1\cdot(1+yz) + x(y-yz) + x(yz+z)\\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz\\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

これを 0 とおけば $yz + zx + xy = -1$ を得る。

不等式については、左辺は $x^2+y^2+z^2$ である。恒等式 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ を用いると

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 + 2 \geq 2,$$

となる。実数 $x+y+z$ の平方は 0 以上だからである。これが求める結果である。

小問 (ii)

ここでは分母はすべて正であり、分母を払うと $x(b+c) = 2a$ などを得る。これらを a, b, c の一次方程式として整理すると

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（第 1 行は $-2a + x(b+c) = 0$ を表し、他の行も同様である。）$a,b,c > 0$ よりこのベクトルは零でないので、小問 (i) とまったく同様に行列式は 0 になる：

$$\begin{aligned}0 &= -2(4-yz) - x(-2y-yz) + x(yz+2z)\\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz\\ &= -8 + 2(xy+yz+zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

2 で割ると $xyz + yz + zx + xy = 4$ を得る。

一つ目の不等式。要となる工夫は、左辺の各括弧を右辺の対応する括弧で割ることである：

$$\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1 = 1 + x,$$

残りの二つも同様である。$(b+c)(c+a)(a+b) > 0$ であるから、示すべき不等式は $(1+x)(1+y)(1+z) > 5$ と同値である。展開して、先ほど証明した結果を用いると

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz = 5 + (x+y+z).$$

x, y, z はすべて正なので、これは 5 より大きい。以上で一つ目の不等式が示された。

二つ目の不等式。同じ計算により、今度は $x+y+z>2$ を示せばよい。$S=x+y+z$ とおく。

> **考えてみよう** $xy+yz+zx+xyz=4$ であることはわかっている。このことから、どうすれば S がある程度大きくなければならないと言えるだろうか。

$xy+yz+zx$ と xyz はいずれも S を用いて上から評価できる：

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$ であるから、$xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}S^2$ である。
- 正の数 x, y, z に対する相加相乗平均の不等式により、$xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$ である。

これらを足し合わせると

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\frac{1}{3}S^2+\frac{1}{27}S^3.$$

右辺は $S>0$ において S の増加関数（increasing function）であり、$S=3$ のとき $3+1=4$ に等しい。よってもし $S<3$ ならば右辺は 4 より小さくなり、不可能である。ゆえに $S\geq 3$ であり、

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

となる。これで二つ目の不等式が示された（実際にはより強い評価 8 が得られ、等号は $a=b=c$ のとき成り立つ）。

検算

- 小問 (ii) で $a=b=c=1$ とすると、左辺の分子は $4^3=64$、$(b+c)(c+a)(a+b)=8$ なので比は 8 となり、$x=y=z=1, S=3$ のときの $5+S$ と一致する。また $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$ である。
- 小問 (i) で $(a,b,c)=(0,1,2)$ とすると、$x=0, y=\frac{1}{2}, z=-2$ であり、確かに $xy+yz+zx=-1$ となる。平方和は $\frac{17}{4}\geq 2$ である。
- 20 000 組の無作為な有理数の三つ組についてコンピュータで確かめたところ、二つの恒等式はいずれも厳密に成り立った。小問 (ii) で見つかった比の最小値は約 8.0001 であり、$a=b=1, c=10^{-6}$ のときは約 9.0 であった。よって 8 が真の最小値であり、7 を余裕をもって上回っている。

よくある間違い

- 理由を述べずに $\det M = 0$ と主張すること。要点は (a, b, c) が**零でない**ベクトルであることで、そのためには小問 (i) では「相異なる」、小問 (ii) では「正である」という条件が必要である。
- $2a + b + c$ を $b + c$ で割って、$1 + x$ ではなく $1 + \frac{1}{2}x$ としてしまうこと。x にはすでに因数 2 が含まれていることに注意せよ。
- $xy + yz + zx < 4$（**上からの**評価）を使って S を下から評価しようとすること。上で行ったように、不等式の向きは逆でなければならない。

STEP のその先へ

正方行列が零でないベクトルを零ベクトルに移すのは、その行列式が 0 であるとき、かつそのときに限る。この事実は線形代数（linear algebra）の核心であり、固有値（eigenvalue）は $\det(A - \lambda I) = 0$ を通してまさにこの方法で求められる。小問 (ii) の評価 $S \geq 3$ は、ネスビットの不等式（Nesbitt's inequality）$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ が姿を変えたものである。線形代数については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照されたい。この種の不等式をさらに学ぶには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）が優れた演習となる。

解答例

STEP III 2021、第 3 問

純粋数学 • 積分の不等式

STEP III 2021、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

n 乗されているものを微分せよ。$u = \sec x + \tan x$ とおくと、その導関数（derivative）は $u \sec x$ であり、これによって $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ はちょうど積分できる形になる。したがって、なすべきことは $I_{n+1} + I_{n-1}$ の被積分関数（integrand）をこの形に書き直すことである。不等式（inequality）のほうは、被積分関数 $u^n = u^{n-1} \cdot u$ を、ちょうど積分できる $u^{n-1} \cdot u'$ と比較することから得られる。すなわち、$u < u'$ ならば、積分は $\left[u^n/n\right]$ より小さい。

解答

小問 (i)

$u = \sec x + \tan x$ とおく。このとき

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x\left(\sec x + \tan x\right) = u \sec x.$$

また、$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ を用いると

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

よって $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\left[u^n\right]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left((\sec\beta + \tan\beta)^n - 1\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $x = 0$ において $u = 1$ であることを用いた。両辺を半分にすれば、求める恒等式（identity）が得られる。

考えてみよう 恒等式には I_{n+1} と I_{n-1} が現れるが、不等式は I_n に関するものである。真ん中の項をどうすれば挟み込めるだろうか。

u^2+1 と $2u$ を比較する。$u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$ であり、$0<x\leq\beta$ では $\sec x>1$ かつ $\tan x>0$ であるから $u>1$ となり、そこでは不等式は狭義に成り立つ。両辺に $u^{n-1}>0$ を掛けると $(0,\beta]$ 上で $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$ が得られ、これを積分すると（被積分関数は連続であり、不等式は正の長さをもつ区間上で狭義に成り立つから）

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n, \qquad \text{よって} \qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

（同じことであるが、$x>0$ に対して $u'-u=u(\sec x-1)>0$ であるから、$I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$ となる。小問 (ii) にそのまま引き継がれるのは、こちらの見方である。）

小問 (ii)

$c=\cos\beta$ とおくと $0<c<1$ である。$v=c\sec x+\tan x$ とおく。このとき

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

端点では $v(0)=c=\cos\beta$、$v(\beta)=1+\tan\beta$ であり、これらはちょうど目標の式に現れる二つの数である。したがって上界は $\frac{1}{n}\left[v^n\right]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$ であり、$[0,\beta]$ 全体で $v<v'$ を示せば十分である。

考えてみよう 小問 (i) では、u^2+1 はちょうど $2u'$ に等しかった。v についてこれに対応する関係は何だろうか。

小問 (i) の計算を繰り返すと

$$v^2+1=c^2\sec^2 x+2c\sec x\tan x+\tan^2 x+1=(1+c^2)\sec^2 x+2c\sec x\tan x,$$

であるから

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2 x=\sin^2\beta\,\sec^2 x.$$

もはや等式ではないが、残った項は正である。$v^2+1-2v=(v-1)^2$ と合わせると

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2 x>0,$$

となる。$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ では $\sin\beta\neq 0$ だからである。ゆえに、すべての $x\in[0,\beta]$ に対して $v<v'$ が成り立つ。

最後に、$[0,\beta]$ 上で $v>0$ である（$c>0$、$\sec x>0$、$\tan x\geq 0$ だから）。よって $v^{n-1}>0$ であり、$v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$ が成り立つ。$[0,\beta]$ 上で積分すると、$n\geq 1$ に対して

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left[v^n\right]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $n=1$ のとき、(i) の恒等式は $\frac{1}{2}(I_2+\beta)=\sec\beta+\tan\beta-1$ を意味する。$\beta=1$ として数値積分すると、両辺とも 2.40822… となる。
- $\beta=1$、$n=3$ のとき、数値的には $I_3\approx 8.774$ に対して上界は 12.863、$J_3\approx 3.326$ に対して上界は 5.523 である。
- (ii) において形式的に $\cos\beta=1$ とおくと、J_n は I_n になり、残りの項 $\sin^2\beta\sec^2 x$ は消える。小問 (ii) は、まさに小問 (i) の摂動（perturbation）なのである。

よくある間違い

- 正であることの確認を忘れる。$v<v'$ に v^{n-1} を掛けるには $v^{n-1}>0$ が必要であり、$v>0$ が重要なのはそのためである。
- $\leq$ しか主張しない。狭義の不等式を得るには、一点だけでなく、ある区間上で $u>1$（あるいは $\sin\beta\neq 0$）であることが必要である。
- $v(\beta)$ を不注意に計算する。$\sec\beta\cos\beta=1$ であり、$1+\tan\beta$ はここから生じる。

STEP のその先へ

「各点で $0<f\leq g$ であり、どこかで狭義の不等式が成り立つならば $\int f<\int g$ である」という議論は、積分の単調性（monotonicity of the integral）であり、解析学（analysis）の講義ではリーマン積分（Riemann integral）の定義から注意深く証明される。扱いにくい被積分関数をちょうど微分の形になっているものと比較することは、積分や和を評価する標準的な方法であり、積分判定法（integral test）のような評価にも再び現れる。Abbott の *Understanding Analysis* は、積分とこうした比較の議論を厳密に扱っている。

解答例

STEP III 2021、第 4 問

純粋数学 • ベクトルと正射影

STEP III 2021、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて内積（scalar product）で行う。2 つのベクトルのなす角は $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\text{なす角})$ から読み取れる。また射影（projection）は線形（linear）であるから、$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ の射影は $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$ である。小問 (i) では、**長さの等しい** 2 つのベクトルの平均が、それらのなす角を二等分することを示す。小問 (iii) では射影 $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ の長さは一般に異なる。そのため、何か特別なことが起こらない限り二等分は成り立たないと予想すべきである。実際、条件はきれいに因数分解され、2 つの特別な場合に分かれる。

解答

小問 (i)

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ かつ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$ であるから、

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos\theta+1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

となり、$|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$ である。$0<\theta<\pi$ であるから、これは正である。特に $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$ である。また

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

である。よって $\mathbf{m}$ と $\mathbf{a}$ のなす角の余弦は $\cos^2\frac{\theta}{2}/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$ であり、$\mathbf{b}$ についても同じことが成り立つ。したがって 2 つの角はともに $\frac{\theta}{2}$ である。$\mathbf{m}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の張る平面上にあり、2 つの角の和は θ であるから、$\mathbf{m}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を二等分する。

小問 (ii)

$\mathbf{c}$ を単位法線ベクトル（unit normal）とし、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha$ とすると、定義より

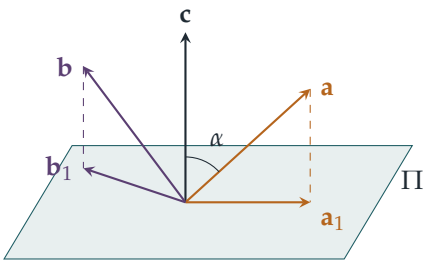
$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c},\qquad \mathbf{b}_1=\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c}.$$

である。$|\mathbf{c}|=1$ であるから、$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})=0$ となる。同様に $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}=0$ である。

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=0$ であるから $|\mathbf{a}_1|^2=\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c})=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}$ が得られ、さらに

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

である。α は鋭角であるから $\sin\alpha>0$ であり、$|\mathbf{a}_1|=\sin\alpha$ となる。同様にして $|\mathbf{b}_1|=\sin\beta$ である。どちらもゼロでないから、角 ϕ は定義される。



射影どうしのなす角については、再び $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=0$ を用いて項を1つ消す。

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c})=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})=\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta.$$

$|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1|=\sin\alpha\sin\beta$ で割ると

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

射影は線形であるから

$$\mathbf{m}_1=\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c}=\tfrac{1}{2}\big(\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c}\big)+\tfrac{1}{2}\big(\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c}\big)=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1).$$

である。$\mathbf{m}_1\neq\mathbf{0}$ と仮定する。そうでなければ向きをもたず、何も二等分できないからである。$\mathbf{m}_1$ は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ の正の係数による一次結合であるから、それらの張る平面上にあり、かつ両者の間にある。よって、このベクトルが角を二等分するのは、$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ のそれぞれと等しい角をなすとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}=\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

である。（共通因数 $|\mathbf{m}_1|$ を約し、また cos が $[0, \pi]$ 上で単射（one-to-one）であることを用いた。）

考えてみよう なぜ単純に小問 (i) を $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ に適用しないのか？

小問 (i) では $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ が必要であった。ここでは $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$、$|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$ であり、これらは一般に異なる。したがって計算する必要がある。

$P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$、$s = \sin\alpha$、$t = \sin\beta$ とおく。すると

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

である。両辺に $2st > 0$ を掛けると、条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s - t) - P(s - t) = 0 \\ &\iff (s - t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

よって、$\mathbf{m}_1$ が角を二等分するための必要十分条件は、$s = t$ または $P = st$ である。

- $s = t$ は $\sin\alpha = \sin\beta$ を意味する。sin は $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）であり、2 つの角はともに鋭角であるから、これは $\alpha = \beta$ と同値である。
- 小問 (ii) より $P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$ である。よって $P = st$ は次を意味する。

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

各段階はすべて同値変形であったから、$\mathbf{m}_1$ が $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ のなす角を二等分するための必要十分条件は、$\alpha = \beta$ または $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$ である。

幾何学的には、第 1 の場合は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ の長さが等しいことを意味し、結局は小問 (i) が適用できる。第 2 の場合は $\cos\phi = 1$ を意味する。すなわち、射影どうしが同じ向きを向く（$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ が同一平面上にあり、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が $\mathbf{c}$ に関して同じ側にあるとき）。このとき角はゼロであり、自明に二等分される。

検算

- $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ とする（ここでは許されないが、有用な極限である）。このとき $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ はすでに平面上にあり、公式はあるべきとおり $\cos\phi = \cos\theta$ を与える。
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$、$\beta = \frac{\pi}{4}$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、公式は $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$ を与える。これはベクトルを具体的に構成して求めた結果と一致する。
- $\cos\phi$ の公式と、因数分解した二等分の条件は、いずれも数千組のランダムな単位ベクトルの 3 つ組についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $|\mathbf{a}_1| \neq 1$ であることを忘れる。単位ベクトルの射影は単位ベクトルではないので、分母の $\sin\alpha \sin\beta$ は欠かせない。
- $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ のなす角の二等分線が常に $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$ であると思い込む。これは長さが等しいときにしか成り立たない。一般には、二等分線は $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$ である。
- 因数分解せずに $\sin\alpha - \sin\beta$ で割ってしまい、$\alpha = \beta$ の場合を落とす。

STEP のその先へ

平面への射影は**線形写像**（linear map）$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ であり、その行列は $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ である。線形写像は和を保つが、長さや角は保たない。この問題がこのような結果になるのはそのためである。$\cos\phi$ の公式は、球面三角法の余弦定理（spherical cosine rule）が姿を変えたものである。ここで ϕ は、頂点を $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ とし、辺の長さが α、β、θ である球面三角形の、頂点 $\mathbf{c}$ における角である。射影と直交性については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP III 2021、第 5 問

純粋数学 • 極方程式で表された曲線

STEP III 2021、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの曲線も r が θ の式として与えられているので、2 曲線は r の 2 つの式が一致するところで交わり、さらに $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の 2 つの値も一致するところで接する（touch）。すべてを $c = \cos\theta$ で表すと、交わる条件は c の二次方程式（quadratic）になる。この二次方程式の重解（repeated root）は接する場合の 1 つを与えるが、それだけではない。$\cos\theta$ そのものが $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ で停留する（stationary）ので、$c = \pm 1$ における単解（simple root）も θ についての二重零点を与えるのである。

解答

以下では常に $c = \cos\theta$ とおき、

$$f(\theta) = a + 2\cos\theta, \qquad g(\theta) = 2 + \cos 2\theta = 1 + 2\cos^2\theta.$$

とする。すべての θ について $g(\theta) \geq 1$ であるから、2 番目の曲線は原点 O を決して通らない。O 以外では、$r > 0$ である点の角 θ は（2π の整数倍を除いて）一意に定まる。したがって、2 曲線が交わりうるのは r と θ の両方を共有する点だけである。

小問 (i)

2 曲線が交わるのは $f(\theta) = g(\theta)$、すなわち $a + 2c = 1 + 2c^2$ のとき、つまり

$$2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - a = 0,$$

のときであり、これが示すべき式である。差に名前をつけておくと便利である：

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta) = -(2c^2 - 2c + 1 - a).$$

いつ接するか。共有点において、動径と接線（tangent）のなす角 ψ は $\tan\psi = r\big/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ を満たす。よって、同じ点 (r,θ) を通る2曲線がそこで同じ接線をもつのは、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ も一致するときであり、そのときに限る。したがって2曲線は $h(\theta)=0$ かつ $h'(\theta)=0$ となるところで接する。微分すると

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

よって $h'(\theta)=0$ となるのは、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ または $\sin\theta = 0$ のときであり、そのときに限る。

考えてみよう c の二次方程式が重解をもつのは $a=\frac{1}{2}$ のときだけである。では、なぜほかの a の値があるのだろうか。

c についての重解は接するための十分条件であるが、必要条件ではない。写像 $\theta \mapsto \cos\theta$ は $\theta=0$ と $\theta=\pi$ で停留する。したがって $c=\pm1$ が根であれば、h はそこで θ について二重零点をもつ。条件 $h'=0$ は両方の可能性をとらえている。

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき：交わる条件の式に代入すると $\frac{1}{2}-1+1-a=0$ となり、$a=\frac{1}{2}$ である。（同じことだが、判別式（discriminant）$4-8(1-a)$ は $a=\frac{1}{2}$ のとき0になり、そのとき重解は $c=\frac{1}{2}$ である。）よって $a=\frac{1}{2}$ のとき2曲線は接し、これが示すべきことであった。
- $\theta=0$、$c=1$ のとき：$2-2+1-a=0$ が必要なので $a=1$ である。このとき両曲線上で $r=3$ となる。
- $\theta=\pi$、$c=-1$ のとき：$2+2+1-a=0$ が必要なので $a=5$ である。このとき両曲線上で $r=5-2=3$ となるので、$r\geq 0$ が成り立つ。

したがって、ほかの2つの値は $a=1$ と $a=5$ である。

2番目の曲線の特徴

3つの概形図すべてに $r=2+\cos 2\theta$ が含まれるので、ここでまとめて説明しておく。この曲線は $\theta\to-\theta$ でも $\theta\to\pi-\theta$ でも変わらないので、両方の座標軸に関して対称である。r は $\theta=0,\pi$ における最大値3から $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ における最小値1まで変化する。これは楕円（ellipse）では**ない**。$\theta=\frac{1}{2}\pi$ の近くで $s=\sin\theta$ とおくと

$$y = r\sin\theta = (3-2s^2)s = 3s-2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3-6s^2 = -3 \text{ ここで} s=1.$$

よって θ が $\frac{1}{2}\pi$ から離れる（そして s が1より小さくなる）と、y は**増加する**。この曲線は $(0,\pm1)$ でなめらかなくぼみ（dimple）をもち、尖点（cusp）ではない。そこでは $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=-2\sin 2\theta=0$ であり、接線は水平だからである。対照的に、$x=r\cos\theta=c+2c^3$ は c について増加するので、$(\pm3,0)$ の両端は単に丸くなっている。

1 番目の曲線 $r = a + 2\cos\theta$ は $\theta \to -\theta$ で変わらないので、始線（initial line）に関して対称である。$\theta = 0$ で $r = a + 2$、$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ で $r = a$、そして（$a \geq 2$ のとき）$\theta = \pi$ で $r = a - 2$ となる。$a < 2$ のときは、制約 $r \geq 0$ によって $\cos\theta = -\frac{1}{2}a$ のところで曲線が切れ、その 2 つの方向に沿って O に達する。

小問 (ii)

$a = \frac{1}{2}$ のとき

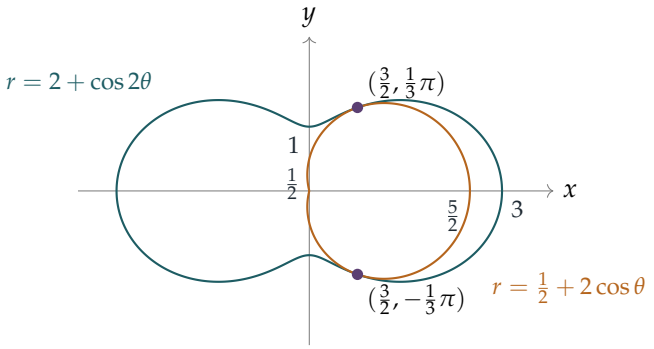
$$h(\theta) = -\left(2c^2 - 2c + \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

よって 1 番目の曲線はいたるところで 2 番目の曲線の内側にあり、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ のところでのみ 2 番目の曲線と共有点をもつ。2 曲線は

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

で接する。（確認：$2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$ であり、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ において $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の値はどちらも $-\sqrt{3}$ である。）

1 番目の曲線は $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$、すなわち $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$ の範囲にのみ存在する。始線上の $r = \frac{5}{2}$ から、$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ における $r = \frac{1}{2}$ を経て、O まで至る。直線 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$ に沿って O に到達するので、原点で角（とがった先端）をもち、それは y 軸のわずかに左側にある。



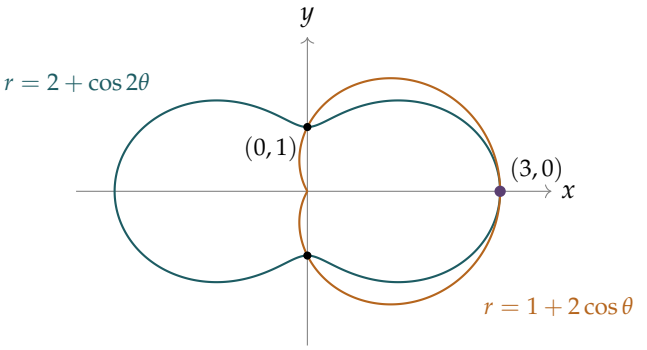
小問 (iii)

$a = 1$ の場合。このとき $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1 - c)$ である。2 曲線は $c = 1$ または $c = 0$ のところで交わる。

- 2 曲線は $\theta = 0$、$r = 3$、すなわち点 $(3, 0)$ で接する。$\theta = 0$ の近くでは $0 < c < 1$ なので $h > 0$ であり、接点の両側で 1 番目の曲線は 2 番目の曲線のすぐ外側にある。
- $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ では両曲線上で $r = 1$ であり、これはくぼみの底にあたる点 $(0, \pm 1)$ であ

る。ここでは h が c とともに符号を変えるので、2曲線は**交差する**。1番目の曲線は $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ では外側に、$|\theta| > \frac{1}{2}\pi$ では内側にある。

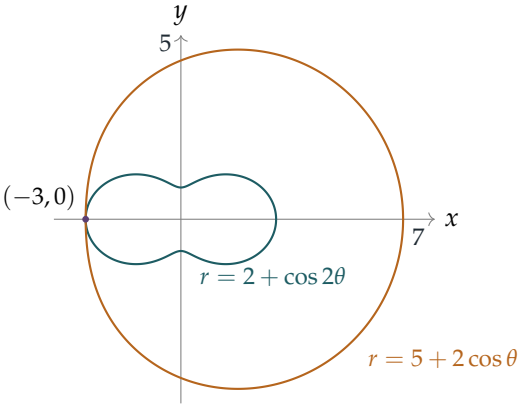
1番目の曲線は $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$、すなわち $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$ の範囲に存在する。直線 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ に沿って O に達し、そこで角をつくる。



$a = 5$ の場合。 このとき $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$ であり、等号は $c = -1$ のときのみ成り立つ。よって1番目の曲線は完全に2番目の曲線の外側にあり、

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

すなわち点 $(-3, 0)$ でのみ2番目の曲線に接する。$a > 2$ なので、今度は全体で $r > 0$ となり、1番目の曲線は閉じたループ（$a \geq 4$ なので、くぼみのないリマソン（limaçon））になる。$\theta = 0$ で $r = 7$、$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ で $r = 5$、$\theta = \pi$ で $r = 3$ である。



検算

- 各接点で、r の2つの値と $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の2つの値を比べる。$a = 1$、$\theta = 0$ では、どちらも $r = 3$ で導関数はどちらも 0 である。$a = 5$、$\theta = \pi$ でも同様である。

- $-3 \leq a < 9$ の範囲を 0.01 刻みで計算機により調べたところ、（$r \geq 0$ のもとで）$h = h' = 0$ となるのは $a = \frac{1}{2}$、1、5 のときだけであった。これは因数分解 $h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$ と一致する。
- 点 $(0,1)$ は 2 番目の曲線上にあり、その近くの $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$ の点では $y \approx 1.015 > 1$ となる。これによりくぼみが確認できる。

よくある間違い

- 判別式のところで止まってしまい、$a = 1$ と $a = 5$ を見落とす。$c = \cos\theta$ についての単解でも、θ については重解になりうる。
- $r = 2 + \cos 2\theta$ を楕円として描いてしまう、あるいは $(0, \pm 1)$ になめらかなくぼみではなく尖点を描いてしまう。
- $a = \frac{1}{2}$ や $a = 1$ のときにリマソンの内側のループを描いてしまう。そのループでは $r < 0$ であり、問題文で除外されている。

STEP のその先へ

接するということは、実は重複度（multiplicity）についての主張である。2 曲線が接するのは、それらの方程式の差が曲線に沿って重複した零点をもつところであり、媒介変数表示（parametrisation）によってそのような零点が生じたり隠れたりしうる。ここでの $\cos\theta$ がまさにそうであった。曲線論の最初の講義では、これは接触の位数（order of contact）という概念になり、極方程式で表された曲線の曲率（curvature）$\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right) / \left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}$ によって、$2 + \cos 2\theta$ のくぼみがどこから生じるのかが正確に説明される。媒介変数表示された曲線とその幾何についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を、なめらかさと接することの背後にある解析については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 2021、第 6 問

純粋数学 • 逆関数と導関数

STEP III 2021、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの関数も一見すると手ごわそうだが、その導関数（derivative）は実に単純な形になる。導関数が $\frac{1}{1+x^2}$ である関数は $\tan^{-1} x$ に定数を加えたものでなければならず、導関数がゼロの関数は定数である。ただし、それが言えるのは関数が定義されている各区間（interval）の上だけである。したがって本当の作業は、都合のよい値や極限を用いて、ばらばらの各部分での定数を求めること、そして関数が定義されない点での跳び（jump）に注意することである。

解答

小問 (i)

$t = \tan\alpha$ とおくと $t > 0$ である。さらに $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$ とおくと $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$ となる。商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

であり、また

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

よって合成関数の微分法（chain rule）により

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

となり、示すべきことが示された。

考えてみよう これは、ただ 1 つの定数 c によって $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$ と書けるということだろうか？

そうではない。この関数は $x = \tan\alpha$ で定義されないので、定義域（domain）は 2 つの離れた区間からなる。各区間の上で $f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$ の導関数はゼロであるから、それぞれの区間では定数になるが、2 つの定数が一致する必要はない。

$x < \tan\alpha$ の場合： $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$x = 0$ において $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ となる。したがって

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

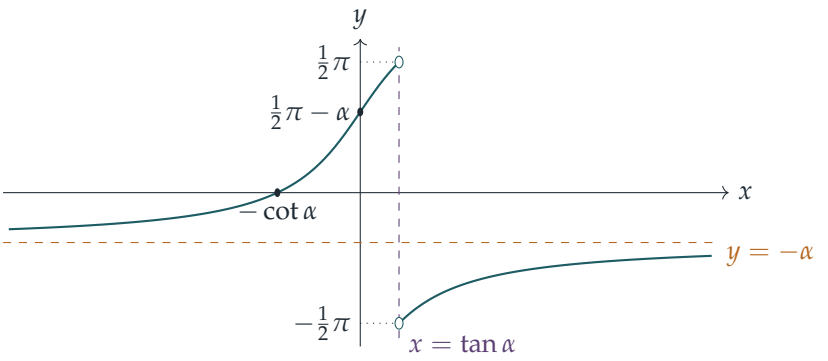
$x > \tan\alpha$ の場合： 上から $x \to \tan\alpha$ とすると、分子 $xt + 1$ は $1 + t^2 > 0$ に近づき、分母 $t - x$ は負の値をとりながら 0 に近づくので、$u \to -\infty$ となり $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$ である。$\tan^{-1} x \to \alpha$ であるから、定数は $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$ となる：

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

（下から同様に極限をとると $u \to +\infty$ となり、値 $\frac{1}{2}\pi$ が得られる。これは最初の式と一致する。）

したがってグラフは、$y = \tan^{-1} x$ のグラフを 2 つに分け、一方を $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ だけ上へ、他方を $\frac{1}{2}\pi + \alpha$ だけ下へ平行移動したものである。その特徴は次のとおりである：

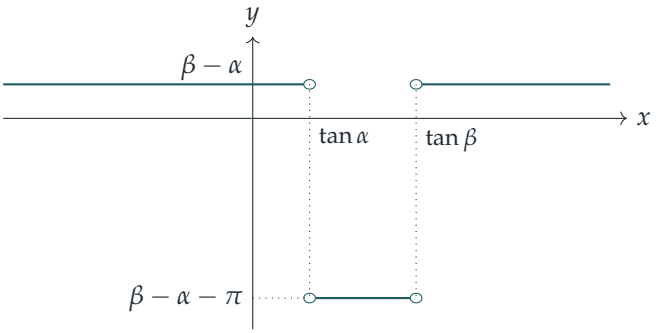
- 各部分で増加し、傾きは $\frac{1}{1+x^2}$ である；
- $x \to \pm\infty$ のとき $y \to -\alpha$ であり（左側では上から、右側では下から近づく）、したがって $y = -\alpha$ は両端での漸近線（asymptote）である；
- 左側の部分は $-\alpha$ から、$x = \tan\alpha$ における $\frac{1}{2}\pi$（この値はとらない）まで上がっていき、y 軸と $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ で交わり、x 軸とは $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ となる点、すなわち $x = -\cot\alpha$ で交わる；
- 右側の部分は $x = \tan\alpha$ において $-\frac{1}{2}\pi$ のすぐ上から始まり、$-\alpha$ に向かって上がっていく。この部分は全体が x 軸より下にある；
- $x = \tan\alpha$ において $-\pi$ の跳びがあり、そこでは両方の部分とも傾きが $\cos^2\alpha$ である。



差について。 $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$ であるから $\tan\alpha < \tan\beta$ となり、区間は 3 つになる。それぞれの関数について 2 つの式を用いると：

- $x < \tan\alpha$ のとき：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$；
- $\tan\alpha < x < \tan\beta$ のとき：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$；
- $x > \tan\beta$ のとき：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$。

$\tan^{-1} x$ の項は打ち消し合うので、グラフは階段関数（step function）のグラフになる。すなわち水平な直線 $y = \beta - \alpha$（これは 0 と $\frac{1}{2}\pi$ の間にある）であるが、$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ の間の区間でだけ π だけ下がって $y = \beta - \alpha - \pi$（これは $-\pi$ と $-\frac{1}{2}\pi$ の間にある）となる。この関数は $x = \tan\alpha$ と $x = \tan\beta$ では定義されない。



小問 (ii)

各項を微分する。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1} s = \dfrac{1}{1 - s^2}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

であり、また $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1}s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

平方根は正のものをとるので、絶対値（modulus）が現れるのである。よって $g'(x) = \sec x - |\sec x|$ である。$\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ では $\cos x < 0$ であるから $|\sec x| = -\sec x$ となり

$$g'(x) = 2\sec x,$$

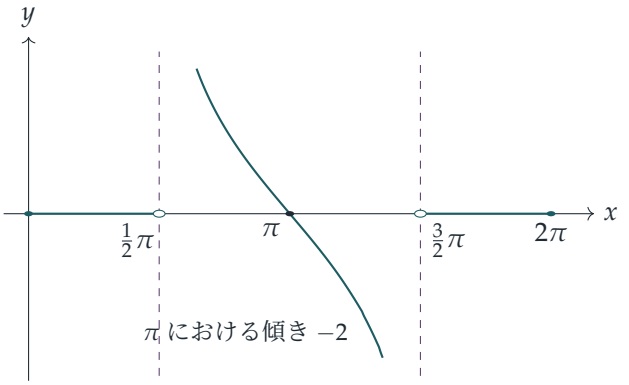
となって、示すべきことが示された。残りの 2 つの区間 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ と $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ では $\cos x > 0$ であるから、同じ計算により $g'(x) = 0$ となる。

外側の区間。 ここでは g は各区間で定数である。$g(0) = \tanh^{-1}0 - \sinh^{-1}0 = 0$ であり、同様に $g(2\pi) = 0$ であるから、$0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ および $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ において $g(x) = 0$ となる。

中央の区間。 ここでは $g'(x) = 2\sec x < 0$ であるから、g は狭義単調減少（strictly decreasing）である。区間の中点では $g(\pi) = \tanh^{-1}0 - \sinh^{-1}0 = 0$、$g'(\pi) = 2\sec\pi = -2$ である。区間の両端では：

- $x \to \frac{1}{2}\pi^+$ のとき、$\sin x \to 1$ より $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$ であり、一方 $\tan x \to -\infty$ より $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$ である。したがって $g(x) \to +\infty$；
- $x \to \frac{3}{2}\pi^-$ のとき、$\sin x \to -1$ かつ $\tan x \to +\infty$ であるから、どちらの項によっても $g(x) \to -\infty$ となる。

また $g''(x) = 2\sec x\tan x$ である。$\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ では $\sec x$ も $\tan x$ も負であるから $g'' > 0$ であり、$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ では $\sec x < 0 < \tan x$ であるから $g'' < 0$ である。よって $(\pi, 0)$ は傾き -2 の変曲点（point of inflection）であり、曲線はこの点に関して回転対称（rotational symmetry）である（実際、$g'(2\pi - x) = g'(x)$ かつ $g(\pi) = 0$ である）。さらに、g と $2\tanh^{-1}(\sin x)$ はこの区間で同じ導関数をもち、どちらも π で 0 になるから、この区間では $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$ である。



検算

- $a = 0.6$ とすると、$f_a(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$ であり、また漸近線から予想されるとおり $f_a(\pm 10^9) \approx -0.6$ である。
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$ であり、平らな部分が確かめられる。数千個の無作為な点でコンピュータによる検算を行ったところ、上のすべての式と 10^{-6} 以内で一致した。

よくある間違い

- 全体で 1 つの定数を用いて $f_a(x) = \tan^{-1} x + c$ と書いてしまうこと。導関数がゼロであることから定数であると言えるのは、区間の上だけである。
- $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$ と書いてしまうこと。正しくは $|\sec x|$ であり、この符号こそが、g が 2 つの区間ではゼロになり、3 つ目の区間ではゼロにならない理由のすべてである。

STEP のその先へ

区間の上で導関数がゼロならば定数になるという事実は、平均値の定理（Mean Value Theorem）から導かれる結果であり、両方の小問が示すように、区間でない集合の上では成り立たない。小問 (i) は $\tan^{-1}$ の加法定理（addition formula）とその $\pm\pi$ による補正であり、このような分枝（branch）の帳尻合わせは複素解析（complex analysis）において中心的な役割を果たす。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）には、平均値の定理とその帰結についての丁寧な解説がある。

解答例

STEP III 2021、第 7 問

純粋数学 ・ 図形における複素数

STEP III 2021、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

単位円（unit circle）上の 2 点を足したり引いたりするとき、すなわち $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ を扱うときは、「平均」の因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$ をくくり出す。残るのは純粋な余弦か純粋な正弦であり、これが小問 (i) を成り立たせる仕組みである。すると小問 (i) は $(a+b)/(a-b)$ が純虚数（purely imaginary）であることを述べており、複素平面において「比が純虚数」とは「垂直（perpendicular）」ということである。その後はすべて a, b, c, d の和を整理する作業にすぎない。

解答

小問 (i)

$\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi), \beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$ とおくと、$\theta = \alpha+\beta, \phi = \alpha-\beta$ である。このとき

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\mathrm{i}\sin\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

条件 $\theta - \phi \neq 2n\pi$ は、ちょうど β が π の倍数でないことを意味するので、$\sin\beta \neq 0$ であり、分母は零でない。割り算をすると

$$z = \frac{2\cos\beta}{2\mathrm{i}\sin\beta} = -\mathrm{i}\cot\beta = -\mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = \mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

となる。ここで $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ と、cot が奇関数（odd function）であることを用いた。これが求める結果である。

$\cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)$ は実数なので、z は虚軸上にある：

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{条件：} \cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{条件：} \cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) < 0. \end{cases}$$

$\cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) = 0$、すなわち $\phi-\theta$ が π の奇数倍のときは、$z=0$ となり、その偏角（argument）は定義されない。（これは 2 点が直径の両端にあり、和が零になる場合である。）

小問 (ii)

A と B は原点を中心とする単位円上にあるので、$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ と書ける。2 点は異なるので $\theta-\phi$ は 2π の倍数ではなく、小問 (i) が適用できる：

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} = \mathrm{i}k, \qquad k = \cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right) \in \mathbb{R}.$$

$x = a+b \neq 0$ であるから、$k \neq 0$ である。よって $x = \mathrm{i}k(a-b)$ となる。つまり、ベクトル $\overrightarrow{OX}$（x で表される）は、ベクトル $\overrightarrow{BA}$（$a-b$ で表される）を直角だけ回転し、零でない実数 k 倍したものである。同じことだが、$\arg x - \arg(a-b) = \pm\frac{1}{2}\pi$ である。したがって OX は AB に垂直である。

考えてみよう なぜ $a+b \neq 0$ が必要なのか？

$a+b=0$ ならば X は原点そのものである。直線 OX が存在しないので、垂直になるべきものがない。代数的には、これは $k=0$ の場合であり、x の偏角が定義されない。

小問 (iii)

$h = a+b+c$ とすると

$$h-a = b+c.$$

複素数 $h-a$ はベクトル $\overrightarrow{AH}$ を表す。場合は二つある。

- $b+c=0$ ならば $h-a=0$ であるから、$h=a$ である。
- $b+c \neq 0$ ならば、単位円上の異なる 2 点 B と C に小問 (ii) を適用する。すると、$b+c$ で表されるベクトルは BC に垂直である。そのベクトルは $\overrightarrow{AH}$ であるから、AH は BC に垂直である。（ここでは $H \neq A$ なので、AH はきちんとした直線である。）

よって、$h=a$ または $AH \perp BC$ となり、題意が示された。対称性により、BH と CA、CH と AB についても同じことが成り立つので、H は確かに各頂点からの垂線

（altitude）上にある。$h = a$ となるのは BC が直径のときであり、このとき三角形は A で直角をもち、その垂心（orthocentre）は頂点 A である。

小問 (iv)

垂心の定義より

$$p = a + b + c, \qquad q = b + c + d, \qquad r = c + d + a, \qquad s = d + a + b.$$

AQ の中点（midpoint）は

$$\tfrac{1}{2}(a + q) = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

この式は a, b, c, d について対称であるから、これは BR, CS, DP の中点でもある：

$$\tfrac{1}{2}(b + r) = \tfrac{1}{2}(c + s) = \tfrac{1}{2}(d + p) = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

$m = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ で表される点を M とする。すると

$$q = 2m - a, \qquad r = 2m - b, \qquad s = 2m - c, \qquad p = 2m - d.$$

よって、ただ一つの写像

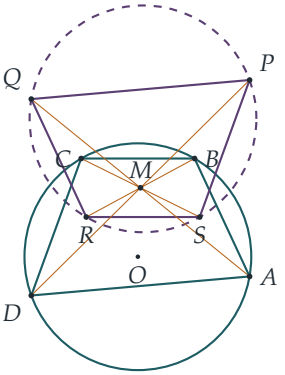
$$T : w \longmapsto 2m - w$$

が $A \mapsto Q, B \mapsto R, C \mapsto S, D \mapsto P$ と移す。したがって、この写像は四角形 $ABCD$ を頂点ごとに $QRSP$ へ移す。

T を記述するために、$T(w) - m = -(w - m)$ と書く。M からの変位が逆向きになっており、これは M のまわりに $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ を掛けることである。よって

T は、複素数 $\frac{1}{2}(a + b + c + d)$ で表される点 M を中心とする 180° の回転（半回転（*half-turn*））である。

同じことだが、T は点 M に関する点対称移動（reflection in a point）である。特に、$QRSP$ は $ABCD$ と合同（congruent）であり、回転は向きを保つので、Q, R, S, P も反時計回りに並ぶ。4 つの垂心は、複素数 $a + b + c + d$ で表される点を中心とする単位円上にある。これは A, B, C, D を通る円の像である。



検算

- 小問 (i)：$\theta = 0, \phi = \frac{1}{2}\pi$ とすると $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ となり、また $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi = \mathrm{i}$ である。よって $|z| = 1, \arg z = \frac{1}{2}\pi$ である。
- 小問 (iv)：$a = 1, b = \mathrm{i}, c = -1, d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$ とする。すると $m = 0.3 + 0.1\mathrm{i}$ であり、$q = b + c + d = -0.4 + 0.2\mathrm{i}$ となって、主張どおり $2m - a$ に等しい。正方形 $(a, b, c, d = 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$ の場合は $m = 0$ となり、Q, R, S, P はちょうど C, D, A, B である。つまり半回転の中心は O である。
- 4 つの小問すべてについて、円周上の数千個のランダムな点を用いてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $\arg z = \frac{1}{2}\pi$ だけを答えること。余接（cotangent）の符号によって $\pm\frac{1}{2}\pi$ のどちらになるかが決まり、また $z = 0$ には偏角がない。
- 小問 (iv) で、頂点の対応の順序を誤ること。A は P ではなく Q に移る。各頂点に対応する垂心は、その頂点を**除いた**三角形の垂心である。
- 写像を中心と角を述べずに「回転」と記述したり、中心を述べずに「倍率 -1 の拡大（enlargement）」と記述したりすること。どちらの記述でもよいが、両方の情報が必要である。

STEP のその先へ

（外心（circumcentre）を原点としたときの）美しい公式 $h = a + b + c$ は、複素数を用いた幾何学という一つの流儀全体の出発点である。たとえば、重心（centroid）は

$\frac{1}{3}(a+b+c)$ であるから、O、重心、H は一直線上にあり、この直線がオイラー線（Euler line）である。小問 (iv) は、円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）についての同じ物語の小さな一片である。Tristan Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、全編を通じて複素数の掛け算を回転と拡大として扱っており、次の一歩として素晴らしい本である。

解答例

STEP III 2021、第 8 問

純粋数学 • 漸化式と極限

STEP III 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.8 節「2 乗して 2 を引く」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/squaring-minus-two.html

鍵となる考え方

すべては漸化式（recurrence）を因数分解（factorise）することにかかっている。両辺から 2 を引くと $x_{n+1}-2=(x_n-2)(x_n+2)$ となるので、項がいったん 2 を超えれば、2 からの距離は各段階で 4 より大きい倍率で拡大される。これにより小問 (i) が得られ、小問 (ii) もそこから従う。小問 (iii) では、x_{n+1}^2 から 4 を引いたものが同じように見事に因数分解でき、まさにそのことによって積 $x_1x_2\cdots x_n$ が入れ子式に打ち消し合う（telescope）のである。

解答

小問 (i)

n に関する数学的帰納法（induction）を用いる。$n=1$ のとき、主張は $x_1\geq 2+4^0(a-2)=a$ となり、これは等号で成り立つ（$4^0=1$ に注意）。

ある $n\geq 1$ について $x_n\geq 2+4^{n-1}(a-2)$ が成り立つと仮定する。$a>2$ であるから右辺は 2 より大きく、したがって $x_n>2$ である。ここで

$$x_{n+1}-2=x_n^2-4=(x_n-2)(x_n+2).$$

$x_n-2>0$ かつ $x_n+2>4$ であるから、$(x_n-2)(x_n+2)\geq 4(x_n-2)$ である。帰納法

の仮定（inductive hypothesis）$x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2)$ を用いると、

$$x_{n+1} - 2 \geq 4(x_n - 2) \geq 4 \cdot 4^{n-1}(a-2) = 4^n(a-2),$$

となり、これは $n+1$ に対する主張である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ に対して $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$ が成り立つ。

ここでは不等式を一度も 2 乗していない。$x_n \geq$ (下からの評価) を 2 乗してよいのは両辺が非負のときに限られるが、因数分解した形を使えばその心配はまったく不要になる。

小問 (ii)

$|a| > 2$ のとき。 このとき $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$ である。数列 $x_2, x_3, \ldots$ は同じ漸化式に従い、2 より大きい値から始まるので、a の代わりに x_2 として小問 (i) を適用すると（添字を 1 つずらして）、

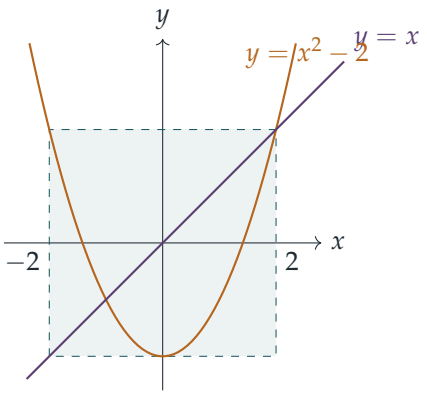
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

を得る。$x_2 - 2 > 0$ かつ $4^{n-2} \to \infty$ であるから、$x_n \to \infty$ となる。

$|a| \leq 2$ のとき。 すべての n に対して $-2 \leq x_n \leq 2$ であることを帰納法で示す。$n = 1$ のときは成り立つ。$-2 \leq x_n \leq 2$ ならば $0 \leq x_n^2 \leq 4$ であるから $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$、すなわち $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$ である。よってこの数列は有界（bounded）であり、無限大に発散することはない。

> **考えてみよう** $|a| \leq 2$ の場合、すべての n に対して $x_n \leq 2$ を示すだけで十分だろうか？

十分ではない。上からの評価だけでは足りない。-2 より小さい項があると、その 2 乗は 4 より大きくなり、次の項は 2 を超えてしまうからである。だからこそ、帰納法では両側の評価を同時に保たなければならない。グラフを見ればうまくいく理由がわかる。放物線 $y = x^2 - 2$ は区間 $[-2, 2]$ をそれ自身の上へ写すのである。



2 つの場合をまとめると、$x_n \to \infty$ となるのは $|a| > 2$ のとき、かつそのときに限る。

小問 (iii)

ここですべてを動かす因数分解は

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

である。$a > 2$ であるから、小問 (i) よりすべての n に対して $x_n > 2$ であり、したがって $x_n > 0$ かつ $x_n^2 - 4 > 0$ である。正の平方根をとると、

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

これを繰り返し用いると（厳密には n に関する帰納法により）、

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

したがって、すべての $n \geq 1$ に対して

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

が成り立ち、y_n の定義と比べると、求める式がすべての n に対して成り立つのはちょうど $A = \sqrt{a^2 - 4}$ のときであることがわかる。

a を求める。 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ という値は必然的に決まる。$n = 1$ のとき、求める式は $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$ となり、$a > 0$ かつ $x_2 > 0$ であるから $A = \sqrt{a^2 - 4}$ を得る。逆に、$a > 2$ のもとで $A = \sqrt{a^2 - 4}$ ならば $A^2 = a^2 - 4$ であるから、

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

この値は確かに $a > 2$ を満たす。$A > 0$ より $A^2 + 4 > 4$ だからである。この a に対しては $\sqrt{a^2 - 4} = A$ となり、上に示した恒等式はすべての $n \geq 1$ に対して $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4}\,/\,x_{n+1}$ となって、求める結果が得られる。

収束。この a の値に対して、$x_{n+1} > 0$ であるから

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

$a > 2$ であるから、小問 (ii) より $x_{n+1} \to \infty$ であり、したがって $4/x_{n+1}^2 \to 0$ かつ $y_n \to 1$ となる。2 番目の数列は収束（converge）し、その極限（limit）は 1 である。

検算

- $A = 1$ とすると $a = \sqrt{5} \approx 2.236$ である。このとき $x_2 = 3$、$x_3 = 7$ で、$y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$ となる。式からは $\sqrt{9-4}/3 = \sqrt{5}/3$ となり、一致する。次に、$y_2 = \sqrt{5}\cdot 3/7 \approx 0.958$ であり、$\sqrt{49-4}/7 = 3\sqrt{5}/7$ となって、これも一致する。項 $y_3 \approx 0.99909$ と $y_4 \approx 0.9999996$ は猛烈な速さで 1 に近づいている。
- $t > 1$ として $a = t + 1/t$ と置換すると、$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$ が得られる。これにより、増大が実際にどれほど速いか（二重指数関数的（doubly exponential）であり、小問 (i) の 4^{n-1} よりはるかに速い）がわかり、また上のすべての結果と矛盾しない。
- 小問 (i) の評価と小問 (ii) の有界性は、多数のランダムな初期値についてコンピュータでも確かめた。

よくある間違い

- 帰納法の仮定から得た不等式を、両辺が非負であることを先に確かめずに 2 乗してしまう。
- 小問 (ii) で、$|a| \le 2$ のときに $x_n \le 2$ だけを示してしまう。$x_n \ge -2$ も必要であり、そうでないと次の項が 2 を超えてしまう可能性がある。
- 逆算して a を求めたものの、その値がすべての n に対してうまくいくことや、$a > 2$ を満たすことを確かめていない。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は、2 次写像族 $x \mapsto x^2 + c$ のなかで最も有名なものである。$[-2, 2]$ 上では、$x = 2\cos\theta$ とおくとこの写像は角の 2 倍化 $\theta \mapsto 2\theta$ になり、これはカオス力学系（chaotic dynamics）の標準的な最初の例である。この区間の外では、すべての軌道（orbit）が無限大へと逃げていく。$a > 2$ の場合は $x = 2\cosh u$ とおけば同じ考え方が

通用し、そのとき小問 (iii) の積は、古典的な $\prod \cos(\theta/2^k)$ の入れ子式の打ち消し合いの双曲線関数版になる。ここで用いた極限や帰納法の背後にある解析学については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読むとよい。

解答例

STEP III 2021、第 9 問

力学 ・ 反発係数を伴う斜め衝突

STEP III 2021、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

幾何の部分は、角の三角形 CPQ と BRP に正弦定理（sine rule）を 2 回用いるだけである。CB から測った QR の共通の高さは、2 式を掛け合わせると消える。跳ね返りについては、滑らかな（smooth）壁は壁に沿った速度成分を保ち、壁に垂直な成分を e 倍する。したがって、衝突の前後で経路が壁となす角は $\tan(\text{衝突後}) = e\tan(\text{衝突前})$ を満たす。各跳ね返りから、最初の結果に現れる 2 つの括弧のうちの 1 つがそれぞれ得られる。

解答

幾何的な恒等式

直線 QR と BC の距離を h とする。$QR \parallel CB$ であるから三角形 AQR は正三角形であり、$CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$ である。

三角形 CPQ において、C における角は 60°、P における角は θ であるから、Q における角は $120^\circ - \theta$ である。正弦定理より

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

$\sin\theta$（$0 < \theta < 180^\circ$ より 0 でない）で割って整理すると

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

三角形 BRP において、B における角は 60°、R における角は ϕ、P における角は $120^\circ - \phi$

である。正弦定理より

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad \Longrightarrow \quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

したがって

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

2 つの結果を掛け合わせると、h と $\sqrt{3}$ が消えて

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

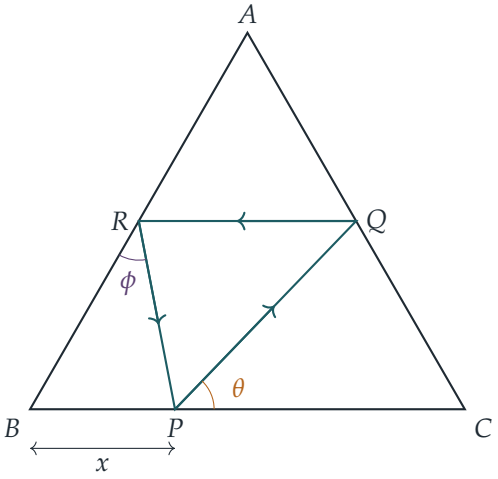
となり、両辺に x を掛ければ求める恒等式が得られる。

跳ね返り

球を滑らかな台の上を動く質点とみなす。すると球は衝突と衝突の間は直線上を進む。また枠も滑らかとみなすので、各衝突では壁に垂直な力積（impulse）だけが働く。球が速さ u で壁と角 α をなして壁に当たり、速さ v で壁と角 β をなして離れるとする。壁に沿った成分は変わらず、壁に垂直な成分は向きが反転して e 倍される：

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

また球は壁に沿って同じ向きに動き続けるので、その向きから測れば α も β も鋭角である。（$e > 0$ が必要である。そうでなければ、球は最初の衝突の後、壁に沿って滑ってしまう。）



Q において。球は PQ に沿って、壁 CA と角 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$ をなし、A の方へ向かって到着する。そして QR に沿って、壁と角 $\angle AQR = 60^\circ$ をなして離れる（$QR \parallel CB$

であるから同位角（corresponding angles）による）。よって

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ として差の公式（subtraction formula）を用い、さらに分子と分母に $\cot\theta$ を掛けると

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

$c = \sqrt{3}\cot\theta$ とおく。跳ね返りの条件 $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \cot\theta) = e(\sqrt{3}\cot\theta + 1)$ は $3 - c = e(c+1)$、すなわち $4 - (c+1) = e(c+1)$ となるので

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{4}{1+e}.$$

R において。球は QR に沿って、壁 AB と角 $\angle ARQ = 60^\circ$ をなし、B の方へ向かって到着し、RP に沿って角 $\angle BRP = \phi$ をなして離れる。よって

$$\tan\phi = e\tan 60^\circ = \sqrt{3}e, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{1+e}{e}.$$

x を求める。2 つの括弧を恒等式に代入すると

$$\frac{1+e}{e} \cdot \frac{4}{1+e} \cdot x = 4(a-x) \quad \Longrightarrow \quad x = e(a-x) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{ae}{1+e},$$

となり、示すべき結果が得られた。

もう一周する

考えてみよう 球が再び PQ に沿って進み出すためには、P で何が起こらなければならないか。

球は RP に沿って P に到達する。三角形 BRP において、この経路は BC と角 $\angle RPB = 120^\circ - \phi$ をなすので、球が C の方へ向かって到着するのはこの角が鋭角であるときに限る。PQ を再びたどるには、PC と角 θ をなして離れなければならないので、

$$\tan\theta = e\tan(120^\circ - \phi).$$

が必要である。Q における計算から $\sqrt{3}\cot\theta = \frac{4}{1+e} - 1 = \frac{3-e}{1+e}$ であるから $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$ であり、これは正である。つまり PQ は確かに C の側へ向かっている。

Q のときと同じ式で、θ を ϕ に置き換え、$\sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}$ を用いると

$$\tan(120^\circ - \phi) = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi + 1)}{3 - \sqrt{3}\cot\phi} = \frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e} = \frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

$e \leq \frac{1}{3}$ ならば $120^\circ - \phi \geq 90^\circ$ であるから、衝突後、球は BC から真っすぐ離れるか、B の方へ戻る向きに動く。このとき球は C の方へ傾いた PQ をたどることはできない。よって $e > \frac{1}{3}$ であり、条件は

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e} = \frac{\sqrt{3}e(1+e)}{3e-1} \quad \Longleftrightarrow \quad 3e-1 = 3e-e^2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^2 = 1.$$

となる。$e > 0$ であるから $e = 1$ となり、示すべき結果が得られた。球の速さは各衝突で変化する（$e = 1$ の場合を除く）が、ここでは速さは何の役割も果たさない。重要なのは向きだけである。

検算

- $e = 1$ のとき：$x = \frac{a}{2}$、$\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$ であるから $\theta = \phi = 60^\circ$ であり、PQR は各辺の中点を結ぶ三角形となる。対称性から、これは完全弾性（perfectly elastic）の場合の閉じた軌道であり、予想どおりである。
- $a = 1$、$e = \frac{1}{2}$ のとき：$x = \frac{1}{3}$、$\theta \approx 46.10^\circ$ である。コンピュータで球を 3 回の衝突まで追跡すると、球は正確に P に戻る。次の衝突の後、球は BC と 46.10° ではなく約 68.95° の角をなして離れるので、再び PQR を回ることはない。
- $e \to 0$ のとき $x \to 0$ であり、P は角 B に寄っていく。これは、球が各壁に垂直な方向の速度をほぼすべて失うことと合っている。

よくある間違い

- e を速度全体、あるいは壁に沿った成分に掛けてしまう。変化するのは滑らかな壁に垂直な成分だけである。
- 入射角を法線から測っておきながら、壁から測った角について成り立つ $\tan\beta = e\tan\alpha$ を用いてしまう。法線から測る場合、法則は $\cot\beta = e\cot\alpha$ となる。
- 最後の部分で、$120^\circ - \phi$ が鈍角になりうることや、$e = -1$ を除外しなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

領域の内部で跳ね返る球の経路は、**数学的ビリヤード**（mathematical billiards）の主題である。$e = 1$ のとき、中点を結ぶ三角形はファニャーノ（Fagnano）軌道である。任意の鋭角三角形において、この軌道は垂線の足（feet of the altitudes）を結び、周の長さが最小の内接三角形となる。$e < 1$ のときは、跳ね返るたびに経路が壁の方へ寝

ていき、ここで見たとおり、球は閉じた周回を繰り返すことができない。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力積と衝突を丁寧に扱っている。ビリヤードそのものについては、Tabachnikov の *Geometry and Billiards*（幾何学とビリヤード）が次の一歩として素晴らしい本である。

解答例

STEP III 2021、第 10 問

力学 ・ 巻きつく糸の運動

STEP III 2021、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

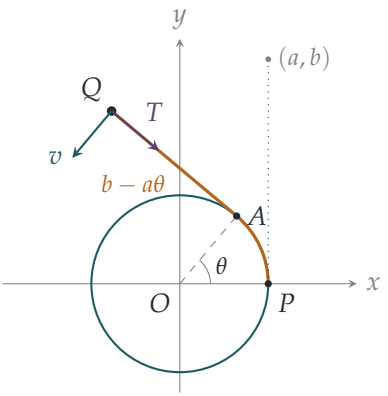
鍵となる考え方

すべてを、糸の直線部分が回転した角 θ で記述する。糸は接線（tangent）に沿って円柱から離れるので、質点の位置は接点に長さ $b - a\theta$ の接線方向のベクトルを加えたものになる。微分すると、質点の速度は常に糸と直交することがわかる。したがって張力（tension）は仕事をせず、速さは変化しない。各瞬間において、質点は糸が円柱から離れる点を中心とする円の上を運動しており、張力が向心力（centripetal force）を与えている。

解答

質点を、なめらかな水平の台の上を動く点としてモデル化する。このとき質点にはたらく水平方向の力は、軽くて伸びない糸の張力 T だけである（重力は台からの垂直抗力とつり合っている）。糸は終始ぴんと張っているものとする。

糸が円柱に巻きつくためには、撃力（impulse）によって質点が (a, b) から x 軸の負の向きに打ち出されなければならない。したがって糸は反時計回りに回転する。時刻 t において、糸の直線部分が円柱から離れる点を A とする。



小問 (i)

P への半径が θ だけ回転しているので、点 A は $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ である。円柱に巻きついた糸の長さは弧 PA の長さ $a\theta$ に等しいので、直線部分の長さは $b-a\theta$ である。直線部分は A における接線に沿って、θ が増加する向きに伸びており、その向きの単位ベクトルは $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である（$\theta = 0$ のときこれは $(0,1)$ となり、初期位置 (a,b) と一致する）。よって質点の位置は

$$x = a\cos\theta - (b-a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b-a\theta)\cos\theta.$$

である。積の微分法（product rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b-a\theta) = -a\dot{\theta}$ を用いて t で微分すると、

$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}\sin\theta - (b-a\theta)\dot{\theta}\cos\theta = -(b-a\theta)\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}\cos\theta - (b-a\theta)\dot{\theta}\sin\theta = -(b-a\theta)\dot{\theta}\sin\theta.$$

となる。したがって $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (b-a\theta)^2\dot{\theta}^2$ であり、$b-a\theta > 0$ かつ $\dot{\theta} > 0$（糸は巻きついていく）であるから、速さは

$$v = (b-a\theta)\dot{\theta}.$$

である。

小問 (ii)

> **考えてみよう** なぜ速さは u のままでなければならないのか。糸は終始質点を引っ張っているではないか。

小問 (i) より、速度は $-(b-a\theta)\dot{\theta}\,(\cos\theta, \sin\theta)$ であり、これは半径 OA に平行である。したがって、方向が $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である糸と垂直である。張力は糸に沿ってはたらくので、張力がする仕事の仕事率 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ は各瞬間において 0 である。ほかに水平方向の

力ははたらかないので、運動エネルギー（kinetic energy）、したがって速さは一定である。最初の速さは u であるから、

$$\dot{\theta}\,(b - a\theta) = u,$$

が成り立ち、題意が示された。

小問 (iii)

(ii) を用いると、速度は u を定数として $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$ であるから、加速度は

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

である。この大きさは $u\dot{\theta}$ であり、向きは質点から A へ向かう向き、すなわちちょうど糸に沿った向きである（言い換えれば、各瞬間において質点は A を中心とする半径 $b - a\theta$ の円の上を速さ u で運動しているので、その加速度は A へ向かって $u^2/(b - a\theta)$ である）。糸に沿った方向にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を適用すると

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

を得る。あとは $b - a\theta$ を t で表せばよい。$t = 0$ で $\theta = 0$ であることを用いて (ii) を t で積分すると

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

となる。すると

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

であり、$b - a\theta > 0$ であるから正の平方根をとって $b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$ である。したがって

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

となり、題意が示された。

検算

- $t = 0$ において張力は mu^2/b である。質点は P を中心とする半径 b の円の上を速さ u で動き始めるので、予想どおりである。
- 糸が完全に巻き取られるのは $a\theta = b$ のときであり、それは $t = b^2/(2au)$ のときに起こる。このとき $b^2 - 2aut = 0$ となり、張力は限りなく大きくなる。速さが一定のまま、瞬間的な円の半径が 0 に縮んでいくからである。
- 次元：b^2 と aut はどちらも面積であり、mu^2/長さ は力である。

- 結果はコンピュータでも確認した。a、b、u、m をいくつか無作為に選び、運動を数値的に追跡して位置を数値微分したところ、速さは u のまま保たれ、糸に沿った力の測定値は相対誤差およそ 3×10^{-5} で $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$ と一致した。

よくある間違い

- O のまわりの角運動量（angular momentum）が保存されると仮定してしまう。これは誤りである。張力は円柱の接線に沿ってはたらき、その接線は O を通らないので、張力は O のまわりにモーメントをもつ。ここで保存されるのはエネルギーである。
- すでに円柱に巻きついた糸を忘れて、直線部分の長さとして $b - a\theta$ ではなく b を用いてしまう。
- 張力の計算において、曲率半径（radius of curvature）として直線部分の長さ AQ ではなく、質点の経路の半径 OQ を用いてしまう。

STEP のその先へ

曲線から巻きほどかれる（あるいは曲線に巻きつく）糸の端点が描く軌跡は**伸開線**（involute、インボリュート）とよばれる。円の伸開線は、ほとんどの歯車の歯形に用いられている形である。かみ合う歯車が運動をなめらかに伝えるようになるからである。この問題は、大学 1 年次の力学で学ぶ一般的な原理の例にもなっている。すなわち、速度に垂直な束縛力は仕事をしないので、運動量や角運動量が保存されない場合でもエネルギーは保存されうる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、まさにこの種の問題についての優れた議論がある。

解答例

STEP III 2021、第 11 問

確率・統計 ・ 指数分布

STEP III 2021、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.18 節「**無記憶性**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/memoryless.html

鍵となる考え方

Y と Z に関する問いはすべて、実は X がどの区間に入るかという問いである。事象 $Y = n$ は $n \leq X < n+1$ であり、事象 $Z < z$ は各 n に一つずつの、互いに排反（disjoint）な部分 $n \leq X < n+z$ に分かれる。指数分布（exponential distribution）の裾確率 $\mathrm{P}(X \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ によって、それぞれの部分は等比級数（geometric series）の項になる。

解答

以下を通して $q = \mathrm{e}^{-\lambda}$ と書く。$\lambda > 0$ であるから $0 < q < 1$ である。$x \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(X \geq x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

であり、X は連続型であるから、$0 \leq a < b$ に対して $\mathrm{P}(a \leq X < b) = \mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$ である。

小問 (i)

Y は X の整数部分（integer part）であるから、$Y = n$ となるのはちょうど $n \leq X < n+1$ のときである。よって

$$\mathrm{P}(Y = n) = \mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda} = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda},$$

となり、求める結果が得られる。（したがって Y は 0 から始まる公比 q の幾何分布（geometric distribution）に従う。）

小問 (ii)

$Z = X - Y$ は X の小数部分（fractional part）であるから、$0 \leq Z < 1$ である。$0 \leq z \leq 1$ とする。事象 $Z < z$ が起こるのは、整数 $n = Y$ について $n \leq X < n + z$ となるときであり、そのときに限る。$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対するこれらの事象は互いに排反であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z < z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(n \leq X < n + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-n\lambda - \lambda z}\right) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数を和の公式で求めた。$0 < q < 1$ であるから、この級数は収束（converge）する。これが求める結果である。

小問 (iii)

(ii) の分布関数（distribution function）を微分すると、Z の確率密度関数（density）は

$$g(z) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \qquad (0 \leq z \leq 1),$$

であり、それ以外では $g(z) = 0$ である。$u = z$、$\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int_0^1 z\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \left[-z\mathrm{e}^{-\lambda z}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.$$

これを $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ で割って

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}.$$

小問 (iv)

$0 \leq z_1 < z_2 \leq 1$ とする。事象 $\{Y = n$ かつ $z_1 < Z < z_2\}$ はちょうど $n + z_1 < X < n + z_2$ であるから

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ かつ} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_1)} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_2)} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}\right).$$

? **考えてみよう** 独立性を判定するには、これを何と比べればよいだろうか？

積 $\mathrm{P}(Y=n)\,\mathrm{P}(z_1<\mathrm{Z}<z_2)$ と比べればよい。Z は連続型であるから $\mathrm{P}(\mathrm{Z}=z_1)=0$ であり、(ii) より

$$\mathrm{P}(z_1<\mathrm{Z}<z_2)=\mathrm{P}(\mathrm{Z}<z_2)-\mathrm{P}(\mathrm{Z}<z_1)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda z_1}-\mathrm{e}^{-\lambda z_2}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

これに (i) の $\mathrm{P}(Y=n)=(1-\mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda}$ を掛けると、因数 $1-\mathrm{e}^{-\lambda}$ が約分され、上の同時確率がちょうど得られる。よって、すべての非負整数 n とすべての区間 $(z_1,z_2)\subseteq[0,1]$ に対して

$$\mathrm{P}(Y=n\text{ かつ}z_1<\mathrm{Z}<z_2)=\mathrm{P}(Y=n)\,\mathrm{P}(z_1<\mathrm{Z}<z_2)$$

が成り立つ。Y は非負整数値のみをとり、Z は $[0,1)$ の値のみをとるから、この形の事象によって同時分布（joint distribution）全体が決まる。したがって Y と Z は独立（independent）である。X がどの単位区間に入ったかを知っても、その区間のどこに入ったかについては何もわからないのである。

検算

- (ii) で $z=1$ とおくと、当然そうなるべきとおり $\mathrm{P}(\mathrm{Z}<1)=1$ となり、$z=0$ とおくと 0 となる。
- $\lambda\to0$ のとき、X の密度は各単位区間上でほぼ平坦になるから、Z は $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に近くなるはずである。実際、$\mathrm{e}^{\lambda}-1=\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2+\cdots$ より $\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}+O(\lambda)$ となるので、$\mathrm{E}(\mathrm{Z})\to\frac{1}{2}$ である。$\lambda\to\infty$ のときは、X はほとんど常に非常に小さく、$\mathrm{E}(\mathrm{Z})\to0$ となる。
- $\lambda=1$ のとき $\mathrm{E}(\mathrm{Z})=1-\frac{1}{\mathrm{e}-1}\approx0.4180$ であり、これは X の値 200 000 個によるコンピュータシミュレーションと一致した。(iv) のシミュレーションによる同時度数も、周辺分布（marginal distribution）の積と一致した。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(\mathrm{Z}<z)=\mathrm{P}(X<z)$ と書いてしまうこと。$\mathrm{Z}<z$ は最初の単位区間だけでなく、すべての単位区間で起こりうることを忘れている。
- n、z_1、z_2 を一組だけ選んで独立性を結論づけること。積への分解はそれらすべてについて成り立たなければならない。

STEP のその先へ

(iv) の独立性は、指数分布の**無記憶性**（memoryless property）の現れである。すなわち、$X \geq n$ という条件のもとで、超過分 $X - n$ は n が何であっても再び同じパラメータの指数分布に従う。これこそ、指数分布がポアソン過程（Poisson process）の待ち時間のモデルとなる理由であり、またその整数部分が離散型の無記憶な分布である幾何分布に従う理由でもある。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、これら二つの分布とポアソン過程が詳しく扱われている。

解答例

STEP III 2021、第 12 問

確率・統計 ・ 和の分散

STEP III 2021、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.4 節「**二つずつなら独立、全体では独立でない**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/pairwise-independence.html

鍵となる考え方

チームの得点を、選手のペアごとに 1 つずつ定めた指示変数（indicator variable）型の確率変数の和として表し、その和の分散（variance）を展開する。すると、すべては 2 つの**異なる**ペアがどう関わり合うかにかかってくる。2 つのペアに共通の選手がいなければ明らかに独立（independent）であるから、本当に考えるべきなのは選手を 1 人共有するペアである。(i) ではそのようなペアは独立であることがわかり、交差項は消える。(iii) ではそうはならず、(ii) の恒等式がそれらの寄与を数え上げる道具となる。

解答

小問 (i)

各さいころは公正であり、選手たちは独立にさいころを振る。指定された 2 人の選手が同じ目を出す確率は、1 人目が何を出したかによらず $\frac{1}{6}$ である。よって

$$\mathrm{P}(X_{12}=1)=\mathrm{P}(X_{23}=1)=\tfrac{1}{6}.$$

$X_{12}=1$ と $X_{23}=1$ がともに起こるのは、選手 1、2、3 がすべて同じ目を出すときであり、かつそのときに限るから、

$$\mathrm{P}(X_{12}=1,\ X_{23}=1)=\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}=\mathrm{P}(X_{12}=1)\,\mathrm{P}(X_{23}=1).$$

これを周辺確率（marginal probability）から引くと、残りの 3 つの場合の確率が得られる。たとえば $\mathrm{P}(X_{12}=1, X_{23}=0)=\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$ であり、同様に $\mathrm{P}(X_{12}=0, X_{23}=1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$、$\mathrm{P}(X_{12}=0, X_{23}=0)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$ である。したがって同時分布（joint distribution）は周辺分布の積であり、X_{12} と X_{23} は独立である。

考えてみよう $X_{12}=1$ であると知っても、なぜ X_{23} について何もわからないのか。

選手 1 と 2 の目が一致したという条件のもとでも、選手 2 の目は依然として $\{1,\dots,6\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、選手 3 がそれに一致する確率は以前とまったく同じく $\frac{1}{6}$ である。どの目も等しく出やすいので、共有される選手は何の情報ももたらさないのである。

$T=\sum_{i<j}X_{ij}$ を総得点とする。これは $N=\binom{n}{2}$ 個の項の和である。各 X_{ij} はパラメータ $\frac{1}{6}$ のベルヌーイ分布（Bernoulli distribution）に従うので、$\mathrm{E}(X_{ij})=\frac{1}{6}$、$\mathrm{Var}(X_{ij})=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$ である。ゆえに

$$\mathrm{E}(T)=\frac{N}{6}=\frac{n(n-1)}{12}.$$

分散を求めるために、任意の異なる 2 つのペアをとる。共通の選手がいなければ、それらは互いに素なさいころの集合に依存するので独立である。選手を 1 人共有する場合も、選手の番号を付け替えれば上の議論により独立である。よって X_{ij} は対ごとに独立であり、共分散（covariance）はすべて 0 となるので、和の分散は分散の和に等しい：

$$\mathrm{Var}(T)=N\cdot\frac{5}{36}=\frac{5n(n-1)}{72}.$$

小問 (ii)

$S=Y_1+\cdots+Y_m$ とおく。期待値の線形性（linearity）より $\mathrm{E}(S)=0$ であるから、$\mathrm{Var}(S)=\mathrm{E}(S^2)-0^2=\mathrm{E}(S^2)$ である。平方を展開すると、各 Y_i^2 は 1 回ずつ、$i<j$ である各積 Y_iY_j は 2 回ずつ現れる：

$$S^2=\sum_{i=1}^{m}Y_i^2+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}Y_iY_j.$$

期待値をとって線形性を用いれば、求める式が得られる。

小問 (iii)

2 人の選手について、$\mathrm{P}(\text{同じ偶数})=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ であり、同様に $\mathrm{P}(\text{同じ奇数})=\frac{1}{12}$ である。よって

$$\mathrm{P}(Z_{ij}=1)=\mathrm{P}(Z_{ij}=-1)=\frac{1}{12},\qquad \mathrm{P}(Z_{ij}=0)=\frac{5}{6}.$$

独立でないこと。 $Z_{12}=1$ かつ $Z_{23}=-1$ であるとすると、選手 2 の目は偶数でも奇数でもなければならない。よって

$$\mathrm{P}(Z_{12}=1,\ Z_{23}=-1)=0\neq\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{12}=\mathrm{P}(Z_{12}=1)\,\mathrm{P}(Z_{23}=-1),$$

となり、Z_{12} と Z_{23} は独立ではない。

平均。 対称性（symmetry）より $\mathrm{E}(Z_{ij})=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=0$ であるから、総得点 $U=\sum_{i<j}Z_{ij}$ の平均（mean）は 0 である。

分散。 どの Z_{ij} も平均が 0 なので、$N=\binom{n}{2}$ 個の変数 Z_{ij} に (ii) を適用できる。必要な期待値は 2 種類である。

- 平方：Z_{ij}^2 は選手 i と j の目が一致するときに限り 1 となるので、$\mathrm{E}(Z_{ij}^2)=\frac{1}{6}$ である。
- 異なる 2 つのペアの積：2 つのペアに共通の選手がいなければ、2 つの変数は独立で平均が 0 であるから、$\mathrm{E}(Z_{ij}Z_{kl})=\mathrm{E}(Z_{ij})\,\mathrm{E}(Z_{kl})=0$ である。選手を共有する場合、たとえば $Z_{12}Z_{23}$ では、積が 0 でないのは 3 人全員が同じ目を出すときに限る。このとき 2 つの因子はともに $+1$（偶数）かともに -1（奇数）であるから、積は 1 となる。ゆえに $\mathrm{E}(Z_{12}Z_{23})=\frac{1}{36}$ である。

> **考えてみよう** ちょうど 1 人の選手を共有するペアの組（順序なし）はいくつあるか。

共有される選手の選び方が n 通り、残りの $n-1$ 人からその 2 人の相手を選ぶ方法が $\binom{n-1}{2}$ 通りある。よってそのようなペアの組は $n\binom{n-1}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ 個であり、それぞれ 1 回ずつ数えられている。これがまさに (ii) の二重和で必要なものである。

以上をまとめると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(U)&=\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{1}{36}\\&=\frac{n(n-1)}{36}\big(3+(n-2)\big)\\&=\frac{n(n-1)(n+1)}{36}=\frac{1}{36}n(n^2-1),\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

検算

- 例として出目が 3,3,3,3,6,6,2 のとき、ペアの数え上げでは $6+1=7$、符号付きの数え上げでは $-6+1=-5$ となり、問題文と一致する。

- $n = 2$ のときペアは 1 つしかないので $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}(Z_{12}^2) = \frac{1}{6}$ であり、公式も $\frac{2\cdot 3}{36} = \frac{1}{6}$ を与える。
- $n = 3$ のとき、3 つのさいころの目がすべて一致すれば $U = \pm 3$ である（確率はそれぞれ $\frac{1}{72}$）。そうでないときはちょうど 1 つのペアが一致して $U = \pm 1$ となり、その確率の合計は $\frac{15}{36}$ である。よって $\mathrm{E}(U^2) = 9 \cdot \frac{1}{36} + \frac{15}{36} = \frac{2}{3}$ となり、$\frac{3\cdot 8}{36}$ と一致する。$n \leq 6$ についてコンピュータですべての結果を厳密に数え上げると、2 つの平均と 2 つの分散がいずれも確かめられる。たとえば $n = 6$ では、(i) で $\frac{25}{12}$、(iii) で $\frac{35}{6}$ となる。

よくある間違い

- 1 つの場合だけを確かめて、残りの場合がなぜ従うのかを述べないまま X_{12} と X_{23} の独立性を主張すること。2 値の変数では実際に従うが、そのことを明記すべきである。
- (iii) で、選手を共有するペアは共通の目が偶数でも奇数でも $+\frac{1}{36}$ を寄与することを忘れること。積をとるとマイナス符号は打ち消し合う。
- 重なり合うペアの組の個数を数え間違えること。たとえば（順序付きの）$n(n-1)(n-2)$ を用いたうえで、さらに 2 を掛けてしまう。

STEP のその先へ

小問 (i) は、**対ごとに**独立（pairwise independent）であるが**相互に**独立（mutually independent）ではない確率変数の典型例である。実際、$X_{12} = X_{23} = 1$ ならば $X_{13} = 1$ が強制される。分散の計算に必要なのは対ごとの独立性だけであり、この考え方は乱択アルゴリズム（randomised algorithm）や誕生日問題（birthday problem）で用いられる。小問 (iii) は、項どうしが従属するときの和の共分散を扱う一般的な方法を示している。どちらも Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）で詳しく展開されている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2021 年解答例. 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

