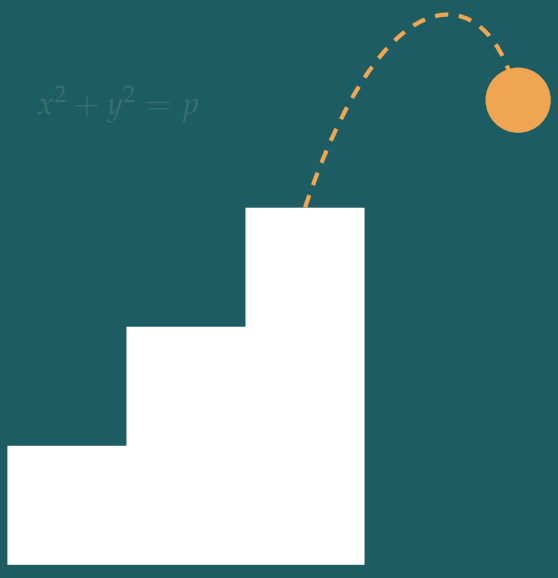
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP II と III

2020 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP II と III

2020 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2020 年解答例

2020 年の STEP 問題（STEP II と III）の全 24 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP II

Q1 置換積分 純粋数学 . . . 3
Q2 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 7
Q3 対数凹数列 純粋数学 . . . 12
Q4 三角不等式 純粋数学 . . . 16
Q5 数字和と整除性 純粋数学 . . . 21
Q6 行列の累乗とトレース 純粋数学 . . . 25
Q7 複素変換 純粋数学 . . . 29
Q8 多項式と積分 純粋数学 . . . 33
Q9 放物体の衝突 力学 . . . 38
Q10 エネルギーとつり合い 力学 . . . 42
Q11 硬貨投げにおける連 確率・統計 . . . 47
Q12 偏りのあるさいころと不等式 確率・統計 . . . 52

STEP III

Q1 漸化式による積分 純粋数学 . . . 56
Q2 双曲線関数のグラフ 純粋数学 . . . 60
Q3 図形における複素数 純粋数学 . . . 65
Q4 鏡映と回転の行列 純粋数学 . . . 69
Q5 部分分数分解 純粋数学 . . . 73
Q6 極方程式の曲線と面積 純粋数学 . . . 77
Q7 2 階微分方程式 純粋数学 . . . 82
Q8 数列と無限降下法 純粋数学 . . . 86
Q9 剛体のつり合い 力学 . . . 91
Q10 単振動 力学 . . . 95

Q11 確率変数の関数 確率・統計 99
Q12 幾何分布と独立性 確率・統計 104

解答例

STEP II 2020、第 1 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2020、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの被積分関数（integrand）も、二つの 1 次式のべきの積であり、その指数の和は -2 である。このような被積分関数に対しては、二つの 1 次式の比（あるいはその平方根）で置換（substitution）するのが正しい。そうすると二つの括弧が一度に吸収され、残るのは単純なべき関数か、標準的な逆正接（arctangent）の形になる。小問 (i) では与えられた置換でこれが起こる様子を見せ、小問 (ii) ではその技法をまねることが求められ、小問 (iii) では自力でそれに気づくことが求められている。

解答

小問 (i)

$x = \dfrac{1}{1-u}$ とおくと

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

である。u が $(0,1)$ を動くとき、x は $(1,\infty)$ を動き、$u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ である。$0 < u < 1$ より根号の中の量はすべて正であるから、

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

ここで $(1-u)^2$ の因子は $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ とちょうど打ち消し合う：

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2}+c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+c.$$

小問 (ii)

小問 (i) では、$u=\frac{x-1}{x}$ は二つの 1 次式の比であった。ここではその考え方をまねて

$$u=\frac{x-2}{x+1},\qquad \text{すなわち}\qquad x+1=\frac{3}{1-u},\quad x-2=\frac{3u}{1-u},$$

とおく。$x-2=(x+1)-3$ だからである。$x>2$ のとき $0<u<1$ であり、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\dfrac{3}{(1-u)^2}$ である。すると

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}}\cdot\frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

となるので

$$\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}}\cdot\frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{3}u^{-1/2}+c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}+c.$$

微分すれば確かめられる。$f=\frac{x+1}{x-2}$ とおくと $f'=-\frac{3}{(x-2)^2}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

小問 (iii)

今回は置換が与えられていない。余分な因子 $x-1$ があるため、被積分関数は比の単純なべきにはなっていないが、二つの平方根はこれまでと同じタイプである。

> **考えてみよう** これまでの二つの答えはどちらも、1 次式の比の平方根であった。そのような平方根を新しい変数にとると、どうなるだろうか。

次のようにおいてみる。

$$t=\sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

x が 2 から ∞ まで増加するとき、$\frac{x-2}{3x-2}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3x-2)}$ は 0 から $\frac{1}{3}$ に向かって増加するので、t は 0 から $\frac{1}{\sqrt{3}}$ まで増加し、つねに $0\le t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。$t^2(3x-2)=x-2$ を x

について解くと

$$x = \frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

となる。ここで $1-3t^2 > 0$ である。これより

$$x-1 = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, \qquad 3x-2 = \frac{4}{1-3t^2},$$

であり、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2} = \frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

である。$\sqrt{x-2} = t\sqrt{3x-2}$ であるから、二つの平方根はきれいにまとまる：

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = t\,(3x-2) = \frac{4t}{1-3t^2}.$$

したがって分母全体は

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = \frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

となり、ここでもすべてが $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と打ち消し合う：

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)} \cdot \frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

となり、示すべき結果が得られた。

もとの積分は両端で広義積分（improper integral）であるが、収束（converge）する。$x=2$ の近くでは被積分関数は $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$ のようにふるまい、x が大きいところでは $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$ のようにふるまう。置換によって、有限区間上の連続関数の通常の積分に変わるので、極限を別々にとる必要はない。

検算

- (i) と (ii) の答えを微分する。(i) については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$ である。
- 符号：(ii) の被積分関数は正であるから、原始関数（antiderivative）は増加しなければならない。実際、x が大きくなると $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ は 1 に向かって減少するので、そうなっている。
- 数値：(i) の $\int_{1.5}^{3}$ と (ii) の $\int_{2.5}^{4}$ をシンプソンの公式（Simpson's rule）で計算すると、原始関数から得られる値（0.47829… と 0.70974…）と一致する。(iii) の積分を $x=3$ で分割して直接計算すると $1.0471975\ldots = \frac{\pi}{3}$ となる。

よくある間違い

- (iii) で積分区間の端を変え忘れる。上端は ∞ ではなく $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、$\frac{\pi}{6}$ はここから出てくる。
- (i) や (ii) の答えを u で書いたままにして、問題の要求どおり x に戻さない。
- $1-u$ の半整数べきの扱いを誤る。$(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$ のように注意深くまとめること。

STEP のその先へ

$\sqrt{(x-a)(x-b)}$ から作られる被積分関数は、ここで用いたような置換によってつねに有理化できる。これは、x と $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数（rational function）の積分に関する古典的な理論（オイラー（Euler）置換）の一部である。また小問 (iii) は無限区間上の広義積分でもあり、こうした積分を極限によって意味づけることは、大学 1 年次の解析学（analysis）の標準的な話題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は広義積分を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）にはこの種の STEP の積分問題がさらに載っている。

解答例

STEP II 2020、第 2 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP II 2020、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）は変数分離形（separable）であり、積分したあとに注目すべき自然な量は積 xy である。これは 2 の累乗になることがわかる。次に恒等式（identity）$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ を用いると、すべてを和 $s=x+y$ と差 $d=x-y$ で書き直せる。この変数では各曲線が「d^2 が s の関数に等しい」という形になり、その関数がどこで非負になるかを調べることで概形が得られる。

解答

小問 (i)

右辺を因数分解する：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

積分すると $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$、すなわち

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

どちらの曲線上でも x と y は同符号であるから、$|xy|=xy$ である。$k=\ln 2$ なので、両辺の指数をとると、正の定数 A を用いて $xy=A\,2^{x+y}$ を得る。

曲線 C_1。点 $(1,1)$ では $1=4A$ となるので、$A=\frac{1}{4}$ であり $4xy=2^{x+y}$ である。ここで $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$ であるから

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

ただし $x,y>0$ である。これが求める結果である。

曲線 C_2。点 $(-1,-1)$ では $1 = A\cdot 2^{-2}$ となるので、$A = 4$ であり $4xy = 16\cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$ である。よって

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

ただし $x, y < 0$ である。

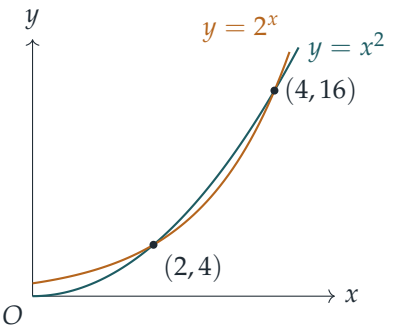
対称性。 x と y を入れ替えても $x+y$ は変わらず、$(x-y)^2 = (y-x)^2$ も変わらないので、それぞれの方程式は変わらない。符号の条件（$x, y > 0$ または $x, y < 0$）も変わらない。したがって (a,b) が曲線上にあれば、その $y = x$ に関する対称点 (b,a) も曲線上にある。よって $y = x$ は各曲線の対称軸（line of symmetry）である。

小問 (ii)

$x \geq 0$ において、曲線 $y = x^2$ と $y = 2^x$ は $(2,4)$ と $(4,16)$ で交わる。交点はこれらだけである。これを確かめるには対数を比較すればよい。$x > 0$ に対して $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$ とおくと、$g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$ であるから、g は $x = 2/\ln 2$ まで増加し、その後は減少する。したがって g の零点は高々 2 個であり、$g(2) = g(4) = 0$ である。よって

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x > 0),$$

であり、$[0,2)$ と $(4,\infty)$ では 2^x が x^2 より上にある。



次に C_1 上の点をとり、$s = x + y > 0$ とおく。C_1 の方程式の左辺は平方であるから

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{すなわち} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

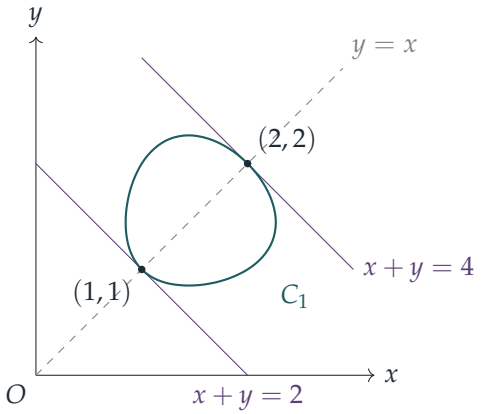
上の図より、これから $2 \leq s \leq 4$ が従う。したがって C_1 は直線 $x + y = 2$ と $x + y = 4$ の間にある。

考えてみよう $[2,4]$ のすべての s の値が実際にとられるだろうか。また、両端で曲線はどのような形をしているだろうか。

各 $s \in [2,4]$ に対して、$d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$、$x = \frac{1}{2}(s+d)$、$y = \frac{1}{2}(s-d)$ とおく。$2^s > 0$ であるから $|d| < s$ となり、x と y はともに正である。したがって、このような s はどれも C_1 上の点を与え、$2 < s < 4$ のときは 2 点を与える。よってこの曲線は閉じたループである：

- $s = 2$ と $s = 4$ では $d = 0$ となり、$y = x$ 上の点 $(1,1)$ と $(2,2)$ が得られる。どちらの点も $kxy - y = -(x - kxy)$ を満たすので、そこでの傾き（gradient）は -1 である。ループはこれらの点で直線 $x + y = 2$ および $x + y = 4$ に接する。
- 傾きは $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ のところで 0 になり、$y = 1/\ln 2$ のところで無限大になる。$x = 1/\ln 2$ において、ループ上の点は $y \approx 0.85$（最低点）と $y \approx 2.27$（最高点）である。
- $y = x$ を横切る方向の幅が最大になるのは $s^2 - 2^s$ が最大になるところ、すなわち $s \approx 3.21$ であり、そこで $|d| \approx 1.02$ である。

このループは $y = x$ に関して対称な楕円状の曲線で、2 本の直線の間に挟まれている：



小問 (iii)

今度は $s = x + y < 0$ である。$t = -s > 0$ とおく。前と同様に、次が必要である：

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2 2^t \geq 16.$$

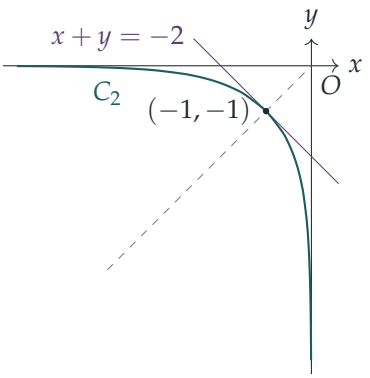
関数 $t^2 2^t$ は $t > 0$ で増加し、$t = 2$ で 16 に等しい。したがって条件は $t \geq 2$、すなわち $x + y \leq -2$ である。（同じことだが、$x < 0$ における $y = x^2$ と $y = 2^{x+4}$ のグラフを描くと、放物線が上にあるのは $x \leq -2$ のときに限る。）$s \leq -2$ を満たす各 s に対して、(ii) と同じ構成により $x, y < 0$ を満たす 2 点が得られる。ただし $s = -2$ のときは 1 点 $(-1,-1)$ のみである。よって今回は C_2 は有界でない：

- C_2 が $y = x$ と交わるのは $(-1, -1)$ のみであり、そこでの傾きもまた -1 であるから、そこで直線 $x + y = -2$ に接する。
- $x, y < 0$ のとき $kx - 1 < 0$ かつ $1 - ky > 0$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} < 0,$$

  となる。分子が正で分母が負だからである。したがって x が増加するにつれて y は一貫して減少する。
- $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$ より、$x \to -\infty$ のとき積 xy は 0 に収束するので、$y \to 0^-$ である（実際 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$）。対称性により、$x \to 0^-$ のとき $y \to -\infty$ である。負の座標軸が漸近線（asymptote）である。

したがって C_2 は第 3 象限（third quadrant）にある直角双曲線（rectangular hyperbola）の一方の枝に似ているが、それよりはるかに座標軸に密着している：



検算

- $4xy = 2^{x+y}$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると、$4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1 + y') = 4kxy(1 + y')$ となる。整理すると $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$ となり、元の方程式が得られる。C_2 についても同様である。
- $(2, 2)$ は C_1 上にある：$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$。$C_2$ 上で $x + y = -4$ となる点はおよそ $(-3.936, -0.064)$ であり、$xy \approx 0.252$ である一方 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$ である。上で述べた楕円状の曲線の極値点は、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- $1/x$ と $1/y$ を積分するときに絶対値（modulus）記号を忘れること。C_2 ではこれが重要であり、定数は $\frac{1}{4}$ ではなく $A = 4$ となる。
- $(x+y)^2 \geq 2^{x+y}$ を示しただけで終わってしまうこと。これによって $x+y$ が $[2,4]$ に制限される理由も説明しなければならず、そこで x^2 と 2^x のグラフの比較が役に立つ。
- C_2 を座標軸と交わるように描くこと。C_2 上では両方の座標が負のままであり、座標軸は漸近線である。

STEP のその先へ

座標を $s = x+y$、$d = x-y$ へと回転させると、対称な方程式は「$d^2 = f(s)$」の形になる。このとき曲線が存在するのはちょうど $f(s) \geq 0$ となるところであり、その集合が有界な区間ならば曲線は閉じたループとなり、半直線ならば有界でない曲線となる。同じ考え方で、保存量（conserved quantity）から相図（phase portrait）を描くことができる。$\ln(xy) - k(x+y)$ はどの解に沿っても一定であり、これはロトカ–ヴォルテラ（Lotka–Volterra）の捕食者–被食者（predator–prey）方程式におけるエネルギーと同じである。その方程式の軌道が閉じたループになるのも同じ理由による。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、この両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP II 2020、第 3 問

純粋数学 ・ 対数凹数列

> **STEP II 2020、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

性質 L は、各比 u_{r+1}/u_r がその直前の比以下であることを述べている。したがって、数列がいったん増加をやめると、再び増加に転じることは決してない。これはまさに単峰性（unimodality）そのものである。小問 (ii) では、漸化式（recurrence）の特性方程式（auxiliary equation）が重根（repeated root）α をもち、組み合わせ $u_r - \alpha u_{r-1}$ によって漸化式は単純な等比数列（geometric sequence）に帰着される。残りはすべて、このただ一つの置き換えから導かれる。

解答

小問 (i)

数列が性質 L をもち、$2 \le r \le n-1$ に対して $u_{r-1} \ge u_r$ であるとする。$u_{r-1} > 0$ であるから、性質 L の両辺をこれで割ることができる：

$$u_{r+1} \le \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \le u_r,$$

ここで最後の段階では $u_r/u_{r-1} \le 1$ と $u_r > 0$ を用いた。よって $u_{r-1} \ge u_r \implies u_r \ge u_{r+1}$ である。

次に、性質 L をもつ任意の数列を考える。$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n$ ならば、この数列は $k = n$ として単峰である。そうでなければ、$u_k > u_{k+1}$ となる最初の添字 k が存在する（したがって $k \le n-1$）。k の選び方から

$$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_k.$$

$u_k \ge u_{k+1}$ であるから、いま証明した含意（$r = k+1$ とする）により $u_{k+1} \ge u_{k+2}$ が

得られる。さらに $r = k+2$ として再び適用すると $u_{k+2} \geq u_{k+3}$ が得られ、以下同様に帰納法（induction）によって $u_{n-1} \geq u_n$ まで成り立つ。ゆえに $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$ であり、この数列は単峰である。

小問 (ii)

$2 \leq r \leq n$ に対して $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$ とおく。$3 \leq r \leq n$ のとき、漸化式から

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

よって (v_r) は公比 α の等比数列であり、$v_r = \alpha^{r-2} v_2$、すなわち

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

（$r = 2$ のときは自明に成り立ち、r を一つ増やすごとに両辺が α 倍される。）

$2 \leq r \leq n-1$ のときは $3 \leq r+1 \leq n$ であるから、$u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$ を代入してよい：

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

正であることと単峰性。 $u_2 > \alpha u_1 > 0$ と仮定する。$\alpha > 0$ であるから $u_1 > 0$ が得られ、$u_2 > 0$ も成り立つ。それ以降の項については、一つ目の恒等式から

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

が成り立つ。$\alpha^{r-2} > 0$ かつ $u_2 - \alpha u_1 > 0$ だからである。よって $u_{r-1} > 0$ ならば $u_r > 0$ であり、帰納法によりすべての項が正である。さらに二つ目の恒等式から、$2 \leq r \leq n-1$ に対して $u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \leq u_r^2$ が得られる。これは正の項からなる数列に対する性質 L にほかならないので、小問 (i) によりこの数列は単峰である。

$u_1 = 1, u_2 = 2$ の場合。 $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$ とおく。このとき $w_1 = 1 = u_1$ かつ $w_2 = 2 = u_2$ である。この初期値のもとで、一つ目の恒等式は

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

となる。$3 \leq r \leq n$ を満たすある r に対して $u_{r-1} = w_{r-1}$ が成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

となるので、帰納法により $1 \le r \le n$ に対して $u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$ である。(もとの漸化式を用いて二段階の帰納法を行ってもよいが、一階の形を使うほうが速い。)

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ のときの最大値。 このとき $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ であるから $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$ であり、上で示したことからこの数列は正かつ単峰である。頂点を見つけるために、隣り合う項の差を調べる。$u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$ と $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$ から

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

ここで $N\alpha = N-1$ かつ $2-\alpha = \frac{N+1}{N}$ であるから $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$ であり、また $(2-r)\alpha = 2 - r - \frac{2-r}{N}$ である。括弧の中は

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2 + 1 - r(N+1)}{N},$$

と簡単になるので

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2 + 1 - r(N+1)\Big).$$

> **考えてみよう** $N^2 + 1 - r(N+1)$ の符号はちょうどどこで変わるか。また、それが零になることはありうるか。

これが零になるのは $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N - 1 + \dfrac{2}{N+1}$ のときに限られる。$N \ge 2$ であるから $0 < \frac{2}{N+1} < 1$ であり、この値は整数 $N-1$ と N の間に(両端を含まずに)ある。$\alpha^{r-2} > 0$ であるから:

- $r \le N-1$ のとき $u_{r+1} > u_r$;
- $r \ge N$ のとき $u_{r+1} < u_r$。

ゆえに $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ かつ $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$ である。$N \le n$ であるから項 u_N は存在し、u_r は $r = N$ のときに最大となる(しかも狭義に最大であり、同じ値をとる項はない)。

検算

$N = 5$、すなわち $\alpha = \frac{4}{5}$ とする。漸化式から 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, … が得られ、主張どおり $r = 5$ で頂点に達し、その後は減少する。差の公式は $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$ を予測し、これは一致する。また $u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$ は閉じた式 $-\alpha^2 + 4\alpha$ と一致する。恒等式と頂点の位置は、多くの α, u_1, u_2 の値と 29 までの N について、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で、u_{r-1} が正であることに触れずにこれで割ってしまう。負の項をもつ数列に対しては、この議論は成り立たない。
- 小問 (ii) で、小問 (i) を用いる前に項が正であることを示し忘れる。小問 (i) には正であることが必要である。
- $u_{N+1} < u_N$ と $u_{N-1} < u_N$ だけを示す。単峰性があればこれで十分だが、その場合はそのことを明言する必要がある。すべての差の符号を求めるほうがすっきりしている。

STEP のその先へ

性質 L は**対数凹性**（log-concavity）とよばれる：$\ln u_r$ が r の凹関数（concave function）であるということである。対数凹な数列は組合せ論（combinatorics）や確率論のいたるところに現れる。二項係数（binomial coefficients）$\binom{n}{r}$ はその一例であり、ニュートン（Newton）の不等式は、実根のみをもつ多項式の係数が対数凹であることを主張する。小問 (ii) の漸化式は重根をもつ線形漸化式（linear recurrence）であり、それゆえ解は $(A + Br)\alpha^r$ の形になる。これは、微分方程式（differential equation）において重根の場合に $(A + Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$ が現れるのとちょうど同じである。この対応の微分方程式の側については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を、この趣旨の問題については Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照されたい。

解答例

STEP II 2020、第 4 問

純粋数学 • 三角不等式

> **STEP II 2020、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての基礎は三角不等式（triangle inequality）、すなわち各辺は他の 2 辺の和より真に短いという事実にある。実は確かめる必要がある不等式は 1 つだけで、それは**最も長い**辺に関するものである。残りの 2 つは自動的に成り立つからである。逆（converse）については、コンパスで三角形を作図すればよい。1 辺を描き、その両端から 2 つの円を描くのである。

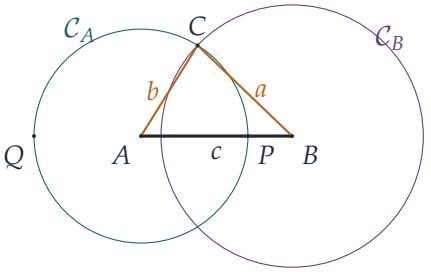
解答

小問 (i)

頂点を A, B, C とし、$BC = a, CA = b, AB = c$ とする。線分 AB は A から B への最短経路であるから、長さ $b + a$ の経路 $A \to C \to B$ は c 以上である。これが c に等しくなることはない。等しくなるのは C が線分 AB 上にあるときに限られ、そのときは三角形にならないからである。よって $c < a + b$ である。残りの 2 組の頂点に対して同じ議論を行えば、$a < b + c$ と $b < a + c$ が得られる。

小問 (ii)

長さ c の線分 AB を描く。A を中心とする半径 b の円 $\mathcal{C}_A$ と、B を中心とする半径 a の円 $\mathcal{C}_B$ を描く。2 円が直線 AB 上にない点 C で交われば、ABC は $CA = b, CB = a, AB = c$ の三角形である。



なぜ 2 円は必ず交わるのだろうか。$\mathcal{C}_A$ と直線 AB の交点を P と Q とし、P は A から見て B と同じ側にあるものとする。すると

$$PB = |c-b|, \qquad QB = c+b.$$

ここで、$c-b<a$ と $b-c<a$ は与えられた不等式のうちの 2 つであるから $|c-b|<a$ であり、$c+b>a$ は 3 つ目の不等式である。したがって、点が $\mathcal{C}_A$ の上半分を P から Q まで動くとき、その点と B の距離は a 未満の値から a より大きい値まで連続的に（continuously）変化するので、どこかで a に等しくなる。その点は両方の円の上にあり、しかも直線 AB 上にはない。$\mathcal{C}_A$ のうちこの直線上にある点は P と Q だけであり、それらと B の距離は a ではないからである。これが求める点 C であり、したがって 3 辺が a, b, c の三角形が存在する。

小問 (iii)

小問 (i) と (ii) を合わせると、3 つの正の数が三角形の 3 辺となるのは、各数が他の 2 数の和より小さいときであり、かつそのときに限る、ということになる。3 数のうち最大のものを ℓ とおく。ℓ が他の 2 数の和より小さければ、残りの 2 つの不等式は直ちに従う。小さい方の数はどちらも ℓ 以下であり、残りの数は正だからである。したがって、調べる必要があるのは常に最大の長さだけである。

(A) 常に成り立つ。 3 つの長さはすべて正である。$c<a+b$ を用いると

$$c+1 < a+b+1 < (a+1)+(b+1),$$

であり、残りの 2 つの不等式も同様に従う。

(B) 成り立つこともあるが、常にではない。 正三角形（equilateral triangle）の場合、3 つの長さは $1, 1, 1$ となり、これは三角形をなす。しかし $a=b=1, c=\frac{1}{10}$ とすると、$1<1+\frac{1}{10}$ なのでこれは正真正銘の三角形である。このとき長さは $1, 10, \frac{1}{10}$ となり、$10>1+\frac{1}{10}$ なので三角形はできない。

(C) 決して成り立たない。 3 つの長さは a, b, c について対称（symmetric）であるから、$a \geq b \geq c$ となるように名前を付けてよい。すると

$$|c-a| = a-c = (a-b)+(b-c) = |a-b|+|b-c|.$$

最大の長さが他の 2 つの和に等しいので、厳密な不等式は成り立たない。（a, b, c のうち 2 つが等しければ、長さの 1 つが 0 となり、やはり成り立たない。）

(D) 常に成り立つ。 集合 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$ は、a, b, c のどの 2 つを入れ替えても変わらない。（たとえば a と b を入れ替えると b^2+ac, a^2+cb, c^2+ba となる。）したがって、3 つの不等式のうち 1 つ、たとえば $a^2+bc < (b^2+ca)+(c^2+ab)$ を、すべての三角形について示せば十分である。差は

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2 \\ &= \left(b-\tfrac{1}{2}c\right)^2+\tfrac{3}{4}c^2+a(b+c-a).\end{aligned}$$

である。最初の括弧は $c>0$ より正であり、$a>0$ かつ $a<b+c$ より $a(b+c-a)>0$ である。よって差は正である。残りの 2 つの不等式は文字を付け替えれば従い、3 つの長さが正であることも明らかなので、これらは常に三角形をなす。

小問 (iv)

a, b, c の役割は入れ替え可能なので、$a \geq b \geq c$ となるように名前を付けてよい。$f(a), f(b), f(c)$ はすべて正である。f は増加関数（increasing function）であるから $f(a) \geq f(b) \geq f(c)$ であり、小問 (iii) の冒頭の注意により、示すべきは

$$f(a) < f(b)+f(c).$$

だけである。

> **考えてみよう** $f(x)/x$ に関する条件は、$f(a)$ と $f(b)+f(c)$ を比較するのにどう役立つだろうか。

この条件により、$f(b)$ と $f(c)$ を $f(a)$ の定数倍で下から評価できる。$f(x)/x$ は x が増加すると減少し、$a \geq b$ であるから

$$\frac{f(b)}{b} \geq \frac{f(a)}{a}, \qquad \text{よって} \qquad f(b) \geq \frac{b}{a}f(a),$$

であり、等号が成り立ちうるのは $b=a$ のときに限る。同様に $f(c) \geq \frac{c}{a}f(a)$ である。辺々加えると

$$f(b)+f(c) \ \geq\ \frac{b+c}{a}f(a) \ >\ f(a),$$

となる。ここで最後の段階では $b+c>a$（三角形であることから）と $f(a)>0$ を用いた。したがって、3 つの新しい長さのうち最大のものは他の 2 つの和より小さく、$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ は三角形の 3 辺となる。

検算

- (D) について、$a=2, b=3, c=4$ とすると、長さは 16, 17, 22 となり、$22<16+17$ である。最長の長さ c^2+ab に合わせて文字を付け替えた恒等式は、差が $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot 1=11$ になると予測し、実際 $16+17-22=11$ である。
- (C) について、三角形 3,4,5 からは 1,1,2 が得られる。予測どおり、つぶれた三角形である。
- ランダムに選んだ 200 000 個の三角形についてコンピュータで確認したところ、(A), (D), (C) が（それぞれ常に、常に、決して）確かめられ、(B) は約 40% の三角形で成り立った。また小問 (iv) も $f(x)=\sqrt{x}$, $\ln(1+x)$, $x/(1+x)$, $x^{0.3}$ と $1-\mathrm{e}^{-x}$ について確かめられた。

よくある間違い

- (B) に対して、三角形を 1 つ試しただけで「決して成り立たない」や「常に成り立つ」と答えること。「成り立つこともある」という答えには、それぞれの場合の例が 1 つずつ必要である。
- (D) で、不等式を 1 つだけ確かめ、残りの 2 つが従う理由を説明しないこと。それを正当化するのが対称性（あるいは最長辺についての注意）である。
- (iv) で、a が b に等しい可能性があるのに $f(a)/a<f(b)/b$ と書くこと。その場合の不等式は $\leq$ であり、厳密性は $b+c>a$ から得なければならない。

STEP のその先へ

三角不等式は**距離関数**（metric）の 3 つの公理（axiom）の 1 つである。距離関数とは、大学 1 年で学ぶ解析学（analysis）と位相空間論（topology）の中心にある、距離の抽象的な概念である。小問 (iv) はこの分野の古典的な事実である。d が距離関数で、f が $f(0)=0$ を満たす増加関数であり、$f(x)/x$ が減少するならば、$f\circ d$ もまた距離関数となる。$d/(1+d)$ が有界な距離関数を作る標準的な方法であるのはこのためである。これらの考え方に出会うには、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解

析入門）がよい。

解答例

STEP II 2020、第 5 問

純粋数学 ・ 数字和と整除性

STEP II 2020、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

10 のどの累乗も 9 で割った余り（remainder）は 1 である。したがって、ある数とその各位の数字の和（digit sum）は、9 を法として（modulo 9）常に一致する。このただ一つの事実によって、各方程式は強い整除性（divisibility）の条件に変わる。あとは大きさの評価で片がつく。各位の数字の和は $9n$ 程度にしか増えないのに対し、数そのものは 10^{n-1} 程度で増えるので、調べるべき候補はわずかしか残らない。

解答

小問 (i)

$x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$、$\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$ とすると、

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

各項において $a_r \geq 0$ かつ $10^r - 1 \geq 0$ であるから、和は非負である。また $10^r - 1 = 99\ldots9$（9 が r 個）$= 9 \times 11\ldots1$ であり、これは 9 で割り切れる（$r = 0$ のときは 0 である）。よってすべての項が、したがって $x - \mathrm{d}(x)$ が 9 で割り切れる。 ■

合同式（congruence）の言葉で書けば、すべての正の整数 x に対して $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ である。以下ではこれを繰り返し用いる。

小問 (ii)

同値性（equivalence）。 $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$ であるから、

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

となる。ここで $-43 = -45 + 2$ を用いた。よって $x - 44\,\mathrm{d}(x)$ が 9 の倍数であることと $9 \mid 2x$ であることは同値である。$\gcd(2,9) = 1$ より、$9 \mid 2x$ であるのは $9 \mid x$ のとき、かつそのときに限る。これで両方向が一度に証明された。 ■

上界と下界。 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ であり、x が n 桁であるとする。各桁の数字は高々 9 であるから、$\mathrm{d}(x) \le 9n$ であり、$x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$ となる。また n 桁の数の最上位の数字は $a_{n-1} \ge 1$ を満たすので、$x \ge 10^{n-1}$ である。合わせると、

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

$n = 5$ のとき、これは $10\,000 \le 1980$ を要求するが、これは偽である。さらに、ある $n \ge 5$ について $10^{n-1} > 396n$ ならば $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$ となるので、数学的帰納法（induction）により、不等式 $10^{n-1} \le 396n$ はすべての $n \ge 5$ で成り立たない。ゆえに $n \le 4$ である。 ■

> **考えてみよう** 9999 以下のすべての数から、ほんの数個にまで探索範囲を絞り込むにはどうすればよいか。

いま証明した同値性を使う。$x = 44\,\mathrm{d}(x)$ ならば $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$ であり、これは 9 の倍数であるから、$9 \mid x$ である。すると $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$ となり、$\gcd(44,9) = 1$ であるから $9 \mid \mathrm{d}(x)$ が従う。したがって $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ は $44 \times 9 = 396$ の倍数である。

解を求める。 $n \le 4$ であるから $x \le 396 \times 4 = 1584$ であり、x は 396, 792, 1188, 1584 のいずれかである。これらの各位の数字の和はいずれも 18 なので、どの場合も $44\,\mathrm{d}(x) = 792$ となる。条件を満たすのは次の一つだけである。

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

すべての解は四つの候補のいずれかであり、条件を満たすのは 792 だけであるから、ほかに解はない。 ■

小問 (iii)

$y = \mathrm{d}(x)$、$z = \mathrm{d}(y)$ とおくと、方程式は $x = 107z$ となり、$z = x/107 > 0$ である。

整除性。小問 (i) より $x \equiv y \equiv z \pmod 9$ である。よって

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

ここで $106 = 99 + 7$ であるから $9 \mid 7z$ であり、$\gcd(7,9) = 1$ より $9 \mid z$ を得る。

大きさ。小問 (i) からは、任意の正の整数 m に対して $\mathrm{d}(m) \leq m$ も得られる。よって x が n 桁ならば $z = \mathrm{d}(y) \leq y \leq 9n$ であり、

$$10^{n-1} \leq x = 107z \leq 963n.$$

$n = 5$ のとき、これは $10\,000 \leq 4815$ を要求するが、これは偽である。小問 (ii) と同じ帰納法（今度は $10^n > 9630n \geq 963(n+1)$）により、すべての $n \geq 5$ で成り立たないことがわかるので、$n \leq 4$ である。

> **考えてみよう** $z \leq 36$ という評価では、9 の倍数がまだいくつも残る。もっと良くできないだろうか。

できる。各位の数字の和をもう一度適用すればよい。$n \leq 4$ のとき $y = \mathrm{d}(x) \leq 36$ である。$1, 2, \ldots, 36$ の中で各位の数字の和が最大となるのは $\mathrm{d}(29) = 11$ である。なぜなら、37 未満の二桁の数の十の位は高々 3 であり、十の位が 3 のとき一の位は高々 6（各位の数字の和は高々 9）であるのに対し、十の位が 2 のときは $2 + 9 = 11$ となりうるからである。よって $1 \leq z \leq 11$ であり、z は 9 の倍数である。ゆえに $z = 9$ であり、

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

確認：$\mathrm{d}(963) = 18$、$\mathrm{d}(18) = 9$、$107 \times 9 = 963$。よって $x = 963$ は方程式を満たす。どの解も $z = 9$ でなければならず、したがって $x = 963$ であるから、ほかに解はない。■

検算

- 小問 (i) を具体例で確かめる：$249 - 15 = 234 = 9 \times 26$。
- $x < 10^6$ のすべての x についてコンピュータで探索すると、$x = 44\,\mathrm{d}(x)$ の解は 792 のみ、$x = 107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$ の解は 963 のみであり、上で得た評価と整合する。
- $792 = 44 \times 18$、$963 = 107 \times 9$ であることに注意しよう。整除性の議論が要求するとおり、どちらも 9 の倍数である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、x が 9 の倍数であることだけを結論してしまう。$\mathrm{d}(x)$ も 9 の倍数であり、したがって $396 \mid x$ となるという、より強い事実こそが探索を短くするのである。
- $n = 5$ だけを確かめて $n \leq 4$ と述べてしまう。それより大きいすべての n について 10^{n-1} が $396n$ を上回り続ける理由が必要である。帰納法（あるいは、左辺は 10 倍

ずつ増えるのに対し右辺は高々 $\frac{6}{5}$ 倍ずつしか増えないという観察）がその理由を与える。

- 小問 (iii) で $z > 0$ を忘れてしまう。$z = 0$ を除外するのはこの条件である。

STEP のその先へ

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ という事実は、計算を検算する古くからの方法である「九去法」(casting out nines）の背後にある理論である。これは環（ring）$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ で計算する最初の例であり、そこでは 10 が 1 のように振る舞う。同じ考え方を $10 \equiv -1$ に適用すると、11 で割り切れるかどうかを判定する交代和の方法が得られる。数とその各位の数字の関数とを組み合わせた方程式は、たいていここでと全く同じように解かれる。すなわち、合同式で可能性を絞り込み、増大度の評価で候補を有限個にするのである。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、合同式へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP II 2020、第 6 問

純粋数学 ・ 行列の累乗とトレース

> **STEP II 2020、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.4 節「もとに戻る行列」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/finite-order.html

鍵となる考え方

実数を成分とする 2×2 行列はすべて、自分自身の特性方程式（characteristic equation）

$$\mathbf{M}^2 - t\,\mathbf{M} + \delta\,\mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad t = \operatorname{tr}(\mathbf{M}),\ \delta = \det(\mathbf{M}),$$

を満たす。これはケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）であり、成分を計算して展開すれば 2 行で確かめられる。$\mathbf{M}^2$ を $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ で表してしまえば、$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ のような等式はどれも「$t\mathbf{M}$ が $\mathbf{I}$ の定数倍である」という形になる。したがって $t = 0$ であるか、$\mathbf{M}$ 自身が $\mathbf{I}$ の定数倍であるかのどちらかである。小問 (iii) と (iv) は、小問 (ii) を $\mathbf{M}$ の代わりに $\mathbf{M}^2$ や $\mathbf{M}^4$ に適用すれば得られる。

以下を通して、$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$t = a + d$、$\delta = ad - bc$ とおく。

解答

小問 (i)

展開すると

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

となる。たとえば $(a+d)a-(ad-bc)=a^2+bc$、$(a+d)b=ab+bd$ だからである。よって

$$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - \delta\mathbf{I}. \qquad (*)$$

$(*)$ のトレース（trace）をとり、$\mathrm{tr}(\mathbf{I})=2$ を用いると

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}^2) = t\cdot t - 2\delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M})^2 - 2\det(\mathbf{M}),$$

となり、示すべき式が得られる。（直接計算すれば $a^2+2bc+d^2=(a+d)^2-2(ad-bc)$ である。）

小問 (ii)

1 つ目の同値性、$(\Rightarrow)$。$\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$ と仮定する。$(*)$ に代入すると

$$t\,\mathbf{M} = (1+\delta)\,\mathbf{I}.$$

$t\neq 0$ ならば両辺を割って、実数 $k=(1+\delta)/t$ により $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$ と書ける。すると $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=\mathbf{I}$ より $k=\pm1$ となり、$\mathbf{M}=\pm\mathbf{I}$ となるが、これは仮定により除かれている。したがって $t=0$ であり、このとき $(1+\delta)\mathbf{I}=\mathbf{0}$ だから $\delta=-1$ である。

$(\Leftarrow)$。$t=0$ かつ $\delta=-1$ ならば、$(*)$ より $\mathbf{M}^2=0\cdot\mathbf{M}+\mathbf{I}=\mathbf{I}$ である。また $\mathrm{tr}(\pm\mathbf{I})=\pm2\neq 0$ だから $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$ である。

2 つ目の同値性、$(\Rightarrow)$。$\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ ならば、$(*)$ より $t\mathbf{M}=(\delta-1)\mathbf{I}$ である。$t\neq 0$ ならばある実数 k により $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$ となり、$\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=-\mathbf{I}$ には $k^2=-1$ が必要だが、実数 k ではこれは不可能である。よって $t=0$ であり、このとき $\delta=1$ である。

$(\Leftarrow)$。$t=0$ かつ $\delta=1$ ならば、$(*)$ からただちに $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ が得られる。

> **考えてみよう** $\mathbf{M}$ が実行列であることを、正確にはどこで使ったか？

2 つ目の同値性においてだけである。$k^2=-1$ は実数解をもたない。複素行列では、$\mathbf{M}=\mathrm{i}\mathbf{I}$ はトレースが $2\mathrm{i}\neq 0$ でありながら $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ を満たすので、この結果は成り立たなくなる。

小問 (iii)

$(\Leftarrow)$ は明らかである。$\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$ ならば $\mathbf{M}^4=(\pm\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$ となる。

$(\Rightarrow)$。$\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$ とおく。これは $\mathbf{N}^2=\mathbf{I}$ を満たす実 2×2 行列である。$\mathbf{N}=\pm\mathbf{I}$ ならば求める結論そのものであり、$\mathbf{N}\neq\pm\mathbf{I}$ ならば小問 (ii) より $\det(\mathbf{N})=-1$ となる。しかし

$$\det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{M})^2 \geq 0,$$

であるから、後者の場合は起こりえない。よって $\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$ である。

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ となる条件。再び $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ とおく。小問 (ii) の 2 つ目の同値性を $\mathbf{N}$ に適用すると

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \mathrm{tr}(\mathbf{N}) = 0 \text{ かつ } \det(\mathbf{N}) = 1.$$

小問 (i) と $\det(\mathbf{N}) = \delta^2$ を用いると、これは

$$t^2 - 2\delta = 0 \quad \text{かつ} \quad \delta^2 = 1.$$

ということである。$\delta^2 = 1$ より $\delta = \pm 1$ であり、$t^2 = 2\delta \geq 0$ より $\delta = -1$ は除かれる。よって $\delta = 1$ かつ $t^2 = 2$ である。どの段階も同値変形であったから

$$\boxed{\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det(\mathbf{M}) = 1 \text{ かつ } \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}}.$$

小問 (iv)

小問 (iii) を $\mathbf{M}^2$ に適用すると $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^4 = \pm\mathbf{I}$ であるから、$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ を満たす行列はちょうど

$$\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I} \qquad \text{または} \qquad \det(\mathbf{M}) = 1,\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}.$$

を満たす行列である。回転（rotation）と鏡映（reflection）は**直交**行列（orthogonal matrix）にほかならない。すなわち、その列ベクトルは互いに垂直な単位ベクトル（unit vector）である（回転の行列式（determinant）は 1、鏡映の行列式は -1）。したがって、上の条件を満たし、列ベクトルが単位ベクトルでない行列を 1 つ見つければよい。たとえば

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

はトレースが 0、行列式が -1 であるから、小問 (ii) より $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ であり（確認：$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$）、したがって $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ である。その第 2 列 $(1, -1)$ の長さは $\sqrt{2} \neq 1$ なので、これは回転でも鏡映でもない。（これは「斜めの鏡映」である。x 軸方向のベクトルをすべて固定し、$(1, -2)$ 方向のベクトルをすべて逆向きにするが、この 2 つの方向は垂直ではない。）

より興味深い族からの例としては $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ がある。行列式は 1、トレースは $\sqrt{2}$ であるから $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ であるが、第 1 列の長さは $\sqrt{3}$ である。これは 45° の「ゆがんだ」回転であり、その回転と同じく位数（order）はちょうど 8 であるが、長さを保たない。

検算

- 45° の回転 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ は行列式が 1、トレースが $\sqrt{2}$ であり、45° の回転を 4 回行うと半回転、すなわち $-\mathbf{I}$ になる。これは小問 (iii) と整合する。
- $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ を 2 乗すると $\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$ となる。これはトレースが 0、行列式が 1 であるから、小問 (ii) よりその 2 乗は $-\mathbf{I}$ である。
- 成分が $\{-3,-\frac{5}{2},\dots,3\}$ に属するすべての行列についてコンピュータで探索し、小問 (ii) の 2 つの同値性と小問 (iii) の 1 つ目の同値性が厳密に成り立つことを確認した。

よくある間違い

- $t=0$ の場合を先に処理せずに t で割ってしまう。小問 (ii) の議論全体は、t が 0 かどうかによる場合分けである。
- 小問 (iii) で、$\det(\mathbf{M}^2)=\det(\mathbf{M})^2$ が負になりえないことを忘れる。まさにこのことが、$\mathbf{I}$ の「それ以外の」平方根を除外している。
- 小問 (iv) の例として 45° の回転を挙げてしまう。これは $\mathbf{M}^8=\mathbf{I}$ を満たすが、まさに除外されているものである。

STEP のその先へ

恒等式 $(*)$ は、ケイリー・ハミルトンの定理の 2×2 の場合である。すなわち、すべての正方行列はその特性多項式（characteristic polynomial）を満たす。「どのような $\mathbf{M}$ が $\mathbf{M}^n=\mathbf{I}$ を満たすか？」といった問いは、実は固有値（eigenvalue）に関する問いである。ここでは固有値は 1 の 8 乗根（eighth roots of unity）でなければならず、位数 8 の実行列は回転そのものでなくても回転に**相似**（similar）である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このような考え方で固有値、相似、特性多項式を展開している。

解答例

STEP II 2020、第 7 問

純粋数学 ・ 複素変換

STEP II 2020、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

写像 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$ は平行移動（shift）のあとに反転（inversion）を施したものであり、反転は原点を通らない直線を原点を通る円に移す。w がある特定の円の上にあることを証明するには、中心 c を予想し、$|w-c|$ が定数に整理されることを示すのがもっとも見通しのよい方法である。$w-c$ を一つの分数にまとめると、分子と分母が互いに共役（またはほぼ共役）になっており、これこそが絶対値（modulus）が一定になる理由である。

解答

以下では、実数 x, y に対して $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$ および $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つことを用いる。

小問 (i)

$z = 3+ti$ とすると $z-2 = 1+ti$ であるから、

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

分子と分母は互いに共役複素数（complex conjugate）であるから、絶対値は等しく $\sqrt{1+t^2}$ であり、これは決して 0 にならない。したがって

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

となり、これは t によらない。直線 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 上のすべての z は、ある実数 t を用いて $3+ti$ と表せるから、そのようなすべての z について点 w は 1 から距離 1 の位置にあ

る。すなわち、w は中心 1、半径 1 の円の上にある。

直線 V。今度は $z = p + ti$ とし、$a = p - 2$ とおくと見やすい。$p \neq 2$ であるから a は 0 でない実数である。このとき $z - 2 = a + ti$ であり、これは決して 0 にならない。$p = 3$ のときの中心は $1 = 1/a$ であったから、一般に中心として $1/a$ を試してみる。

$$w - \frac{1}{a} = \frac{2}{a+ti} - \frac{1}{a} = \frac{2a - (a+ti)}{a(a+ti)} = \frac{a-ti}{a(a+ti)}.$$

ここでも $|a - ti| = |a + ti|$ であるから、

$$\left| w - \frac{1}{p-2} \right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|p-2|}.$$

よって w は次の円の上にある。

$$\text{中心} \frac{1}{p-2}, \qquad \text{半径} \frac{1}{|p-2|}.$$

半径の絶対値記号は重要である。$p < 2$ のとき中心は負の実軸上にあるが、半径は正でなければならない。

> **考えてみよう** $p = 3$ の場合を教えられていなかったとしたら、中心 $1/(p-2)$ はどのようにして見つけられただろうか？

点 $z = p$（$t = 0$ のとき）からは $w = 2/a$ が得られ、$t \to \pm\infty$ のとき $w \to 0$ となる。この二点は直径（diameter）の両端にある（円は実軸に関して対称であり、この二点は円と実軸との二つの交点である）から、中心はその中点 $1/a$ である。

虚部については、分子と分母に共役複素数を掛ける。

$$w = \frac{2(a-ti)}{a^2+t^2}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{Im}(w) = \frac{-2t}{a^2+t^2}.$$

分母は正であるから、$\mathrm{Im}(w) > 0$ となるのはちょうど $t < 0$ のときである。したがって、V の点のうち $\mathrm{Im}(w) > 0$ となるものは

$$z = p + ti \text{ ただし} t < 0, \quad \text{すなわち} V \text{ のうち実軸より下側の点} (\mathrm{Im}(z) < 0).$$

小問 (ii)

今度は s を実数として $z = s + qi$ とし、$u = s - 2$ とおくと $z - 2 = u + qi$ であり、$q \neq 0$ であるからこれは 0 でない。この場合、円の二つの「端」は $w = 0$（$u \to \pm\infty$ のとき）と $w = 2/(qi) = -2i/q$（$u = 0$ のとき）であり、中心は $-i/q$ と予想される。確かめよう。

$$w + \frac{i}{q} = \frac{2}{u+qi} + \frac{i}{q} = \frac{2q + i(u+qi)}{q(u+qi)} = \frac{q+ui}{q(u+qi)}.$$

ここで $|q+ui| = \sqrt{q^2+u^2} = |u+qi|$ であるから、

$$\left|w + \frac{i}{q}\right| = \frac{1}{|q|}.$$

よって w は次の円の上にある。

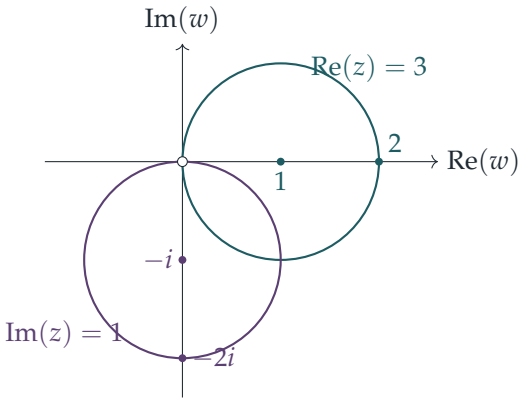
$$\text{中心} -\frac{i}{q}, \qquad \text{半径} \frac{1}{|q|}.$$

実部については、

$$w = \frac{2(u-qi)}{u^2+q^2}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{Re}(w) = \frac{2u}{u^2+q^2},$$

であり、分母は正である。したがって $\mathrm{Re}(w) > 0$ となるのはちょうど $u > 0$ のとき、すなわち

$z = s + qi$ ただし$s > 2$, すなわちH のうち次の直線より右側にある点：$\mathrm{Re}(z) = 2$.



図は、$\mathrm{Re}(z) = 3$ の像（小問 (i) より）と $\mathrm{Im}(z) = 1$ の像（小問 (ii) で $q = 1$ としたもの）を示している。どちらの円も原点を通るが、$2/(z-2) \neq 0$ であるから $w = 0$ そのものに達することはない。これは直線に沿って「無限遠」にある z に対応している。

検算

- V についての式で $p = 3$ とすると、中心は $1/(3-2) = 1$、半径は 1 となり、最初の結果と一致する。
- 具体的な値で確かめる。$z = 3 - i$ のとき $w = 2/(1-i) = 1+i$ であり、$|w-1| = 1$ かつ $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$ となって、$t = -1 < 0$ と整合する。$q = 1$ の H については、$z = 3+i$ のとき $w = 1-i$ であり、これは $-i$ から距離 1 の位置にあって、$3 > 2$ であるから実部は正である。

- 半径 $1/|p-2|$ は $p \to 2$ のとき大きくなる。このとき直線 V は無限遠に送られる点 $z=2$ の近くを通るから、その像は非常に大きくなるはずである。何千通りものランダムな p, q と各直線上の点についてコンピュータで確認したところ、二つの円と二つの符号の条件がいずれも正しいことが確かめられた。

よくある間違い

- 半径を $1/(p-2)$ や $1/q$ と答えてしまう。これらは $p<2$ や $q<0$ のとき負になる。
- $\mathrm{Im}(w)$ の符号を逆にしてしまう。$z-2$ で割ると実軸に関して折り返されるので、$\mathrm{Im}(w)$ は $\mathrm{Im}(z)$ と逆の符号をもつ。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto 2/(z-2)$ はメビウス（Möbius）変換（Möbius transformation）$z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ の一つである。これらの写像は常に「一般化された円」（generalised circles、すなわち円と直線）を一般化された円に移し、等角写像（conformal mapping）から双曲幾何（hyperbolic geometry）に至るまで、複素解析（complex analysis）の最初の講義における基本的な幾何学的道具となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）にはこれらについての美しい章があり、その図を見ればこのような結果は一目瞭然となる。

解答例

STEP II 2020、第 8 問

純粋数学 • 多項式と積分

> **STEP II 2020、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ であるから、f の根はすべて F の極値点（turning point）であり、各面積の条件は、それらの極値点の一つにおける F の値についての主張に言い換えられる。F が 0 と c で重根（double root）をもつことがわかれば、和 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$ は符号を担うただ一つの因数 $c - 2h$ にまとまる。その符号を、$[0, c]$ における F の最大値と最小値についてわかっていることと比べると、対称性が導かれる。

解答

f は最高次の係数が 1 であるモニック（monic）な多項式で、根が $0, a, b, c$ であるから、$\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$ である。したがって、$(0, a)$ で $\mathrm{f} < 0$、(a, b) で $\mathrm{f} > 0$、(b, c) で $\mathrm{f} < 0$ であり、$x < 0$ および $x > c$ で $\mathrm{f} > 0$ である。0 と a の間の面積を A とおく。条件は、b と c の間の面積が A、a と b の間の面積が $2A$ であることを述べており、$A > 0$ である。

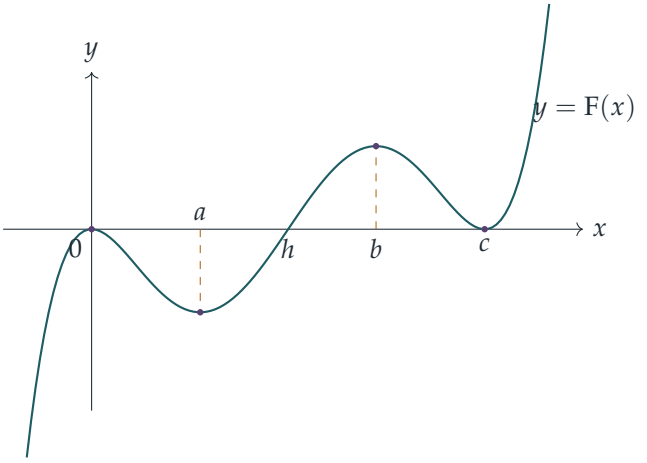
小問 (i)

$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ であるから、$\mathrm{f} < 0$ となる区間での積分は、そこでの面積にマイナスをつけたものになる。よって

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ であるから、F の極値点は $x = 0, a, b, c$ にある。f の符号は 0 と b で $+$ から $-$ に変わるので、そこで極大となり、a と c で $-$ から $+$ に変わるので、そこで極小となる。F は最高次の係数（leading coefficient）が正の値 $\frac{1}{5}$ である五次関数（quintic）である

から、$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$ である。



この曲線は $(0,0)$ で極大、$x = a$ で $y = -A$ の極小、$x = b$ で $y = A$ の極大をとり、$(c,0)$ で軸に接する極小をとる。

F の形。 F は次数 5、最高次の係数 $\frac{1}{5}$ の多項式である。$x = 0$ では $\mathrm{F}(0) = 0$ かつ $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{f}(0) = 0$ であるから、$x = 0$ は重複度（multiplicity）が 2 以上の根である。同様に $\mathrm{F}(c) = 0 = \mathrm{F}'(c)$ であるから、c も重複度が 2 以上の根である。これで五つの一次因数のうち四つが決まり、

$$\mathrm{F}(x) = \tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

とある実数 h を用いて書ける。また、$\mathrm{F}(a) = -A < 0 < A = \mathrm{F}(b)$ であるから、F は a と b の真に間に根をもつ。0 も c も (a,b) に含まれないので、この根は h でなければならない。よって $a < h < b$ であり、特に $0 < h < c$ である。

和について。 $(c-x)^2\big((c-x)-c\big)^2 = x^2(x-c)^2$ に注意する。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x) &= \tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2\big[(x-h)+(c-x-h)\big] \\ &= \tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

小問 (ii)

$[0,c]$ において、F は $[0,a]$ で狭義単調減少、$[a,b]$ で狭義単調増加、$[b,c]$ で狭義単調減少である。したがって $[0,c]$ における最小値は $\mathrm{F}(a) = -A$ である。他の候補は端点の値 $\mathrm{F}(c) = 0 > -A$ だけだからである。この最小値をとるのは $x = a$ のときに限る。よって $0 \le x \le c$ に対して

$$\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(x) \;\ge\; \mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(a) = A - A = 0,$$

が成り立ち、$x \neq a$ のとき不等号は狭義となる。

考えてみよう x をどの値にとれば、$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$ が小問 (i) の和の形になるだろうか？

$x = c-b$ ととる。$0 < b < c$ であるから、これは $[0,c]$ に属する。小問 (i) より

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b) = \tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

$c-b \neq a$ ならば、左辺は正である。$\frac{1}{5}b^2(b-c)^2 > 0$ であるから、$c-2h > 0$ が従う。よって $c-b=a$ または $c>2h$ であり、これが示すべきことであった。

次に、同じ議論を上下逆にして行う。$[0,c]$ における F の最大値は $\mathrm{F}(b)=A$ であり、これは端点の値 $\mathrm{F}(0)=\mathrm{F}(c)=0$ より大きく、最大値をとるのは $x=b$ のときに限る。よって $0 \leq x \leq c$ に対して

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b) = 0,$$

が成り立ち、$x \neq b$ のとき不等号は狭義となる。$x = c-a \in [0,c]$ ととると $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h) \leq 0$ が得られ、$c-a \neq b$ ならば不等号は狭義である。よって $c-a=b$ または $c<2h$ である。

$c \neq a+b$ ならば、二つの結論から $c>2h$ かつ $c<2h$ となり、これは不可能である。したがって $c=a+b$ である。このとき $c-b=a$ であるから

$$0 = \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b) = \tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

$a,b \neq 0$ であるから、これより $c=2h$ が得られる。

小問 (iii)

$h = \frac{1}{2}c$ のとき、$u = x^2(x-c)^2$ とおくと $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{5}u\left(x-\frac{1}{2}c\right)$ であり、$u' = 2x(x-c)(2x-c)$ である。積の微分法（product rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) &= \tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)\left(x-\tfrac{1}{2}c\right)+x^2(x-c)^2\right]\\ &= \tfrac{1}{5}x(x-c)\left[(2x-c)^2+x(x-c)\right]\\ &= \tfrac{1}{5}x(x-c)\left(5x^2-5cx+c^2\right)\\ &= x(x-c)\left(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2\right).\end{aligned}$$

（したがって $a,b = \frac{1}{2}c \mp \frac{c}{2\sqrt{5}}$ であり、確かにその和は c になる。）

考えてみよう 根は $x = \frac{1}{2}c$ に関して対称である。これを利用して第 2 次導関数を簡単に求められないだろうか？

できる。$y = x - \frac{1}{2}c$ とおく。すると $x(x-c) = y^2 - \frac{1}{4}c^2$、$x^2 - cx + \frac{1}{5}c^2 = y^2 - \frac{1}{20}c^2$ であるから

$$\mathrm{f} = \left(y^2 - \tfrac{1}{4}c^2\right)\left(y^2 - \tfrac{1}{20}c^2\right) = y^4 - \tfrac{3}{10}c^2y^2 + \tfrac{1}{80}c^4.$$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$ であるから

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2,$$

であり、これが 0 になるのはちょうど $y^2 = \frac{1}{20}c^2$ のときである。これらの点では f の因数 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$ が 0 になるので、$\mathrm{f} = 0$ である。それぞれは y の二次式 f'' の単根（simple root）であるから、そこで f'' の符号が変わり、これらは本当に変曲点（point of inflection）である。よって二つの変曲点はどちらも x 軸上にある。実際、それらは点 $(a, 0)$ と $(b, 0)$ である。

検算

- $c = 2$ ととると、$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$、$b \approx 1.4472$ である。f の数値積分（numerical integration）により、$[0, a]$、$[a, b]$、$[b, c]$ における面積はそれぞれ 0.05724、0.11449、0.05724 となる。外側の二つは等しく、それぞれが真ん中の面積の半分である。
- $a + b = c$、$ab = \frac{1}{5}c^2$ として $x(x-a)(x-b)(x-c)$ を展開すると、小問 (iii) の式が再現される。
- $c = 2$ のとき、$x = a \approx 0.5528$ における f'' の差分（finite difference）による近似値は丸め誤差の範囲で 0 であり、$x = 0.54$ と $x = 0.56$ の間で符号が変わる。

よくある間違い

- $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$ だけでなく $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$ でもあることを忘れ、重根を見落とす。
- $0 < h < c$ を正当化しない。h の位置を決めるのは、a と b の間での F の符号変化である。
- 小問 (ii) で最初の不等式だけを使う。それから得られるのは「$c = a + b$ または $c > 2h$」であり、それだけでは不十分である。議論を完結させるには、$\mathrm{F}(a)$ を用いた逆向きの不等式が必要である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の議論は最大値・最小値の定理（extreme value theorem）を用いている。すなわち、閉区間上の連続関数は最大値と最小値をとるという定理であり、ここではさらにそれらをとる場所も正確にわかっている。面積の条件から導かれる、四次関数（quartic）の $x = \frac{1}{2}c$ に関する対称性は、積分の条件によって多項式の形が決まってしまう一つの例である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、最大値・最小値の定理と、F と f を結びつける微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2020、第 9 問

力学 ・ 放物体の衝突

STEP II 2020、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

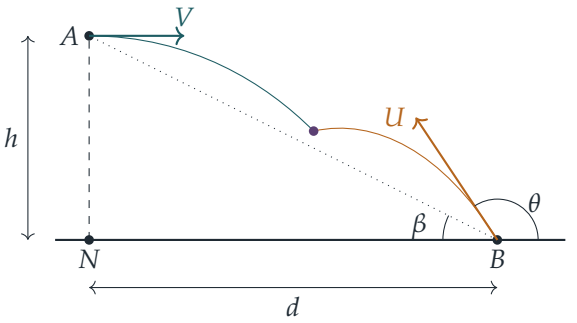
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つの粒子を 1 つの座標系（coordinate system）で表し、時刻 t におけるそれぞれの位置を書き下す。どちらの粒子も同じ下向きの加速度（acceleration）g を受けるので、高さを比べると $-\frac{1}{2}gt^2$ の項は打ち消し合う。つまり互いに対して見れば、2 つの粒子は等速度で直線運動をしている。このため衝突時刻は非常に簡単に求まり、以降の小問はすべてそこから短い議論で導かれる。

解答

2 つの粒子をともに重力のもとで自由に運動する質点（point mass）とみなし、空気抵抗（air resistance）は無視する。N を原点、x 軸を NB に沿ってとり（したがって $B=(d,0)$、$A=(0,h)$）、y 軸を鉛直上向きにとる。A から投げた粒子は B に向かって、B から投げた粒子は N に向かって進むので、両者の水平方向の速度は逆向きである。これが与えられた結果の述べている設定である。



投射から時間 t 後、A から投げた粒子の位置は

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

であり、B から投げた粒子の位置は

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。両方の座標が一致すれば、2 つの粒子は時刻 T に衝突（collision）する。高さが一致するのは

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

のときであり、これが衝突時刻としてありうる唯一の値である（θ は鋭角なので $\sin\theta > 0$）。この同じ時刻に水平方向の位置も一致しなければならない：

$$VT = d - UT\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

両辺に $U\sin\theta$ を掛けると $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$ となり、U で割ると

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

を得る。これが示すべき式である。

小問 (i)

直角三角形 ANB より $\tan\beta = h/d$ であり、$0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ である。V、h、U は正なので、いま示した結果から $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$ が成り立つ。$d\cos\theta > 0$（θ は鋭角）で割ると

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

2 つの角はともに $(0, \frac{1}{2}\pi)$ にあり、この区間で tan は狭義単調増加（strictly increasing）なので、$\theta > \beta$ である。

小問 (ii)

> **考えてみよう** ここまでの計算では、地面のことを一切使っていない。まだ課していない物理的な条件は何だろうか？

衝突はどちらかの粒子が地面に達する前に起こらなければならないので、時刻 T における共通の高さは 0 以上でなければならない：

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

（$h > 0$ で割り、$U^2 \sin^2\theta > 0$ を掛けた。）$U\sin\theta > 0$ なので、正の平方根をとると

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

を得る。等号は、2 つの粒子がちょうど地面に達した瞬間に出会う場合に対応する。

小問 (iii)

$r = AB = \sqrt{d^2 + h^2}$ とおくと、$d = r\cos\beta$、$h = r\sin\beta$ である。すると

$$d\sin\theta - h\cos\theta = r(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) = r\sin(\theta - \beta),$$

となり、衝突の条件は

$$r\sin(\theta-\beta) = \frac{Vr\sin\beta}{U} \quad \Longrightarrow \quad \frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

となる。小問 (i) より $\theta - \beta > 0$ であり、また $\theta - \beta < \theta < \frac{1}{2}\pi$ である。よって $0 < \sin(\theta-\beta) < 1$ であり、$\sin\beta > 0$ だから

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)} > \sin\beta.$$

最後の小問

衝突が起こる高さは $h - \frac{1}{2}gT^2$ なので

$$\text{次より高い位置で衝突：} \tfrac{1}{2}h \iff h - \tfrac{1}{2}gT^2 > \tfrac{1}{2}h \iff gT^2 < h.$$

B から投げた粒子の鉛直方向の速度は $U\sin\theta - gt$ なので

$$\text{次の時刻に上昇中：} T \iff U\sin\theta - gT > 0 \iff gT < U\sin\theta.$$

考えてみよう $gT < U\sin\theta$ と $gT^2 < h$ はどうすれば比べられるだろうか？

衝突時刻そのものを使う。$T = h/(U\sin\theta)$ は $U\sin\theta = h/T$ を意味する。したがって $T > 0$ を掛けて

$$gT < U\sin\theta \iff gT < \frac{h}{T} \iff gT^2 < h.$$

2 つの条件はどちらも $gT^2 < h$ と同値なので、2 つの粒子が高さ $\frac{1}{2}h$ より上で衝突するのは、衝突の瞬間に B から投げた粒子がまだ上昇しているとき、かつそのときに限る。

検算

▶ $g = 9.8$、$h = 10$、$d = 20$、$U = 20$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ とする。衝突の条件から $V = U(d\sin\theta - h\cos\theta)/h = 10\sqrt{2} \approx 14.14$、$T = 1/\sqrt{2} \approx 0.707\,\mathrm{s}$ となる。このとき 2 つ

の粒子はともに $x = 10$、$y = 10 - 4.9 \times \frac{1}{2} = 7.55$ にあり、$\frac{1}{2}h = 5$ より上である。B から投げた粒子の鉛直方向の速度は $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$ で上昇中であり、最後の小問の結論どおりである。また $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$ も成り立つ。

- 重力がない場合の直観：$g = 0$ なら 2 つの粒子は直線運動をし、条件 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta - \beta)$ は A、B と出会う点がつくる三角形における正弦定理（sine rule）にほかならない。重力は 2 つの粒子を同じだけ下にずらすので、条件は変わらない。
- h、d、U、θ を数千通りランダムに選んでコンピュータで確認したところ、衝突、3 つの不等式すべて、そして最後の小問の同値性が確かめられた。

よくある間違い

- 小問 (ii) で地面のことを忘れる。この不等式は衝突の方程式から出てくるのではなく、衝突が高さ 0 以上で起こるという条件から出てくる。
- 2 つの角がともに鋭角であり、そこで tan が増加関数であることに触れずに、$\tan\theta > \tan\beta$ から $\theta > \beta$ を結論してしまう。
- 小問 (iii) で $\sin(\theta - \beta) \leq 1$ で止まってしまう。狭義の不等式を得るには $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$ が必要である。

STEP のその先へ

$-\frac{1}{2}gt^2$ の項が打ち消し合うのは、自由落下する基準系（freely falling frame of reference）に乗り換えることの一例である。加速度 g で加速する系では重力が消え、2 つの粒子はどちらも直線運動をする。これは大学の力学の最初の講義で扱われるガリレイ（Galileo）変換や加速度系の考え方の最も簡単な場合であり、さらに後にはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）の出発点となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2020、第 10 問

力学 ・ エネルギーとつり合い

STEP II 2020、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

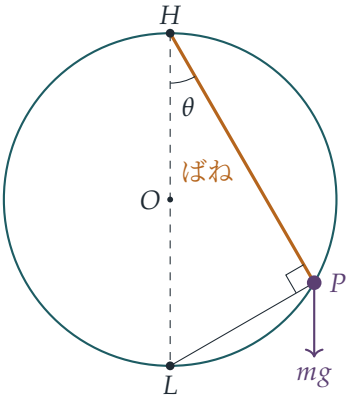
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

HL は直径なので、半円に対する円周角（angle in a semicircle）から、ばねの長さと P の高さが θ を用いて直接表せる。すなわち $HP = 2a\cos\theta$ であり、P は H より $2a\cos^2\theta$ だけ下にある。針金はなめらかなので、その抗力（reaction）は仕事をしない。したがって問題全体は一つの関数、すなわち $c = \cos\theta$ の関数としての位置エネルギー（potential energy）についての問題となる。これは c の 2 次式になることがわかり、平方完成（completing the square）によって両方の小問が一度に解ける。

解答

P をなめらかな針金上の質点としてモデル化し、ばねは軽く、（伸びていても縮んでいても）フックの法則（Hooke's law）に従うものとする。円の中心を O とする。



幾何。HL は直径なので $\angle HPL = 90°$ であり、斜辺（hypotenuse）が $2a$ の直角三角形 HPL において

$$HP = 2a\cos\theta.$$

H から P までの鉛直方向の落差は $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$ である。P が L からどちら側を回って H に向かう場合でも、θ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の範囲を動くので、$\cos\theta > 0$ である。

位置エネルギー。H の高さを重力による位置エネルギーの基準とし、$c = \cos\theta$ とおく。ばねの伸び（extension）は $2ac - l$ なので

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

小問 (i)

なめらかな針金の抗力は仕事をしないので、P が平衡（equilibrium）にあるのは、ちょうど $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ となるところである。（同値な言い方をすれば、接線方向の力がつり合うところである。）連鎖律（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である $\theta = \alpha$ では $\sin\alpha \neq 0$ なので、括弧の中が零でなければならない：

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

右辺は零でないので $a\lambda \neq mgl$ であり、割り算ができる：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

となり、示すべき式が得られた。

このような α が存在するためには $0 < \cos\alpha < 1$ が必要である。

- $\cos\alpha > 0$：分子 λl は正なので、$a\lambda > mgl$ が必要である。
- $\cos\alpha < 1$：正の量 $2(a\lambda - mgl)$ を両辺に掛けると $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$、すなわち $\lambda(2a - l) > 2mgl$ を得る。

$l < 2a$ なので、2 つ目の条件は $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$ である。$\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$ なので、これから 1 つ目の条件も従う。よって $\alpha > 0$ の平衡が存在するのは $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$ のときに限る。（逆に、これが成り立てば、この式は実際の角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ を与え、対称性から $-\alpha$ も平衡である。）

小問 (ii)

考えてみよう $\cos\alpha$ が単独で現れるような、V のうまい書き方はないだろうか？

ある。平方完成すればよい。$K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$ とおく。小問 (i) より $\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$ なので

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

したがって

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{定数}.$$

（検算として、これは $c = \cos\alpha$、すなわち小問 (i) で求めた平衡で最小となる。）小問 (i) で平衡が存在するために必要とされたとおり、$a\lambda > mgl$ を仮定する。よって $\cos\alpha > 0$ かつ $K > 0$ である。

L では $\theta = 0$、$c = 1$ である。L と一般の点との間でエネルギー保存則（conservation of energy）を用いると

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\Big[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\Big].$$

$\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$ を掛けると、

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{ただし} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

よって P が $\theta = \beta$ で静止するならば、そこで $v = 0$ であり

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

これが求める方程式である。

考えてみよう この方程式は $\cos\beta$ について 2 つの解をもつ。実際に止まる点はどちらで、それが H より手前になるのはどのようなときか？

P が L から H に向かって上がるにつれて、c は 1 から 0 に向かって減少する。$(*)$ より、$(c - \cos\alpha)^2 < D$ である限り P は動き続ける。したがって、1 から減少していく c が区間 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$ の近い方の端に達したところで初めて止まる。ここで $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$（$u > 0$ ならば等号は成り立たない）なので、$\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$ かつ $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$ である。よって $c = 1$ はこの区間の内部にあり、止まるときの値は

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P が（$c = 0$ となる）H に達する前に止まるのは、ちょうどこれが正のとき、すなわち $\sqrt{D} < \cos\alpha$、つまり $D < \cos^2\alpha$ のときである：

$$\begin{aligned} & (1-\cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < \cos^2\alpha \\ \iff \quad & 1 - 2\cos\alpha + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < 0 \\ \iff \quad & \frac{mu^2}{2a\lambda} < 2 - \sec\alpha, \end{aligned}$$

ここで最後の段階では $\cos\alpha > 0$ で割った。したがって P が H より手前で静止するのは次の場合に限る：

$$u^2 < \frac{2a\lambda}{m}(2 - \sec\alpha).$$

特に、このためには $\sec\alpha < 2$、すなわち $\alpha < \frac{\pi}{3}$ が必要である。そうでなければ、L での速さによらず P は H に達する。

検算

- $m = 1$、$g = 10$、$a = 1$、$l = 1$、$\lambda = 40$ とする（単位系は整合しているものとする）。このとき $\lambda > 2mgl/(2a - l) = 20$ であり、$\cos\alpha = 40/60 = \frac{2}{3}$ である。臨界値は $u^2 = 80(2 - \frac{3}{2}) = 40$ である。$u^2 = 40$ のとき $D = \frac{1}{9} + \frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ なので、$\cos\beta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ となる。質点はちょうど H に達し、期待どおりである。
- $u = 0$ ならば $D = (1-\cos\alpha)^2$ かつ $\cos\beta = 1$ である。L で静止している質点はそこにとどまるが、L もまた平衡なので、これは正しい。
- 多数のランダムなパラメータの組について運動方程式（equation of motion）を計算機で数値積分したところ、u^2 が臨界値より小さいときにちょうど、質点は予測どおりの $\cos\beta$ で止まった。

よくある間違い

- $HP = 2a\sin\theta$ としてしまう、あるいは誤った角を用いて O から高さを測ってしまう。中心角は θ ではなく 2θ であることに注意しよう。
- 小問 (i) で $\cos\alpha > 0$ だけを確かめてしまう。λ の範囲を与えるのは条件 $\cos\alpha < 1$ の方である。
- $\cos\beta$ として解 $\cos\alpha + \sqrt{D}$ を選んでしまう。これは 1 を超えるので、針金上の位置を表さない。

STEP のその先へ

エネルギーを $K(c-\cos\alpha)^2+$ 定数 と書くことは、大学の力学における重要な考え方の 1 次元版である。自由度（degree of freedom）が 1 の系では、平衡点はポテンシャルの停留点（stationary point）であり、その安定性（stability）はそれらの点が極小か極大かによって決まり、運動が許される領域はエネルギーがポテンシャルを上回る場所である。ここでは、$\alpha>0$ が存在するとき、L は V の極大点となり、したがって不安定な平衡（unstable equilibrium）となる。ばねのせいで針金の最下点が不安定になるのである！Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方に沿ってエネルギー図と安定性を論じている。

解答例

STEP II 2020、第 11 問

確率・統計　・　硬貨投げにおける連

> **STEP II 2020、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

このゲームはほとんど記憶をもたない。各時点で意味をもつのは、直前に出た面がどちらか、そして現在の連（run）の長さだけである。特に、出る面が変わった瞬間、ゲームはその新しい面がまさに 1 回目の投げで出た場合とまったく同じ状況になる。そこで 1 回目の投げで条件付け（conditioning）を行い、1 回目が表のときに A が勝つ確率（probability）を、1 回目が裏のときに A が勝つ確率を用いて表し、逆も同様に表す。こうして 2 つの連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られる。

解答

以下では常に $0 < p < 1$ とする。（$p = 0$ または $p = 1$ の場合はすべての投げで同じ面が出るので、ゲームは 2 回目か 3 回目の投げで終わり、答えは自明である。）

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A が勝つ} \mid 1 \text{ 回目が H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A が勝つ} \mid 1 \text{ 回目が T}).$$

とおく。各回の投げは独立（independent）であるから、ある投げの後に起こることは、それ以降の投げだけによって決まる。

小問 (i)

ゲームは終わる。 n 回投げた後もゲームが続いているのは、それまでに連続する 2 回の投げで同じ面が出たことが一度もない場合、すなわち最初の n 回が $HTHT\ldots$ または $THTH\ldots$ と交互に出ている場合に限る。$n = 2m$ のとき、この 2 つの列はいずれも表を m 回、裏を m 回含むので、

$$\mathrm{P}(2m \text{ 回投げた後も終わっていない}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \leq 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

となる。ここで $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ を用いた。事象「ゲームが決して終わらない」はこれらの事象のどれにも含まれるから、その確率はすべての m について $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$ 以下であり、$m \to \infty$ とすればそれが 0 であることがわかる。

1 回目が表の場合。2 回目の投げに注目する。

- 確率 p で表が出て、A がただちに勝つ。
- 確率 q で裏が出る。このとき、その前の表はもはや関係がない。B はあと 1 回裏が出ればよく、A は表が 2 回続けて出る必要がある。これはまさにこの裏が 1 回目の投げであった場合と同じである。したがって、このとき A が勝つ確率は β である。

同様に、1 回目が裏の場合、2 回目が裏なら B がただちに勝ち、2 回目が表なら「1 回目が表」の状況になる。よって

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

第 2 式を第 1 式に代入すると $\alpha = p + pq\,\alpha$ となるので、

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

が示された（$1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$ である）。また $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$ である。

全体の確率。1 回目の投げで条件付けると、

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

小問 (ii)

ここでは α と β は、長さ 3 の連が必要なゲームについての確率を表すものとする。1 回目が表であるとする。

- HH に続いて H（確率 p^2）：A が勝つ。
- HHT（確率 pq）または HT（確率 q）：最初の裏がちょうど出たところであり、それ以前の表はもはや数えられないので、「1 回目が裏」の状況になり、A が勝つ確率は β である。

これらの場合ですべてを尽くしているので、

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

となり、与えられた結果が得られる。2 つの面の役割を入れ替えると（「1 回目が裏」の状況では、TTT は B の勝ちとなり 0 を寄与する）、

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

考えてみよう 係数 $q+pq$ と $p+pq$ はどのようにして $1-p^2$ と $1-q^2$ になるか。

$p+q=1$ であるから、$q+pq=q(1+p)=(1-p)(1+p)=1-p^2$ であり、同様に $p+pq=p(1+q)=1-q^2$ である。これは直接考えても納得できる。$1-p^2$ は、最初の表に続く 2 回の投げがともに表ではない確率であり、それはまさに連が途切れる場合である。したがって方程式は

$$\alpha=p^2+(1-p^2)\beta, \qquad \beta=(1-q^2)\alpha,$$

となり、代入すると $\alpha\left[1-(1-p^2)(1-q^2)\right]=p^2$、すなわち

$$\alpha=\frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-q^2)}.$$

を得る。($0<1-p^2<1$ かつ $0<1-q^2<1$ であるから、分母は正である。) 最後に、

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ})=p\alpha+q\beta=\alpha\left(p+q(1-q^2)\right)=\alpha\left(p+q-q^3\right)=\alpha\left(1-q^3\right),$$

であるから、

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ})=\frac{p^2(1-q^3)}{1-(1-p^2)(1-q^2)},$$

が示された。

小問 (iii)

長さ a と b の連についても同じ議論が成り立つ。1 回目が表のとき、続く $a-1$ 回がすべて表であれば (確率 p^{a-1}) A が勝ち、そうでなければその中に裏が現れる (確率 $1-p^{a-1}$)。後者の場合、ゲームはその裏から単に再スタートするので、「1 回目が裏」の状況になる。同様に、1 回目が裏のとき、B は確率 q^{b-1} で勝ち、そうでなければ B の連が完成する前に表が現れる。よって

$$\alpha=p^{a-1}+\left(1-p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta=\left(1-q^{b-1}\right)\alpha,$$

であり、したがって

$$\alpha=\frac{p^{a-1}}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}.$$

となる。ここでも 2 つの括弧はともに 0 と 1 の間に厳密に収まるので、分母は正である。すると

$$p\alpha+q\beta=\alpha\left(p+q-q^b\right)=\alpha\left(1-q^b\right),$$

であるから、

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A が勝つ})=\frac{p^{a-1}\left(1-q^b\right)}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}}$$

を得る。好みに応じて、分母を展開して $p^{a-1}+q^{b-1}-p^{a-1}q^{b-1}$ としてもよい。

$a=b=2$ の場合。 公式は

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)}=\frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq}=\frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

となる。ここで分母では $1-p=q$、$1-q=p$ を、分子では $1-q=p$ を用いた。これは小問 (i) の結果と一致する。$a=b=3$ とおけば、小問 (ii) の結果がそのまま得られる。

検算

- **公平なコイン、小問 (*i*)。** $p=q=\frac{1}{2}$ のとき答えは $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$ であり、対称性から当然そうなるべき値である。(iii) でも $a=b$ かつ $p=\frac{1}{2}$ ならば同じことが起こる。
- **極端な場合。** $p\to 1$ のとき (iii) の答えは 1 に近づき、$p\to 0$ のとき 0 に近づく。これは当然そうあるべきである。
- **数値。** $p=0.4$ のとき、小問 (i) の答えは $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$、小問 (ii) の答えは ≈ 0.2713 である。200 000 回のゲームのコンピュータシミュレーションでは 0.336 と 0.271 が得られた。$p=0.55$、$a=4$、$b=2$ のとき公式は 0.2450 を与え、これもシミュレーションと一致した。

よくある間違い

- 面が変わった時点で、それまでの連はまったく意味をもたなくなることを忘れる。まさにこのことがあるからこそ、面が変わった後の状況は「その面が 1 回目」の状況と同じになるのである。
- (ii) で HHT の場合を見落とす。連は 2 回目の投げで途切れることも、3 回目の投げで途切れることもある。
- 「A が勝つ確率」の最終的な答えとして α を答えてしまう。さらに 1 回目の投げについて平均をとり、$p\alpha+q\beta$ を求める必要がある。

STEP のその先へ

これは吸収マルコフ連鎖（absorbing Markov chain）の第一段階解析（first-step analysis）である。状態は「現在の面と連の長さ」であり、吸収確率（absorption probability）は次の一歩で条件付けることによって得られる一次方程式を満たす。同じ手法を使え

ば、コイン投げにおいてあるパターンが現れるまでの期待待ち時間（expected waiting time）も求められ、さらにペニーのゲーム（Penney's game）へとつながる。このゲームでは、パターンの順序によって驚くべき非推移的（non-transitive）な結果が生じる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ（Markov）連鎖と吸収をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP II 2020、第 12 問

確率・統計 ・ 偏りのあるさいころと不等式

> **STEP II 2020、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

確率（probability）の総和は 1 でなければならないから、偏り（bias）は $\sum \varepsilon_i = 0$ を満たす。これを書き出してしまえば、$\sum(\frac{1}{n} + \varepsilon_i)^2$ を展開したときに 1 次の項はすべて消え、明らかに非負であるものが残る。小問 (ii) は姿を変えた小問 (i) にすぎない。正の数をその総和で割ると、それらはあるさいころの各目の確率になるのである。

解答

$p_i = \mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{n} + \varepsilon_i$ とおく。$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ であるから、

$$1 = n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0.$$

また、各 $p_i \geq 0$ であるから、すべての i について $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$ である。以下の和はすべて $i = 1, \ldots, n$ にわたってとる。

小問 (i)

2 回の試行は独立（independent）であるから、2 回とも i が出る確率は p_i^2 であり、異なる i に対するこれらの事象は互いに排反（disjoint）である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{同じ目が 2 回続けて出る}) = \sum p_i^2 &= \sum \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2\varepsilon_i}{n} + \varepsilon_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum \varepsilon_i + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.\end{aligned}$$

公平なさいころ（fair die）ではすべての $\varepsilon_i = 0$ であり、確率は $\frac{1}{n}$ となる。偏ったさいころ（biased die）では ε_i のすべてが 0 というわけではないから、$\sum \varepsilon_i^2 > 0$ である。よって、偏ったさいころは公平なさいころよりも、2 回続けて同じ目が出る確率が**大きい**。

小問 (ii)

まず二重和を書き直す。これは $j < i$ を満たすすべての組について $x_i x_j$ を足し合わせたもの、すなわち相異なる添字の順序のない組それぞれについてちょうど 1 回ずつ足したものである。$S = \sum x_i$ を 2 乗すると、各 x_i^2 が 1 回ずつ、そのような組がそれぞれ 2 回ずつ現れるから、

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right).$$

考えてみよう x_i が単なる任意の正の数であるとき、さいころはどこから出てくるのだろうか。

$p_i = x_i / S$ とおく。これらは正で総和が 1 であるから、ある n 面さいころの各目の確率である。小問 (i) より、$\sum p_i^2 = \frac{1}{n} + \sum \varepsilon_i^2 \geq \frac{1}{n}$ である（等号が成り立つのはさいころが公平なとき、すなわちすべての x_i が等しいときに限る）。$S^2 > 0$ を掛けて、

$$\sum x_i^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

したがって

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{S^2}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

となり、これが求める不等式である。等号はすべての x_i が等しいときに成り立つ。

小問 (iii)

今度は確率は $\sum p_i^3$ である。展開して、再び $\sum \varepsilon_i = 0$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sum p_i^3 &= \sum \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3\varepsilon_i}{n^2} + \frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) = \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right).\end{aligned}$$

公平なさいころでは、これは $\frac{1}{n^2}$ である。

考えてみよう 3 乗の項 ε_i^3 は負になりうる。これが 2 乗の項を上回ることはありうるだろうか。

ありえない。偏りは大きく負になることはできないからである。$p_i \geq 0$ より $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$ であるから、

$$\frac{3}{n} + \varepsilon_i \geq \frac{2}{n} > 0.$$

よって各項 $\varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right)$ は ≥ 0 であり、$\varepsilon_i \neq 0$ のときは常に正である。偏ったさいころでは、少なくとも 1 つの i についてそうなる。ゆえに

$$\sum p_i^3 > \frac{1}{n^2},$$

となり、偏ったさいころはやはり公平なさいころよりも、3 回続けて同じ目が出る確率が大きい。

検算

- $n = 4$ とし、確率を $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ とすると、$\varepsilon = \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}$ である。直接計算すると $\sum p_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} = \frac{1}{3}$ であり、$\frac{1}{4} + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{144} = \frac{1}{3}$ となって、公平な場合の $\frac{1}{4}$ を上回る。3 回の場合は $\sum p_i^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{216} = \frac{5}{36} \approx 0.139$ であり、公平な場合の $\frac{1}{16} = 0.0625$ を大きく上回る。
- 最も極端なさいころは常に 1 の目が出るものである。このとき両方の確率は 1 となり、とりうる最大の値である。
- 小問 (ii) で $n = 2$ とすると、不等式は $x_1 x_2 \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2$ となり、これは相加相乗平均の不等式（AM–GM）である。小問 (i)、(ii)、(iii) の不等式は、何千ものランダムな場合についてコンピュータでも確かめた。

よくある間違い

- $\sum \varepsilon_i = 0$ を忘れ、符号のわからない 1 次の項が残ってしまう。
- 小問 (iii) で、$\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$ を用いずに $\sum \varepsilon_i^3$ を「小さい」とか、どちらの符号もとりうるなどと述べてしまう。この評価こそが議論を成り立たせるものである。
- 小問 (ii) で、小問 (i) を $x_i / \sum x_j$ ではなく x_i そのものに適用してしまう。x_i の総和は 1 になるとは限らない。

STEP のその先へ

量 $\sum p_i^2$ は分布の**衝突確率**（collision probability）であり、小問 (i) はそれが一様分布（uniform distribution）のときに最小になることを述べている。小問 (iii) は $\sum p_i^3$ についての同じ主張である。どちらも $t \mapsto t^k$ の凸性（convexity）（イェンセン（Jensen）の不等式）、あるいは冪平均不等式（power-mean inequality）の特別な場合であり、$\sum p_i^k$ の対数をとると、情報理論（information theory）や暗号理論（cryptography）で用いられるレニー（Rényi）エントロピーが得られる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらの考え方に確率論の文脈で出会うのによい本である。

解答例

STEP III 2020、第 1 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

STEP III 2020、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は漸化式（reduction formula）を導く問題なので、まず部分積分（integration by parts）を用いるのが自然である。すなわち、$\cos x$ のべきを微分し、$\cos bx$ を積分する。すると積 $\sin x \sin bx$ が残るが、$\cos(b-1)x$ に対する加法定理（compound-angle formula）を使えば、これを元と同じ型の積分に戻すことができる。小問 (ii) では新しい道具は何も要らない。漸化式は a と b をともに 1 ずつ下げるので、差 $b-a=2m+1$ は一定に保たれ、n から $n+1$ へときれいに進むことができる。

解答

小問 (i)

$a, b \geq 1$ とする。$u = \cos^a x$、$\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行う。このとき $\mathrm{d}u = -a\cos^{a-1} x \sin x\,\mathrm{d}x$、$v = \frac{1}{b}\sin bx$ である（$b \neq 0$ なので問題ない）：

$$\mathrm{I}(a,b) = \left[\frac{\cos^a x\,\sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2} + \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x\,\sin x\,\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

境界項は両端で 0 となる。$x = \frac{\pi}{2}$ では $\cos^a \frac{\pi}{2} = 0$ であるから（ここで $a \geq 1$ を用いる）、$x = 0$ では $\sin 0 = 0$ であるからである。

考えてみよう $\sin x \sin bx$ を x の倍数の余弦に戻すにはどうすればよいか？

$\mathrm{I}(a-1, b-1)$ を登場させたいので、$\cos(b-1)x$ に注目する：

$$\cos(b-1)x = \cos bx \cos x + \sin bx \sin x \quad \Longrightarrow \quad \sin x \sin bx = \cos(b-1)x - \cos x \cos bx.$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1}x\,\cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^a x\,\cos bx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

両辺に b を掛けて $\mathrm{I}(a,b)$ の項をまとめると $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$ を得る。$a+b>0$ であるから、

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

左辺の積分は $\mathrm{I}(n,\,n+2m+1)$ である。右辺を

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

とおく。任意の非負整数 m を固定し、n に関する数学的帰納法（induction）によって、すべての $n\geq 0$ に対して $\mathrm{I}(n,n+2m+1) = R(n,m)$ が成り立つことを証明する。

基底段階、$n=0$ の場合。

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

なぜなら $\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos m\pi = (-1)^m$ だからである。一方、

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot(2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

よって $n=0$ のとき結果は成り立つ。

帰納段階。ある $k\geq 0$ に対して $\mathrm{I}(k,k+2m+1) = R(k,m)$ が成り立つと仮定する。小問 (i) を $a=k+1$、$b=k+2m+2$（いずれも正の整数）として適用する。このとき $a-1=k$、$b-1=k+2m+1$、$a+b=2k+2m+3$ であるから、

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\,k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

$k+2m+2 = (k+1)+2m+1$ であるから、左辺は同じ m に対する $n=k+1$ の場合の積分そのものであることに注意する。

? **考えてみよう** 公式によれば、$R(k+1,m)/R(k,m)$ はいくつになるはずか？

R において $n=k$ から $n=k+1$ に移るとき、因子 $(-1)^m(2m)!/m!$ は変わらず、

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

となる。ここで $2k+2m+2=2(k+m+1)$ を用いた。したがって

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m) = R(k+1,m),$$

であり、これは $n=k+1$ の場合の主張である。

結果は $n=0$ で成り立ち、$n=k$ で成り立つならば $n=k+1$ でも成り立つから、数学的帰納法により、すべての非負整数 n に対して成り立つ。m は任意であったから、すべての非負整数 m に対しても成り立つ：

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

検算

- $n=1$、$m=0$ とすると、公式は $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!}=\frac{1}{3}$ を与える。直接計算すると、$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$ を $[0,\frac{\pi}{2}]$ で積分して $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}$ となる。
- $n=1$、$m=1$ とすると、公式は $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!}=-\frac{1}{15}$ を与え、$\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$ の数値計算は -0.066667 を与える。
- (i) の漸化式と (ii) の閉じた形は、$n\le 6$、$m\le 5$ のすべての場合についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 境界項が 0 になる理由を述べ忘れる。上端では $a\ge 1$ が必要である。
- n について帰納法を行いながら m を変化させてしまう。小問 (i) は a と b を同時に下げるので、m は固定されたままである。
- $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ の符号を誤る。これは $1,-1,1,\ldots$ と交互に変わり、$(-1)^m$ を与える。

STEP のその先へ

このような漸化式は数列の漸化式の積分版であり、その閉じた形は、ウォリス（Wallis）の積やベータ関数（Beta function）$\int_0^{\pi/2} \cos^p x \sin^q x \, \mathrm{d}x$ と同じように階乗の比から組み立てられている。これらは大学の解析学や数理手法の講義の早い段階で出会うものである。同じ趣旨の問題をさらに解きたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2020、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線関数のグラフ

STEP III 2020、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を行い、$\cosh^2 = 1 + \sinh^2$ を繰り返し用いてすべてを sinh に戻す。すると第 2 次導関数に関する条件が因数分解され、その因数の一つは曲線自身の方程式になる。直線 $x + y = a$ については、$y = a - x$ を代入してすべてを指数関数で表す。実数の交点が存在するためには判別式（discriminant）が非負でなければならず、そこから $\cosh a$ に対する評価が得られる。

解答

小問 (i)

sinh は $\mathbb{R}$ の全単射（bijection）であるから、各 x に対して $\sinh y = 2k - \sinh x$ を満たす y がちょうど一つ存在する。よって C はすべての実数 x で定義された関数 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$ のグラフであり、陰関数微分を行ってよい。

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

$\cosh x \geq 1$ であるから、傾きは決して 0 にならない（常に負である）。したがって C は停留点（stationary point）をもたない。

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ と書いて、もう一度微分すると

$$\sinh x + \sinh y \, (y')^2 + \cosh y \, y'' = 0.$$

$y' = -\cosh x / \cosh y$ を代入し、全体に $\cosh^2 y$ を掛けると

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\left(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\right)\\ &= -\left(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\right)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

C 上では第 1 の因数は $2k$ に等しいから

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

$k > 0$ かつ $\cosh y > 0$ であるから、$y'' = 0$ となるのは $1 + \sinh x \sinh y = 0$ のとき、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。

考えてみよう　$y'' = 0$ だけで変曲点であるといえるだろうか？

いえない。y'' の符号が変わることも必要である。$s = \sinh x$、$t = \sinh y$ とおく。$y'' = 0$ となる点では $s + t = 2k$ かつ $st = -1$ であるから、s と t は $u^2 - 2ku - 1 = 0$ の解である：

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

一方の解は正、他方は負であり、s はどちらの値もとることができ、t はもう一方の値となる。曲線に沿って、$1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$ は相異なる二つの単解をもつ s の 2 次式であるから、それぞれの解で符号が変わる。$s = \sinh x$ は x について増加であるから、y'' は確かに両方の点で符号を変える。したがって変曲点（point of inflection）は

$$\left(\operatorname{arsinh}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right),\ \operatorname{arsinh}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)\right)\quad \text{および}$$
$$\left(\operatorname{arsinh}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right),\ \operatorname{arsinh}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)\right).$$

である。これらは直線 $y = x$ に関して互いに対称である。C の方程式は x と y について対称であるから、これは予想どおりである。

小問 (ii)

直線上では $y = a - x$ である。$2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$ と書くと、C の方程式を 2 倍したものは

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

となる。e^x を掛けると $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$、すなわち

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0,$$

を得る。これが求める方程式である。

考えてみよう そのような点が存在することから、この方程式について何がわかるだろうか？

これは（最高次の係数が 0 でなければ）$X = \mathrm{e}^x$ についての 2 次方程式であり、実数解をもたなければならない。

まず $a \neq 0$ である。実際、$a = 0$ ならば方程式は $-4k\mathrm{e}^x = 0$ に帰着するが、$k > 0$ であるからこれは不可能である。よって $\cosh a > 1$ である。

$a \neq 0$ のとき最高次の係数 $1 - \mathrm{e}^{-a}$ は 0 でないから、この 2 次方程式が実数解をもつのは判別式が非負のときに限る：

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

ここで $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$ であるから、条件は $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$、すなわち $\cosh a \leq 2k^2 + 1$ である。以上をまとめて

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

よって C 上のすべての点で $x + y$ は $-2\operatorname{arsinh} k$ と $2\operatorname{arsinh} k$ の間にあり（$\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$ だからである）、かつ $x + y \neq 0$ である。

実は C 上では $x + y > 0$ である。$a < 0$ ならば $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$ かつ $\mathrm{e}^a - 1 < 0$ であるから、2 次方程式の三つの係数はすべて負となり、正の解 X をもたない。（同値な見方として、$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$ であり、これは $x + y$ と同じ符号をもつ。）最大値 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ は $x = y = \operatorname{arsinh} k$ でとられ、そこでは判別式が 0 となり、直線はちょうど C に接する。

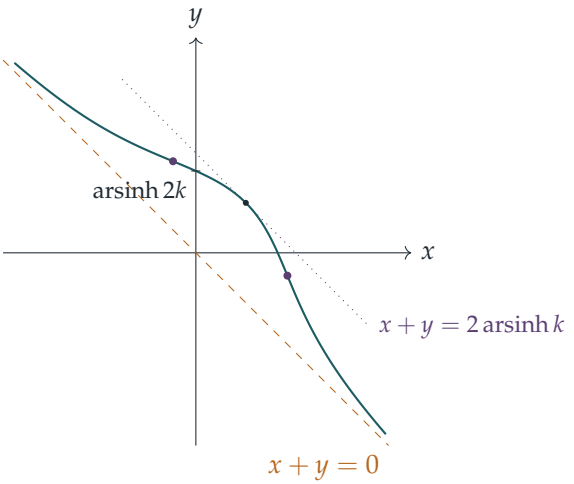
小問 (iii)

これまでにわかったことをまとめる：

- C は直線 $y = x$ に関して対称であり、この直線とは $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$ でのみ交わる。その点での傾きは -1 である。
- y はすべての x に対して定義され、傾きは常に負である。曲線は座標軸と $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$ および $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$ で交わる。
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$ であるから、C は直線 $x + y = 0$ より上側、かつ直線 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 上またはその下側の帯状領域にある。後者の直線は $y = x$ 上の点で C に接する。

- $x \to +\infty$ のとき $\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$ であり、$\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^{x} - 4k$ となるから、$x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^{+}$ である。対称性により、$x \to -\infty$ のときも同様である。よって $x + y = 0$ は両端での漸近線（asymptote）であり、曲線は上側から近づく。
- y'' の式から、曲線は二つの変曲点の間、すなわち $1 + \sinh x \sinh y > 0$ となるところ（たとえば $y = x$ 上の点）で凹（concave、接線より下側にある）であり、その外側では凸（convex）である。

図は $k = 1$ の場合で、変曲点を印で示してある。



検算

- $k = 1$ のとき、変曲点は $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$ とその鏡像である。$y = \operatorname{arsinh}(2 - \sinh x)$ の二階差分をこれらの点の両側で調べると、そこで y'' の符号が変わることが確かめられ、$-8 \le x \le 8$ の範囲を走査しても y'' の零点は他に見つからない。
- 式 $y'' = -2k(1 + \sinh x \sinh y)/\cosh^{3} y$ は、多数の無作為な点といくつかの k の値について、数値的に求めた第 2 次導関数と一致する。
- $k = 1$、$x = 6$ のとき $x + y \approx 0.00996$ であり、予測値 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$ に近い。主張どおり、漸近線には上側から近づく。
- $x = y = \operatorname{arsinh} k$ では $\cosh(x + y) = 1 + 2\sinh^{2} x = 1 + 2k^{2}$ であり、(ii) の上界が達成される。

よくある間違い

- $y'' = 0$ で止めてしまい、y'' の符号が変わることを確かめない。この問題では実際に符号が変わるが、それを述べる必要がある。
- $a = 0$ を除外し忘れる。これこそが左側の不等式を厳密な不等号にしている理由である。
- 変曲点を一つしか書かない。$u^2 - 2ku - 1 = 0$ のどちらの解も $\sinh x$ になりうるので、$y = x$ に関して対称な二つの点が得られる。

STEP のその先へ

回転した座標 $u = x + y$、$v = x - y$ を用いると、この曲線の姿は明快になる。恒等式 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$ により C は $\sinh\frac{u}{2} = k\,\mathrm{sech}\frac{v}{2}$ となり、漸近線 $u = 0$ の上にある一つの山となる。対称性に適合した座標を選ぶことは、大学1年の微積分と線形代数を通じて繰り返し現れる主題である（二次形式（quadratic form）の対角化も同じ考え方である）。陰関数で表される曲線、そして方程式 $F(x, y) = 0$ が本当に y を x の滑らかな関数として定めるのはどのようなときかという問題は、陰関数定理（implicit function theorem）の主題である。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、その背後にある1変数の解析を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2020、第 3 問

純粋数学 ・ 図形における複素数

STEP III 2020、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

複素平面（complex plane）において、点 a のまわりの角 θ の回転（rotation）は単に $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であるから、G_{AB} は a と b の具体的な一次結合（linear combination）として表される。小問 (i) でこの式が得られれば、幾何は代数に変わる。平行四辺形（parallelogram）であることは頂点に関する一次の条件であり、正三角形（equilateral triangle）であることは、ある辺が別の辺を一定の角だけ回転させたものになっているということである。問題全体は ω のべきに関するいくつかの事実の上に成り立っている。

解答

以下を通して $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ とする。したがって $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ であり、さらに

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

とおく。用いる事実は次の三つである。

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

小問 (i)

時計回り（clockwise）に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転することは、ρ を掛けることである。A のまわりに回転するとは、変位 $b-a$ を回転させてから a に加え戻すことであるから、

$$k = a + (b-a)\rho.$$

したがって、ABK の重心（centroid）は

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}\big[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b\big].$$

である。ここで二つの係数を整理する。

$$2-\rho = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega^*.$$

よって

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}\big(\sqrt{3}\,\omega a + \sqrt{3}\,\omega^* b\big) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\omega a + \omega^* b\big),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

四角形 $PQRS$（頂点はこの順）が平行四辺形であるのは、ちょうど $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$、すなわち $q-p = r-s$ のとき、言い換えれば

$$p - q + r - s = 0.$$

のときである。（これは対角線 PR と QS の中点が一致すると言うのと同じである。）したがって、Q_1 が平行四辺形であるための必要十分条件は $a-b+c-d=0$ であり、Q_2 が平行四辺形であるための必要十分条件は

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = 0.$$

である。四つの点それぞれに小問 (i) を用いると、

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da}\right) &= (\omega a + \omega^* b) - (\omega b + \omega^* c) + (\omega c + \omega^* d) - (\omega d + \omega^* a)\\ &= (\omega - \omega^*)a - (\omega - \omega^*)b + (\omega - \omega^*)c - (\omega - \omega^*)d\\ &= \mathrm{i}\,(a - b + c - d).\end{aligned}$$

ゆえに

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a-b+c-d),$$

であり、$\mathrm{i}/\sqrt{3} \neq 0$ であるから、一方の辺が 0 になるのは他方の辺が 0 になるとき、かつそのときに限る。したがって、Q_1 が平行四辺形であることと Q_2 が平行四辺形であることは同値である。

考えてみよう Q_2 が平行四辺形の条件を満たしながら、二つの頂点が一致してつぶれてしまうことはありうるだろうか？

ある特別な場合にはありうる。ABC が時計回りに名前をつけた正三角形であるとき、B を A のまわりに時計回りに回転させると C に重なるので、G_{AB} と G_{BC} はともに ABC の重心になる。ひし形（rhombus）$ABCD$ を完成させると、Q_2 はつぶれて線分になる。この場合にも条件 $p-q+r-s=0$ は成り立つので、この同値性は実際にはこのベクトルの条件についての主張であり、このような問題で「平行四辺形」が意味するのはまさにこの条件である。

小問 (iii)

T_2 のある辺がベクトルとして、別の辺を一定の角だけ回転させたものであることを示す。小問 (i) より

$$\sqrt{3}\,(g_{bc}-g_{ab}) = (\omega b+\omega^* c)-(\omega a+\omega^* b) = -\omega a+\mathrm{i}\,b+\omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca}-g_{bc}) = (\omega c+\omega^* a)-(\omega b+\omega^* c) = \omega^* a-\omega b+\mathrm{i}\,c,$$

である。ここで各行で $\omega-\omega^*=\mathrm{i}$ を用いた。

> **考えてみよう** どのような数 λ を掛ければ、二つ目の括弧が一つ目の括弧になるだろうか？

a の係数を比べると $\lambda\omega^* = -\omega$ でなければならないから、$\lambda = -\omega/\omega^* = -\omega^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$ である。この同じ λ は b と c についてもうまくいく。

$$\lambda\cdot(-\omega) = \omega^3 = \mathrm{i},$$
$$\lambda\cdot\mathrm{i} = -\omega^2\cdot\omega^3 = -\omega^5 = -\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \omega^*.$$

よって、すべての a, b, c に対して

$$g_{bc}-g_{ab} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca}-g_{bc}).$$

が成り立つ。$\left|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\right| = 1$ であるから、絶対値（modulus）をとると $G_{AB}G_{BC} = G_{BC}G_{CA}$ となる。また、T_2 に沿って進む向きは G_{BC} で $\frac{2}{3}\pi$ だけ曲がるので、T_2 の G_{BC} における内角は $\pi-\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ である。等しい二辺が角 $\frac{1}{3}\pi$ をはさむ三角形は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、底角は $\frac{1}{2}(\pi-\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$ であるから、すべての角が $\frac{1}{3}\pi$ となり、T_2 は正三角形である。

唯一の例外は $g_{ca} = g_{bc}$ の場合であり、このときは上の関係式から $g_{ab} = g_{bc}$ も成り立つので、T_2 は一点に縮んでしまう。$\omega^* a-\omega b+\mathrm{i}c = 0$ に ω を掛けると $a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c = 0$ となり、これが起こるのはちょうど ABC 自身が時計回りに名前をつけた正三角形であるとき（小問 (ii) の注意で述べた場合）である。それ以外のすべての三角形 T_1 は、退化した（degenerate）ものも含めて、本当の正三角形 T_2 を与える。

検算

- $a = 0, b = 1$ とする。このとき $k = \rho$ であり、$0, 1, \rho$ の重心は $\frac{1}{3}(1+\rho) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$ である。公式からは $\omega^* / \sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$ が得られ、同じ数になる。
- $a = 0, b = 1, c = \mathrm{i}$（直角三角形）とすると、$T_2$ の三点の互いの距離はすべて約 1.1154 になる。10^4 個のランダムな三角形と四角形についてコンピュータで確かめたところ、小問 (ii) と (iii) の恒等式が丸め誤差の範囲で成り立つことが確認された。

よくある間違い

- b を A のまわりではなく原点のまわりに回転させて、$k = b\rho$ と書いてしまう。
- 時計回りの回転に $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi/3}$ を用いてしまう。時計回りは負の向きである。
- 小問 (ii) で一方向だけを証明してしまう。「必要十分」であることを保証するのは、係数 $\mathrm{i}/\sqrt{3}$ が 0 でないという事実である。

STEP のその先へ

小問 (iii) はナポレオン（Napoleon）の定理である。任意の三角形の各辺の上に正三角形を立てる（ここでは ABC を反時計回りに名前をつけたときに外側に立てる）と、それらの重心は正三角形をなす。複素数による証明がうまくいくのは、回転も重心もどちらも平面の線形写像（linear map）だからである。これが幾何学における変換群（transformation group）の研究の出発点となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の掛け算をこのように幾何的に見る見方を見事に扱っている。

解答例

STEP III 2020、第 4 問

純粋数学 ・ 鏡映と回転の行列

STEP III 2020、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の結果こそが、形を変えたこの問題全体である。$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ を引くと点は平面までまっすぐ下ろされるので、その 2 倍を引けば、点は平面の反対側へ同じ距離だけ運ばれる。これが鏡映（reflection）である。鏡映を $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ と書いてしまえば、その行列（matrix）、$\mathbf{n}$ を軸とする半回転（half-turn）、そしてそれらの積は、ほとんど計算せずに求められる。

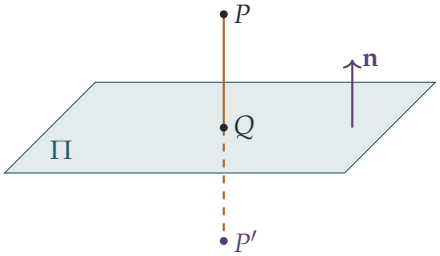
解答

冒頭の結果

$\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ とおく。$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ であるから

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

となり、Q は Π 上にある。また $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ であり、これは法線ベクトル（normal）$\mathbf{n}$ のスカラー倍である。P は Π 上にない（したがって $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$）ので、これは零ベクトルではない。よって PQ は Π に垂直であり、示すべきことが示された。



この図は、これから向かう先も示している。Π に関する P の鏡像 P' は、P が Q の上にあるのと同じ距離だけ Q の向こう側にあるので、その位置ベクトル（position vector）は

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

である（P が Π 上にあるとき、この式は P 自身を与えるが、これもまた正しい）。

小問 (i)

$\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$ とする。$a^2+b^2+c^2 = 1$ であるから、これは単位法線ベクトル（unit normal）である。$\mathbf{i}$ については $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$ であるから

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

となる。ここで第 1 成分には $1 = a^2+b^2+c^2$ を用いた。これが求める像である。同様に、$\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$、$\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$ を用いて

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

を得る。$\mathbf{M}$ の各列は $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ の像であるから

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\-2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\-2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

である。

小問 (ii)

与えられた行列を $\mathbf{M}$ と照らし合わせる。対角成分をそれぞれ $1-2a^2$、$1-2b^2$、$1-2c^2$ と書くと

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

となる。よって $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$、$|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$、$|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$ である。

考えてみよう 対角成分からわかるのは a^2, b^2, c^2 だけである。符号はどのように決めればよいか。

非対角成分から積がわかる：

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

よって b と c は同符号であり、a はそれらと異符号である。(a,b,c) を $(-a,-b,-c)$ に置き換えても何も変わらない（同じ平面である）ので、$c>0$ としてよい。すると

$$(a,b,c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3,\,4,\,5).$$

を得る。これらの値から $ab = -\frac{12}{50}$、$ac = -\frac{15}{50}$、$bc = \frac{20}{50}$ となり、独立な 6 つの成分がすべて一致する。全体に $-5\sqrt{2}$ を掛けると、平面は

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

である。

小問 (iii)

任意のベクトルを $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \big(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\big)$ と、軸に沿う部分と軸に垂直な部分に分解する（冒頭の結果）。軸のまわりの角 π の回転（rotation）は第 1 の部分をそのまま残し、第 2 の部分の向きを反転させるので

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \big(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\big) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

となる。これはちょうど $-T(\mathbf{x})$ である。したがって $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$、すなわち

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2-a^2-c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

である。

小問 (iv)

> **考えてみよう** ここで a、b、c を成分とする 3×3 行列を 2 つ掛け合わせる必要があるだろうか。

その必要はない。(iii) より $\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$ である。同じ平面に関して 2 回鏡映すると、すべての点はもとの位置に戻るので、$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ である（代数的には、$\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$ であるから $(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$ となる）。よって

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

であり、これはすべての $\mathbf{x}$ を $-\mathbf{x}$ に移す。これは原点に関する対称移動であり、中心反転（central inversion）、あるいは原点を中心とする倍率 -1 の拡大（enlargement）とも呼ばれる。これが a、b、c にまったく依存しないことに注意しよう。

検算

- $\mathbf{M}$ の各列は単位ベクトル（unit vector）になるはずである。第 1 列については $(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2+4a^2c^2=(b^2+c^2+a^2)^2=1$ となる。
- (ii) では、法線ベクトル $(3,-4,-5)$ はその逆ベクトルに移されるはずである。与えられた行列はこれを $(1.92-1.92-3,\ 1.44-1.44+4,\ 1.8+3.2)=(-3,4,5)$ に移す。正しい。
- $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ とすると、$\mathbf{M}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$ は $z=0$ に関する鏡映、$\mathbf{N}=\mathrm{diag}(-1,-1,1)$ は z 軸のまわりの半回転となる。その積は明らかに $-\mathbf{I}$ である。
- 1000 個のランダムな単位ベクトル $\mathbf{n}$ を用いたコンピュータによる検算で、$\mathbf{M}$ の式、$\mathbf{N}$ が $\mathbf{n}$ を固定し垂直なベクトルの向きを反転させること、そして $\mathbf{NM}=-\mathbf{I}$ が確かめられた。(ii) の行列も 10^{-15} 以内の誤差で再現された。

よくある間違い

- $\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ を鏡映として用いてしまう。これは垂線の足（foot of the perpendicular）であり、係数 2 が抜けている。
- (ii) で、a,b,c の符号を平方根からそれぞれ独立に選んでしまう。相対的な符号を決めるのは非対角成分だけである。
- $\mathbf{NM}$ を「単位行列」としてしまう。鏡映の行列式（determinant）は -1、回転の行列式は $+1$ であるから、積の行列式は -1 である。3 次元では $\det(-\mathbf{I})=-1$ であり、これと矛盾しない。

STEP のその先へ

行列 $\mathbf{I}-2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ は**ハウスホルダー**（*Householder*）**鏡映**（Householder reflection）と呼ばれる。数値線形代数（numerical linear algebra）では、行列を三角行列の形に変形するためにこれが絶えず用いられる。また、n 次元の任意の直交行列（orthogonal matrix）は、高々 n 個のこのような鏡映の積で表される。小問 (iv) はこの構造の小さな例である：$\mathbb{R}^3$ において、半回転と、その軸に垂直な平面に関する鏡映を合成すると $-\mathbf{I}$ が得られる。直交行列、射影（projection）、鏡映については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

解答例

STEP III 2020、第 5 問

純粋数学 • 部分分数分解

STEP III 2020、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の恒等式（identity）は、有限の等比級数（geometric series）の和の公式を姿を変えて表したものであり、これこそが $\left(1-(x/k)^n\right)/(x-k)$ を具体的な多項式（polynomial）に書き換える道具となる。これにより、面倒な係数比較（comparing coefficients）をすることなく、$1/\left(x^n(x-k)\right)$ の完全な部分分数分解（partial-fraction decomposition）が得られる。さらに微分することで、**重複する**因数（repeated factor）$(x-k)^2$ をもつ場合の分解が得られ、最後の積分はすべての項を直接積分できる特別な場合にすぎない。

解答

冒頭の恒等式

右辺を展開し、二つの和に分ける。

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= \left(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}\right) - \left(x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n\right) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

となる。なぜなら、x^n（一つ目の和の $r=1$ の項）と y^n（二つ目の和の $r=n$ の項）を除くすべての項は、各括弧の中に一度ずつ現れて打ち消し合うからである。

小問 (i)(a)

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$ の両辺に $x^n(x-k)$ を掛けると

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

を得る。これは多項式どうしの恒等式であり、$x \neq 0, k$ であるすべての x で成り立つから、すべての x で成り立つ（無限個の点で一致する二つの多項式は等しい）。$x = k$ を代入すると $1 = Ak^n$ となるので、$A = 1/k^n$ である（$k \neq 0$ だからこれは許される）。すると

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

が $x \neq k$ に対して成り立ち、示すべきことが得られた。

考えてみよう これを分母に $x-k$ を含まない形にするにはどうすればよいか。

冒頭の恒等式で x を 1 に、y を x/k に置き換えて用いる。

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

$x-k$ で割ると

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

（これにより、f が確かに多項式であることも確認できる。）ここで $s = n+1-r$ として添字を付け替える（re-index）。r が $1, \ldots, n$ を動くとき s も同じ範囲を動き、$r - 1 = n - s$ となるので、和は $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$ となる。したがって

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

小問 (i)(b)

$x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$ であるから、両辺を積の微分法（product rule）で微分すると

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

を得る。$-x^n$ で割ると（$x \neq 0$ なので問題ない）

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

となる。小問 (a) より

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

であり、小問 (a) の結果を項ごとに微分すると

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

となる。これらを足すと二つの和がまとまり

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

となって、求める結果が得られる。

小問 (ii)

小問 (b) で $n = 3$、$k = 1$ とする。和の $r = 3$ の項は消えて

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

となる。真ん中の項はもう一度分解する必要がある：$\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$。$[2, N]$ 上ではすべてが連続（continuous）で $x - 1 > 0$ であるから、そこでの原始関数（antiderivative）の一つは

$$G(x) = -\frac{1}{x-1} - 3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2},$$

であり、

$$\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = G(N) - G(2).$$

となる。

考えてみよう なぜ二つの対数をまとめたままにしておかなければならないのか。

別々に見ると、$-3\ln(N-1)$ と $+3\ln N$ はそれぞれ無限大に発散するので、項ごとに極限をとることはできない。まとめておけば、ln は 1 で連続なので、$N \to \infty$ のとき $\ln\big((N-1)/N\big) = \ln\big(1 - \frac{1}{N}\big) \to \ln 1 = 0$ となる。$G(N)$ の残りの三つの項は明らかに 0 に収束するので、$G(N) \to 0$ である。

最後に

$$G(2) = -1 - 3\ln\tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{8} = 3\ln 2 - \tfrac{17}{8},$$

であるから

$$\lim_{N\to\infty}\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{8} - 3\ln 2.$$

を得る。

検算

- 被積分関数（integrand）は正であるから、答えは正でなければならない。実際 $\frac{17}{8} - 3\ln 2 \approx 2.1250 - 2.0794 = 0.0456$ である。
- 答えは小さくもなければならない。被積分関数は $x = 2$ で $\frac{1}{8}$ であり、おおよそ x^{-5} のように減少する。大まかに $\frac{1}{8}(2/x)^5$ で上から抑えると、高々 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$ となる。数値積分を行うと、値 $0.045558\ldots$ が小数点以下多くの桁まで確認できる。
- 小問 (b) で $n = 1$ としてみる。和は消え（その唯一の項は $n - r = 0$ をもつ）、右辺は $\dfrac{1}{k(x-k)^2} - \dfrac{1}{xk(x-k)} = \dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2} = \dfrac{1}{x(x-k)^2}$ となり、確かにあるべき形になっている。

よくある間違い

- $1 - x/k$ を $-(x-k)/k$ と書き直すときに符号を誤る。
- 小問 (a) で和の添字の付け替えを忘れ、k と x の指数が目標の式と合わなくなる。
- $\ln\big((x-1)/x\big)$ を二つの対数に分けてしまい、積分が発散（diverge）すると主張したり、「$\infty - \infty = 0$」と書いたりする。

STEP のその先へ

ここで組み立てたのは、x^n と $(x-k)^m$ の形の因数に対する一般的な部分分数分解である。x について（あるいは根 k について）微分することは、重複因数の項を生み出す標準的な方法である。小問 (ii) のように無限区間での積分が収束するかどうかを判定することは、大学最初の解析学（analysis）の講義で扱う広義積分（improper integral）の主題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、こうした極限を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2020、第 6 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と面積

STEP III 2020、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

3 つの小問はすべて同じ関数 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$ の上に組み立てられている。C_2 の方程式は r についての 2 次方程式であり、その 2 つの解は $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$ である。したがって C_2 は、C_1（大きい方の解）ともう 1 つの内側の分枝（branch）（小さい方の解）を合わせたものであり、2 つの分枝は判別式（discriminant）$\cos 2\theta$ が 0 になるところで出会う。これがわかれば、$r_+^2 - r_-^2$ が因数分解（factorise）できるので、分枝の間の面積は 1 つの積分にまとまる。

解答

小問 (i)

$y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$ とおく。これが実数となるのは $\cos 2x \geq 0$ のときであり、与えられた区間ではちょうど $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 全体である。この関数は偶関数（even function）なので、グラフは y 軸に関して対称である。

値。 $x = 0$ のとき $y = 2$ である。$x = \pm\frac{1}{4}\pi$ のとき $\cos 2x = 0$ であり、$y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

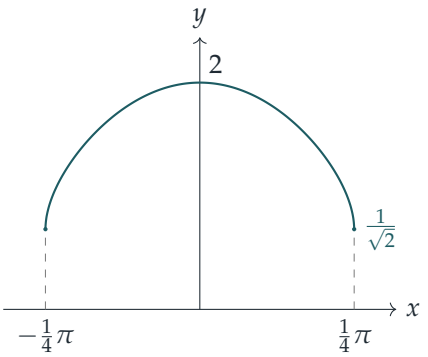
傾き。 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

である。この範囲では両方の項が負だからである。よって x が 0 から $\frac{1}{4}\pi$ まで動くとき、y は 2 から $\frac{1}{\sqrt{2}}$ まで減少し、最大値は $(0, 2)$ でとる。$x \to \frac{1}{4}\pi^-$ のとき、$\sin 2x \to 1$ である一方 $\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$ となるので、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$ である。つまり曲線は端点で鉛

直な接線（tangent）をもつ。

$x = 0$ の近く。$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ と $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$ を用いると $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$ が得られ、なめらかな極大となる。



小問 (ii)

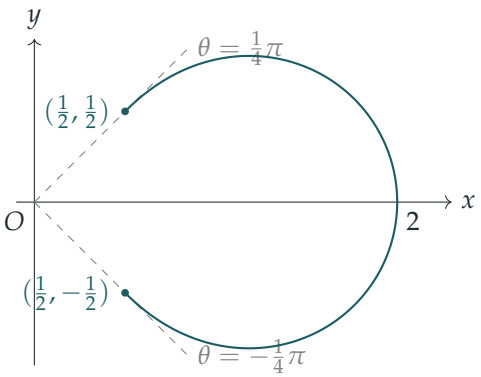
今度は同じ関数が、方向 θ における原点からの距離 r を与える。C_1 の端点は $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ にあり、これは直交座標では点 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ である。$\theta = 0$ のとき曲線は $(2, 0)$ にあり、これが O から最も遠い点である。r は θ について偶関数なので、C_1 は始線（initial line）に関して対称である。

考えてみよう 極座標（polar coordinates）で表された曲線において、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ が無限大になるとはどういう意味か。

小問 (i) より、$\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$ のとき $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$ である。その端の近くでは、θ はほとんど変わらないのに r は大きく変化するので、曲線は動径方向の直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$（直線 $y = x$）に沿って動いている。r は減少しているので、曲線は $y = x$ に沿って原点に向かって進みながら $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に到達する。特に、高さ $y = r\sin\theta$ は端点より手前で最大値をとらなければならない。実際

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

は $\theta = 0$ の近くでは正であり、$\theta \to \frac{1}{4}\pi$ のとき $-\infty$ に発散する。（最大の高さはおよそ 0.81 で、$\theta \approx 34°$ のときである。）よって C_1 は $(2, 0)$ を通るアーチ状の曲線であり、$y = \frac{1}{2}$ より上に膨らんでから $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ まで下りてきて、そこで直線 $y = x$ に接する。軸の下側にはその鏡像がある。



小問 (iii)

2 つの分枝。方程式を r についての 2 次方程式とみなす：

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

$r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$ とおく。外側の分枝 r_+ はちょうど C_1 である。内側の分枝は $r_- \geq 0$ を満たす。なぜなら $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ であり、等号は $\sin\theta = 0$ のときに限り成り立つからである。よって r_- は正真正銘の極座標の曲線であり、原点に達するのは $\theta = 0$ のときだけである。

$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ において。ここでは $\cos 2\theta = 0$ なので、2 次方程式は重解をもつ：

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

両方の分枝が $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ を通る。

r が小さいとき。r が小さければ、r^2 は $2r\cos\theta$ に比べて無視でき、また $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$ が小さいので θ も小さくなければならない。すると $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$ であり、$\cos\theta \approx 1$、$\sin\theta \approx \theta$ を用いると

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

となり、求める結果が得られる。（同じことだが、$r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$ である。）

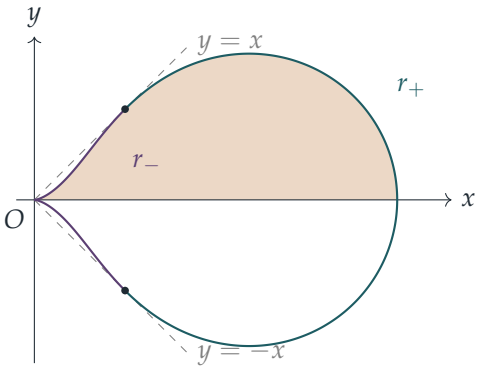
$r = 0$ の近くでのふるまい。ここでは $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$、$y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$ なので $y^2 \approx 2x^3$ である。したがって内側の分枝は、$x > 0$ の側から上下両方向に始線に接しながら原点に入り込み、O で左向きにとがった**尖点**（cusp）をつくる。

$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ の近くでのふるまい。方程式を陰関数微分（implicit differentiation）すると

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ において分子は0であり分母は0でないので、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$ である。また曲線全体で $\theta \le \frac{1}{4}\pi$ である。よって θ はそこで最大値をとり、曲線は動径方向の直線 $y = x$ に接する。外側の分枝は $y = x$ に沿って O に向かって入ってきて、内側の分枝は $y = x$ に沿って O から離れる向きに出ていき、2つは $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ でなめらかにつながる。角はできない。対称性により、$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ でも同じことが起こる。

以上より、C_2 は始線に関して対称な閉曲線であり、O の尖点を先端とする涙のしずくのような形をしている。その外側の縁は C_1 であり、内側の縁は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ から O の尖点へと下りていき、再び $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ へと出ていく。



（図の描画には $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$ を用いており、これにより $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$ となる。u を1周させると、無限大の傾きを生じることなく C_2 全体を描くことができる。）

面積。 $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ に対して、角 θ の半直線が C_2 の内部にあるのはちょうど $r_- \le r \le r_+$ のときである。よって網掛け部分の面積は2つの極座標の扇形（sector）の面積の差である：

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$ と置換（substitution）すると $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$ であり、θ が0から $\frac{1}{4}\pi$ まで動くとき u は0から $\frac{1}{2}\pi$ まで動く：

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

これが求める結果である。（同じことだが、置換 $s = \sqrt{2}\sin\theta$ により積分は $\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$ となり、これは単位円板の4分の1の面積の $\sqrt{2}$ 倍である。）

検算

- $\theta = 0$ のとき $r_{\pm} = 1 \pm 1$ であり、点 $(2,0)$ と O が得られる。これは概形と矛盾しない。
- $\theta = 0.01$ のとき $r_{-} = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002 \times 10^{-5}$ であり、$\frac{1}{2}\theta^2 = 5 \times 10^{-5}$ とよく一致する。
- 数値的には $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$ であり、$\frac{1}{2}(r_{+}^2 - r_{-}^2)$ を $[0, \frac{1}{4}\pi]$ で直接数値積分すると、小数第 6 位まで同じ値が得られる。
- 大まかな評価：C_2 の上半分は面積およそ 1.62 の長方形 $[0,2] \times [0,0.81]$ の内部にあり、頂点が $(\frac{1}{2},0)$、$(2,0)$、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である面積 0.375 の三角形を含む。値 1.11 はこれらの間に妥当に収まっている。

よくある間違い

- C_1 を $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ で角があるように、あるいは $y = x$ を横切るように描いてしまう：$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ が無限大であることは、曲線がそこで動径方向の直線に接することを意味する。
- O の部分を尖点ではなく、なめらかに丸い端として描いてしまう：$y^2 \approx 2x^3$ は典型的な尖点の形である。
- $\int \frac{1}{2}r_{+}^2 \,\mathrm{d}\theta$ だけを計算してしまう：これは C_1 までの面積であり、内側の分枝の内側にある空洞の部分まで含んでしまう。

STEP のその先へ

原点の近くの曲線 $y^2 = 2x^3$ は半 3 次放物線（semicubical parabola）であり、尖点の標準的な例である。尖点は、なめらかなパラメータ表示においてある瞬間に速度が 0 になるときに必ず現れる。ここでは $(x,y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$ の導関数が $\theta = 0$ で 0 になっている。代数曲線のこのような特異点を分類することは、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。極座標の曲線とその面積は、囲まれた面積をその境界を一周する線積分として表すグリーンの定理（Green's theorem）へも自然につながっていく。このような曲線を幾何学的な視点から眺めるには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的にとらえる複素解析）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 2020、第 7 問

純粋数学 • 2 階微分方程式

STEP III 2020、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は、二階線形微分方程式（second-order linear equation）が二つの一階線形微分方程式に**因数分解**（factorise）できる場合があることを示している。それぞれの一階方程式は積分因子（integrating factor）を用いて解くことができる。小問 (ii) で行うべきことは、その因数分解を見つけることである。係数を比較する（matching coefficients）と g についての非線形（non-linear）な一階方程式が得られ、冪関数の形（power-law）を仮定するとこれが解ける。その後は、初期条件（initial conditions）を用いながら二つの一階方程式を順に解けばよい。

解答

小問 (i)

二つ目の方程式から、u を y で表すことができる。

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

$\mathrm{g}(x)y$ に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

これら二つを $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$ に代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

となり、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の項と y の項をそれぞれまとめると、ちょうど方程式 (1) が得られる。

小問 (ii)

g の方程式。 (2) を (1) と比較すると、次が必要である。

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

一つ目から $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$ が得られる。これを二つ目に代入して f を消去すると、

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-\big(\mathrm{g}(x)\big)^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

これが求める g についての一階方程式である。

冪関数の解。 $\mathrm{g}(x)=kx^n$ とおくと、左辺は

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

考えてみよう k がわかる前に、n をどのように選べばよいだろうか？

x の冪に注目する。右辺には x^{-1} と x^{-2} しか現れないので、x^n、x^{n-1}、x^{2n} はこれらだけを生じなければならない。$n=-1$ とすればそうなる。実際、$x^n=x^{-1}$ であり、x^{n-1} と x^{2n} はどちらも x^{-2} である。このとき左辺は

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

となる。x^{-1} の項を比較すると $k=2$ であり、このとき $3k-k^2=6-4=2$ となって x^{-2} の項も一致する。よって

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

(2) を解く。 小問 (i) により、(2) は次の二つの方程式の組と同値になる。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

条件は $x=1$ で与えられているので、$x>0$ で考える。

u の方程式。 積分因子は $\exp\int\big(1+\frac{2}{x}\big)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2\mathrm{e}^xu\big)=\big(4x^3+12x^2\big)\,\mathrm{e}^x.$$

右辺はちょうど $4x^3\mathrm{e}^x$ の導関数（積の微分法による）であるから、

$$x^2\mathrm{e}^xu=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

$x = 1$ における u の値は初期条件から求まる。$u = y' + \frac{2}{x}y = -3 + 2 \times 5 = 7$ である。よって $4 + Ce^{-1} = 7$ となり、$C = 3e$ であって、

$$u = 4x + \frac{3e^{1-x}}{x^2}.$$

y の方程式。積分因子は $e^{2\ln x} = x^2$ であるから、

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^2 u = 4x^3 + 3e^{1-x}, \qquad \text{したがって} \qquad x^2 y = x^4 - 3e^{1-x} + D.$$

$x = 1$ において $5 = 1 - 3 + D$ であるから、$D = 7$ である。したがって

$$\boxed{y = x^2 + \frac{7 - 3e^{1-x}}{x^2}}.$$

ここでは $y(1) = 5$ を用い、C を求める際に $y'(1) = -3$ を用いたので、両方の条件が満たされている。

検算

- $x = 1$ において $y = 1 + 7 - 3 = 5$ である。微分すると $y' = 2x - 14x^{-3} + 3e^{1-x}x^{-2} + 6e^{1-x}x^{-3}$ であり、$x = 1$ では $2 - 14 + 3 + 6 = -3$ となる。
- 特殊解の部分（particular part）$y = x^2$ は、それ単独で (2) を満たすはずである。$2 + (1 + \frac{4}{x})2x + (\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 = 2 + 2x + 8 + 2x + 2 = 4x + 12$ であり、確かに満たしている。
- 枠で囲んだ y を、$x = 0.3$ から $x = 5$ までの多くの点でコンピュータにより (2) に代入すると、両辺は数値微分の誤差（約 10^{-5}）の範囲内で一致する。

よくある間違い

- $y'(1) = -3$ をそのまま u の初期値として用いてしまう。u の初期値は $y' + gy = 7$ であり、-3 ではない。
- 小問 (i) で $g'(x)$ の項を忘れる。g は x に依存するので、gy は積の微分法で微分しなければならない。
- 二つの段階のどちらかで積分定数（constant of integration）を落とす。定数は二つあり、これが二つの初期条件に対応している。

STEP のその先へ

これは微分作用素（differential operator）を因数分解するという考え方である。D を $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ として、$(D+\mathrm{f})(D+\mathrm{g})y=\mathrm{h}$ と書ける。g は x に依存するので二つの因子は可換（commute）ではなく、そのために交差項 g' が現れるのである。g について得られた方程式は**リッカチ方程式**（Riccati equation）である。リッカチ方程式は非線形であるが、解が一つわかっていれば、ここで見たように、線形の二階の問題を二つの一階の問題に帰着させることができる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、積分因子、階数低下法（reduction of order）、リッカチ方程式が扱われている。

解答例

STEP III 2020、第 8 問

純粋数学 • 数列と無限降下法

> **STEP III 2020、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.8 節「**有理数を数える**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/counting-rationals.html

鍵となる考え方

添字の大きい項はどれも、添字がおよそ半分の項からつくられている。したがって、組 (u_n, u_{n+1}) についての主張はどれも、より小さい添字の組へと押し戻すことができ、**降下法**（descent）による議論（これは最小反例（smallest counterexample）を選ぶことと同値である）がすべての小問で役に立つ。最初のいくつかの項を書き出し、連続する各組から新しい二つの組がどのように生じるかを書いてみると、証明の前に規則性が見えてくる。

解答

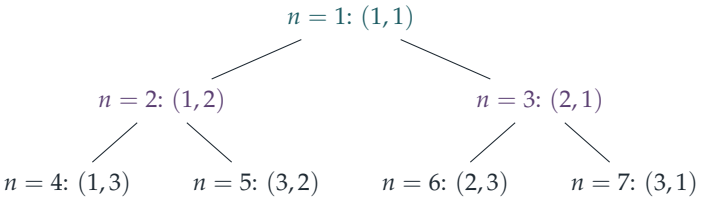
最初の 16 項は

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

である。すべての項は正の整数である。実際、u_1 についてはこれが成り立ち、それ以降の各項は前の項そのものか前の二つの項の和であるから、（強い）帰納法（strong induction）によって従う。

ある組から後の組がどのように生じるかを記録しておく価値がある。$(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$ ならば、定義から直ちに

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



位置 n の組とは (u_n, u_{n+1}) のことである。$(*)$ より、その左の子は位置 $2n$、右の子は位置 $2n+1$ にある。位置 $n \geq 2$ の組はどれも、位置 $\lfloor n/2 \rfloor$ の組からちょうどこの仕方で生じる。

小問 (i)

$n \geq 2$ である連続する組 (u_n, u_{n+1}) をとり、$k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$ とおく。

- $n = 2k$ のとき、組は $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$ である。$u_{k+1} \geq 1$ であるから、奇数添字の項 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ は偶数添字の項 $u_{2k} = u_k$ より大きい。
- $n = 2k+1$ のとき、組は $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$ である。このとき $u_k \geq 1$ であるから、$u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ は $u_{2k+2} = u_{k+1}$ より大きい。

よって、最初の組 $(u_1, u_2) = (1,1)$ を除くすべての組において、奇数添字の項のほうが真に大きい。特に、**組の二つの項が等しいのは最初の組だけである。**

小問 (ii)

$d > 1$ が u_n と u_{n+1} の両方を割り切るとする。$u_1 = u_2 = 1$ であるから $n = 1$ ではありえず、$n \geq 2$ である。$k = \lfloor n/2 \rfloor$ とおくと $1 \leq k < n$ である。

- $n = 2k$ のとき：$d \mid u_{2k} = u_k$ かつ $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ であるから、d は差 u_{k+1} を割り切る。
- $n = 2k+1$ のとき：$d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$ かつ $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ であるから、$d \mid u_k$ である。

いずれの場合も、d はより前の連続する組である u_k と u_{k+1} の両方を割り切る。これが示すべきことであった。

次に、ある連続する組が共通因数 $d > 1$ をもつと仮定し、そのような組 (u_n, u_{n+1}) を n ができるだけ小さくなるように選ぶ。上で見たように $n \neq 1$ であり、いま述べた議論により、同じ共通因数をもつ位置 $k < n$ の組が得られる。これは n の最小性に矛盾する。したがって、連続する二つの項はどれも互いに素（co-prime）である。

小問 (iii)

ある順序対 (a,b) が二つの異なる位置に現れる、すなわち $m<n$ として $(u_m,u_{m+1})=(u_n,u_{n+1})=(a,b)$ であると仮定する。このような重複のうち、m ができるだけ小さいものを選ぶ。

$m=1$ ならば $a=b=1$ である。しかし $n\geq 2$ であり、小問 (i) より位置 n の組の二つの項は等しくない。よって $m\geq 2$ であり、このとき小問 (i) より $a\neq b$ でもある。

> **考えてみよう** a と b だけから、位置が奇数か偶数かをどのように判定できるだろうか。

小問 (i) より、組の大きいほうの項が奇数添字をもつので、位置の偶奇（parity）は組そのものによって決まる。

- $a<b$ ならば、第 2 項が奇数添字をもつので、m と n はともに偶数である：$j<k$ として $m=2j$、$n=2k$。このとき $u_j=u_{2j}=a$ かつ $u_{j+1}=u_{2j+1}-u_j=b-a$ であり、同様に $(u_k,u_{k+1})=(a,b-a)$ である。
- $a>b$ ならば、m と n はともに奇数である：$1\leq j<k$ として $m=2j+1$、$n=2k+1$。このとき $u_{j+1}=u_{2j+2}=b$ かつ $u_j=u_{2j+1}-u_{j+1}=a-b$ であり、同様に $(u_k,u_{k+1})=(a-b,b)$ である。

どちらの場合も、一つの順序対が二つの異なる位置 j と k に現れ、しかも $j\leq m/2<m$ である。これは m の選び方に矛盾する。よって、正の整数の順序対が二つの異なる場所で連続して現れることはない。

小問 (iv)

$a>b$ で a,b は互いに素とし、(a,b) はこの数列の連続する組ではないと仮定する。このとき $a-b$ と b は正の整数であり、しかも互いに素である。実際、$a-b$ と b の任意の共通因数は $(a-b)+b=a$ も割り切るので、a と b の共通因数となり、1 でなければならない。

もしどこかで $a-b$ の直後に b が続く、すなわち $(u_k,u_{k+1})=(a-b,b)$ であるとすると、$(*)$ より

$$(u_{2k+1},u_{2k+2})=\big((a-b)+b,\ b\big)=(a,b),$$

となり、(a,b) についての仮定に矛盾する。よって $(a-b,b)$ も連続して現れない互いに素な組であり、その和は $a<a+b$ である。

$a<b$ の場合の同様の結果は次のとおりである：a と $b-a$ は互いに素な正の整数であり、a の直後に $b-a$ が続く形で連続して現れることはなく、その和 b は $a+b$ より小

さい。証明は同じである。a と $b-a$ の共通因数は $a+(b-a)=b$ を割り切り、また $(u_k, u_{k+1})=(a, b-a)$ ならば $(u_{2k}, u_{2k+1})=(a, a+(b-a))=(a,b)$ となる。

小問 (v)

すべての項は正の整数であるから、$f(n)=u_n/u_{n+1}$ は正の有理数であり、値域（range）は正の有理数全体に含まれる。以下、すべての正の有理数が値としてとられ、しかもちょうど一度だけとられることを示す。

すべての正の有理数は値域に含まれる。正の有理数を既約分数（lowest terms）で p/q と表す。ここで p, q は互いに素な正の整数である。互いに素なすべての組 (p,q) が、ある n について (u_n, u_{n+1}) として現れることを主張する。そうでないとすると、現れない互いに素な組のうち、$a+b$ ができるだけ小さいもの (a,b) を選ぶ。$a=b$ ではありえない。実際、そのとき互いに素であることから $a=b=1$ となるが、$(1,1)$ は $n=1$ で現れる。よって $a>b$ または $a<b$ であり、小問 (iv) により、現れない互いに素な組で和がより小さいものが得られる。これは最小性に矛盾するので、互いに素なすべての組 (p,q) はある位置 n に現れ、このとき $f(n)=p/q$ である。

f は単射（*one-to-one*）である。$f(m)=f(n)$ とする。小問 (ii) より、u_m/u_{m+1} と u_n/u_{n+1} はともに分母が正の既約分数である。正の有理数のこのような表し方はただ一つであるから、$u_m=u_n$ かつ $u_{m+1}=u_{n+1}$ である。小問 (iii) より、同じ順序対が二つの異なる場所に現れることはないので、$m=n$ である。

以上より、f は正の整数全体から正の有理数全体への全単射（bijection）であり、したがって逆関数（inverse）f^{-1} をもつ。既約分数 p/q が与えられたとき、$f^{-1}(p/q)$ は p の直後に q が続くただ一つの位置である。たとえば、3 の直後に 5 が続くのは位置 10 だけであるから、$f^{-1}(\frac{3}{5})=10$ である。

検算

- 書き出した項から組 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,4), \ldots$ が得られる。最初の組以降は奇数添字の項のほうが大きく、すべての組は互いに素であり、重複する組はない。
- 小問 (iv) の降下を 3/5 に対して実行すると $(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$ となる。$(*)$ を用いて逆にたどると、位置 1 の $(1,1)$ から位置 2 の $(1,2)$、位置 5 の $(3,2)$、位置 10 の $(3,5)$ が得られる。実際 $u_{10}=3$、$u_{11}=5$ である。
- 最初の 200 万項についてコンピュータで確かめたところ、小問 (i)–(iii) が成り立ち、$p+q \le 21$ である互いに素な組 (p,q) はどれもちょうど一度ずつ現れた。

よくある間違い

- 小問 (ii) と (iii) で、最初の組 $(1,1)$ を別に除外するのを忘れること。これは各降下の基底段階である。
- 小問 (iii) で、二つの位置の偶奇が同じであることを根拠なしに仮定すること。まさにこれを保証するのが小問 (i) である。
- 小問 (v) で、値域が正の有理数全体であることだけを証明すること。逆関数をもつには f が単射であることも必要であり、それには小問 (ii) と (iii) を合わせて用いる。

STEP のその先へ

これはスターンの二原子数列（Stern's diatomic sequence）であり、u_n/u_{n+1} を並べるとカルキン–ウィルフ（Calkin–Wilf）による有理数の数え上げが得られる。これは $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}^+$ の間の明示的な全単射であり、有理数全体が可算（countable）であることを具体的に示している。小問 (iv) と (v) の降下はユークリッド（Euclid）の互除法（Euclid's algorithm）の引き算版であり、木の中で $(1,1)$ から (p,q) へ至る道筋は p/q の連分数（continued fraction）を表している。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、ユークリッドの互除法と連分数を見事に解説している。

解答例

STEP III 2020、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP III 2020、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

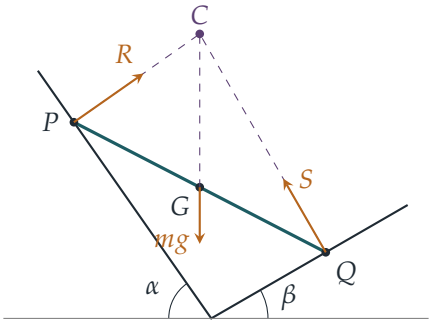
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

棒にはちょうど 3 つの力がはたらいている。中心にはたらく重力と、両端それぞれにはたらく接触力である。互いに平行でない 3 つの力の下で釣り合い（equilibrium）の状態にある物体では、それらの力の作用線（line of action）は 1 点で交わる。したがって問題全体が幾何の問題になる。すなわち、その交点の高さを 2 通りの方法で求め、それらを等しいとおけばよい。小問 (ii) では、Q における垂直抗力（normal reaction）と限界摩擦力（limiting friction）を合成して、摩擦角（angle of friction）λ だけ傾いた 1 つの全抗力（total reaction）にまとめる。ここで $\tan\lambda = \mu$ であり、β を $\beta + \lambda$ に置き換えれば同じ幾何がそのまま使える。

解答

棒は一様な剛体（rigid body）で、長さ $2l$、中心 G をもつとし、2 つの平面は固定されているとモデル化する。2 平面の交線の左側に Π_1、右側に Π_2 を置く。すると P は左側にあって高く、Q は右側にあって低い。



小問 (i)

両方の平面はなめらか（smooth）なので、P における抗力 R は Π_1 に垂直であり、Q における抗力 S は Π_2 に垂直である。傾斜角 α の平面に垂直な直線は、鉛直方向と角 α をなす。よって R の作用線は P から Q の側へ傾きながら、鉛直上向きと角 α をなして上っていく。同様に S の作用線は Q から P の側へ傾きながら、鉛直上向きと角 β をなして上っていく。

棒は 3 つの力、すなわち R、S、および G を通って鉛直にはたらく重力 mg の下で釣り合っている。R と S の作用線の交点 C のまわりのモーメント（moment）を考えると、R と S のモーメントは 0 なので、重力のモーメントも 0 でなければならない。つまり重力の作用線は C を通る。したがって C は G の真上にある。

> **考えてみよう** 「C は G の真上にある」という事実を、どうすれば方程式に書き換えられるだろうか。

Q から測った C の高さを 2 通りの経路で計算する。G は中点であり、棒は水平と角 θ をなすので、G は両端からそれぞれ水平距離 $l\cos\theta$ のところにあり、P は Q より $2l\sin\theta$ だけ高い。

- R の作用線に沿って：鉛直と角 α をなす直線に沿って水平に $l\cos\theta$ だけ進むと、高さは $l\cos\theta\cot\alpha$ だけ上がる。よって C は Q より $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$ だけ高い。
- S の作用線に沿って：同様にして、C は Q より $l\cos\theta\cot\beta$ だけ高い。

これらを等しいとおき、$l\cos\theta \neq 0$ で割ると

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{すなわち} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。$\beta < \alpha$（ともに鋭角）であるから $\cot\beta > \cot\alpha$ であり、よって $\theta > 0$ となる。これは P が Q より高いことと整合している。

小問 (ii)

Π_1 は依然としてなめらかなので、P における抗力は前とまったく同じである。Q では垂直抗力 N と、Π_2 に沿った摩擦力 F がはたらく。

摩擦力の向き。 棒は剛体なので、P と Q の速度の棒方向の成分は等しい。P が速さ u で Π_1 を滑り下り始め、Q が（符号付きの）速さ w で Π_2 を上るとする。P から Q へ向かう棒の方向は水平より角 ϕ だけ下を向いているので、この方向に分解すると

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

ここで $\cos(\alpha - \phi) > 0$ であり、また後で $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$ であることがわかるので、$w > 0$ である。つまり Q は Π_2 を**上ろう**としている。摩擦力はこれを妨げる向きにはたら

くので、F は Π_2 に沿って下向きにはたらく。また釣り合いは限界の状態にあるので、$F = \mu N$ である。

全抗力。N と F を 1 つの力 S' に合成する。この力は法線と角 λ をなし、$\tan\lambda = F/N = \mu$ である。F は斜面に沿って下向き（2 平面の交線の方向）を向いているので、抗力をさらに P の側へ傾ける。よって S' の作用線は Q から P の側へ傾きながら、鉛直上向きと角 $\beta+\lambda$ をなして上っていく。（$\beta+\lambda > \frac{1}{2}\pi$ の場合、この直線は実際には下っていくが、以下の高さの式は余接が負になるだけでそのまま成り立つ。）

棒は再び 3 つの力の下で釣り合っているので、それらの作用線は G の真上の 1 点で交わる。小問 (i) の議論は、θ を ϕ に、β を $\beta+\lambda$ に置き換えるだけで一字一句そのまま通用し、

$$2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha.$$

が得られる。これより $2\tan\phi < \cot\beta$ がわかるので、$\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ となり、$\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$ である。これで先に仮定した摩擦力の向きが正しいことが確かめられた。

$2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ からこれを引くと

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta+\lambda) = \frac{\sin(\beta+\lambda)\cos\beta - \cos(\beta+\lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta+\lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

分子と分母を $\cos\lambda$ で割って $\tan\lambda = \mu$ を用い、さらに $\cos\beta$ をくくり出すと

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta+\mu)} = \frac{2\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta}.$$

両辺を半分にして

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta},$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

- $\mu = 0$ のとき右辺は 0 となるので $\phi = \theta$ である。小問 (ii) は当然のことながら小問 (i) に帰着する。
- 右辺は正なので $\phi < \theta$ である。摩擦があると、なめらかな平面の場合よりも棒はより水平に近い状態で静止できる。P が滑り下りようとしている端であることを考えれば、これは納得できる。

- $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$ とする。すると $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$ なので $\theta = 30^\circ$ である。$\mu = 0.5$ のとき公式から $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774 \times 0.8660) \approx 0.0415$ となり、$\phi \approx 2.4^\circ$ である。これらの値に対して、水平方向と鉛直方向の力の分解および G のまわりのモーメントの式を直接解くと（コンピュータによる検算で、何千組ものランダムな角度と係数について繰り返した）、同じ ϕ が得られる。
- 任意の μ について、$2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha$ を使えば手早く確かめられる。この場合 $\lambda \approx 26.57^\circ$、$\cot 56.57^\circ \approx 0.6606$ であり、$(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$ となって、丸め誤差の範囲で一致する。

よくある間違い

- 摩擦力を Π_2 に沿って上向きにとってしまう。P が滑り下りるとき、棒の長さが一定であるために Q は斜面を**上る**ことになるので、Q における摩擦力は斜面に沿って下向きにはたらく。
- 抗力の角度を鉛直方向ではなく水平方向から測ってしまう。傾斜角 α の平面の法線は、**鉛直方向**と角 α をなす。

STEP のその先へ

ここで用いた 3 力の作用線が 1 点で交わるという性質は、剛体の釣り合いの一般的な条件、すなわち合力が 0 であり、任意の点のまわりの合モーメントが 0 であるという条件の特別な場合である。摩擦力と垂直抗力を合成して半頂角 λ の「摩擦円錐」（cone of friction）として捉えるのは、技術者がはしご、くさび、ねじの安定性を考えるときの方法であり、摩擦力の向きを決めた速度による議論は、瞬間回転中心（instantaneous centre of rotation）の考え方にほかならない。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦をこうした精神で扱っている。

解答例

STEP III 2020、第 10 問

力学 ・ 単振動

> **STEP III 2020、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

ばねにつるされた質点は、その平衡位置（equilibrium position）を中心とする単振動（simple harmonic motion）を行い、これによって Ω が k、g、a で表される。台の上では、質点の加速度は台の加速度に等しく、これは x で表されるので、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）から垂直抗力（reaction）がただちに求まる。接触を保つには、垂直抗力がつねに非負でなければならない。垂直抗力は x の**一次式**になることがわかるので、台の運動の両端だけを調べればよい。どちらの端が問題になるかは、ω が Ω より小さいか大きいかによって決まる。

解答

質点を質点（point mass）として、ばねを質量の無視できるものとしてモデル化し、ばねは伸びと縮みのどちらについてもフックの法則（Hooke's law）に従うとする。以下では一貫して、質点にはたらく力について上向きを正とする。

つるされた質点。 質点の A から下方への距離を y とすると、伸び（extension）は $y-a$ であり、張力（tension）は $kmg(y-a)/a$ で、質点に上向きにはたらく。下向きを正としてニュートンの運動の第 2 法則を用いると

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

を得る。$z = y - a\left(1+\frac{1}{k}\right)$ とおくとこれは $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$ となり、平衡点 $y = a\left(1+\frac{1}{k}\right)$ を中心とする単振動である。質点はこの点から離れた位置で静かに放される（伸びが a/k 以外であれば $z \neq 0$ となる）ので、角振動数（angular frequency）$\sqrt{kg/a}$、周期

（period）$2\pi\sqrt{a/(kg)}$ で鉛直に振動する。これを $2\pi/\Omega$ に等しいとおくと $\Omega^2 = kg/a$、すなわち

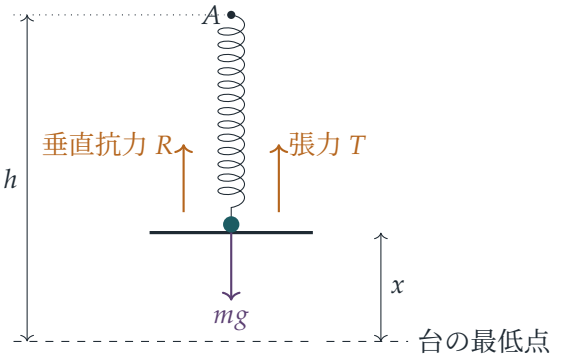
$$kg = a\Omega^2.$$

を得る。以下ではこれを $g/\Omega^2 = a/k$ の形で用いる。

台。 台は振幅（amplitude）b、角振動数 ω の単振動を行うので、最低点からの台の高さ x は $0 \le x \le 2b$ の範囲を動き、振動の中心は $x = b$ である。したがって台の加速度は

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

である。（たとえば $x = b(1-\cos\omega t)$ とすると $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$ となる。）



垂直抗力。 質点が台と接触している間は台とともに動くので、台の最低点からの質点の高さは x、加速度は $\ddot{x}$ である。A から下方への質点の距離は $h-x$ なので、ばねの伸びは $h-x-a$ であり、張力は $kg/a = \Omega^2$ を用いて

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

となる。（$h-x<a$ ならばばねは縮んでおり（compression）、T は負、すなわち押す力になるが、同じ式がそのまま成り立つ。）質点にはたらく力は上向きの R と T、下向きの mg であるから

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

であり、したがって

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

となって、題意の式が得られる。

接触を保つ条件。 質点がつねに台の上にとどまるための必要十分条件は、$[0, 2b]$ のすべての x に対して $R \geq 0$ となることである。x を含む項をまとめると

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\, x.$$

となる。

? **考えてみよう** なぜ x のただ一つの値だけを調べれば十分なのだろうか。

R は x の一次関数（linear function）なので、区間 $0 \leq x \leq 2b$ における最小値は端点でとる。傾き $\Omega^2 - \omega^2$ が正ならば $x = 0$ で、負ならば $x = 2b$ で最小となる。台は各周期ごとに両端に達するので、つねに $R \geq 0$ であることは、該当する端点で $R \geq 0$ であることと同値である。

$\omega < \Omega$ の場合。最小値は $x = 0$（運動の最下点）でとるので、$\Omega^2 > 0$ で割り、$g/\Omega^2 = a/k$ を用いると、必要な条件は

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \geq 0 \iff h \leq a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

である。これが求める不等式である。

$\omega > \Omega$ の場合。このときは最小値を $x = 2b$（運動の最上点）でとるので、必要な条件は

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \geq 0 \iff h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

である。

すべての ω に対して成り立つ上界。 質点が接触を保つと仮定する。

- $\omega < \Omega$ ならば、$b > 0$ より $\omega^2 b/\Omega^2 < b$ なので、$h \leq a(1 + \frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1 + \frac{1}{k}) + b$ である。
- $\omega > \Omega$ ならば、$2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$ なので、$h \leq a(1 + \frac{1}{k}) + b(2 - \omega^2/\Omega^2) < a(1 + \frac{1}{k}) + b$ である。
- $\omega = \Omega$ ならば、R の x を含む項は打ち消し合い、$R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$ は定数となる。$R \geq 0$ からちょうど $h \leq a(1 + \frac{1}{k}) + b$ が得られる。

したがって、ω の値によらず、どの場合にも

$$h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b$$

が必要である。$h - b$ は台の運動の中心の A からの深さであり、$a(1 + \frac{1}{k})$ はつるされた質点の平衡位置の深さであるから、この結果は「台は、質点の本来の平衡位置より低くない点を中心として振動しなければならない」ということを意味している。

検算

- $a = 1$、$k = 2$、$g = 9.8$ として自由運動を数値的に追うと、得られる周期から $a\Omega^2 \approx 19.600$ となり、$kg = 19.6$ と一致する。
- 台が静止している場合（$b = 0$）、どちらの上界も $h \le a(1 + \frac{1}{k})$ となる。台が平衡点より下にあってはならず、そうでなければばねが質点を持ち上げて台から離してしまう。これはまさに正しい。
- $\omega = \Omega$ では二つの場合の上界は一致し、どちらも $a(1 + \frac{1}{k}) + b$ を与える。連続性（continuity）から考えて当然そうなるべきである。

よくある間違い

- 運動の最上点だけを調べてしまうこと。台がゆっくり動く場合（$\omega < \Omega$）、質点が最も離れやすいのは**最下点**であり、そこではばねが最も強く上に引っ張る。
- ばねが縮みうることを忘れること。張力の式 $kmg(h - x - a)/a$ は符号によらず成り立つので、場合分けを別に行う必要はない。

STEP のその先へ

これは姿を変えた強制振動（forced oscillator）である。ばねは質点をその固有振動数（natural frequency）Ω で振動させようとし、一方で台は振動数 ω を押しつける。垂直抗力は、この二つを両立させるのに必要な力である。大学の振動論の講義では、外力によって駆動される系、共振（resonance）、そして応答が ω/Ω にどのように依存するかを学ぶ。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2020、第 11 問

確率・統計 ・ 確率変数の関数

STEP III 2020、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

狭義単調減少関数（strictly decreasing function）は不等式の向きを逆にする。さらに f は自分自身の逆関数（inverse function）なので、$\mathrm{f}(X) \leq y$ の両辺に適用すれば、X だけに関する事象が得られる。期待値（expectation）は部分積分（integration by parts）によって求まり、これにより f' が f に置き換わる。小問 (ii) では、Z と X の関係が 2 つの変数について対称なので、自己逆（self-inverse）な f を用いて $Z = \mathrm{f}(X)$ と書け、小問 (i) が使える。すると、示すべき不等式は分散（variance）が正であるという主張にほかならない。

解答

小問 (i)

f^{-1} は $[a, b]$ 全体で定義されているので、f は $[a, b]$ からそれ自身への全単射（bijection）であり、したがって Y は $[a, b]$ に値をとる。$y \in [a, b]$ を固定する。f は狭義単調減少なので、不等式の両辺に適用すると不等号の向きが逆になる。また $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ である。よって $x \in [a, b]$ に対して

$$\mathrm{f}(x) \leq y \iff \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) \geq \mathrm{f}(y) \iff x \geq \mathrm{f}(y).$$

（逆向きの含意も同様に、$x \geq \mathrm{f}(y)$ に f を適用すれば成り立つ。）X は $[a, b]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、$\mathrm{f}(y) \in [a, b]$ であるから、

$$\mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}\big(X \geq \mathrm{f}(y)\big) = \frac{b - \mathrm{f}(y)}{b - a},$$

となり、題意が示された。

微分すると、Y の確率密度関数（probability density function）は

$$g(y) = -\frac{\mathrm{f}'(y)}{b-a} \quad \text{for } a \le y \le b,$$

であり、それ以外ではゼロである。f は減少関数なので、これは非負である。次に、$u = y^2$、$\mathrm{d}v = -\mathrm{f}'(y)\,\mathrm{d}y$ として部分積分すると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\big(-\mathrm{f}'(y)\big)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{b-a}\Big[-y^2\mathrm{f}(y)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{-b^2a + a^2b}{b-a} + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathrm{f}(b) = a$ と $\mathrm{f}(a) = b$ を用いた。第 1 項は $-ab(b-a)/(b-a) = -ab$ である。積分変数（dummy variable）y を x と書き換えると

$$\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \int_a^b \frac{2x\,\mathrm{f}(x)}{b-a}\,\mathrm{d}x.$$

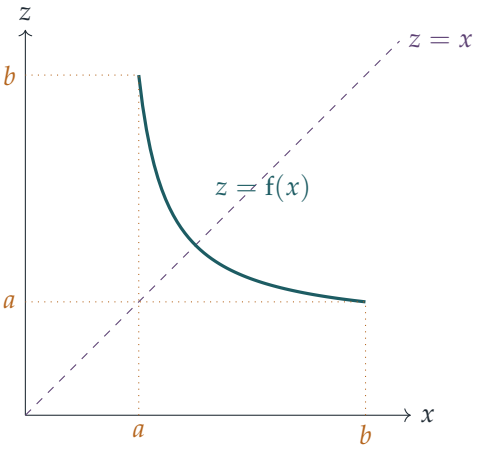
小問 (ii)

$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ より $c = \dfrac{ab}{a+b}$ であり、$\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$ なので $c < a$ であることに注意する。Z について解くと

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{X} = \frac{X-c}{cX}, \qquad \text{よって} \qquad Z = \mathrm{f}(X) \text{ ただし } \mathrm{f}(x) = \frac{cx}{x-c}.$$

$x \ge a > c$ なので、分母は $[a,b]$ 上で正である。f が小問 (i) の 3 つの条件を満たすことを確かめる。

- $\frac{1}{\mathrm{f}(a)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ より $\mathrm{f}(a) = b$ である。同様に $\frac{1}{\mathrm{f}(b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$ より $\mathrm{f}(b) = a$ である。
- $\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x}$ は $[a,b]$ 上で正かつ狭義単調増加なので、$\mathrm{f}(x)$ はそこで狭義単調減少である。
- 関係式 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ は x と z について対称である。したがって $z = \mathrm{f}(x)$ となるのは $x = \mathrm{f}(z)$ のとき、かつそのときに限る。これは $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{-1}$ を意味する。



f のグラフは (a,b) から (b,a) へと延び、自己逆関数のグラフがそうであるべきように、直線 $z=x$ に関して対称である。

? 考えてみよう なぜ $\mathrm{E}(Z^2)$ だけでなく $\mathrm{E}(Z)$ も求めるのか？

不等式は $\mathrm{Var}(Z)>0$ から導かれるはずであり、分散を求めるには両方のモーメント（moment）が必要である。対数はどちらのモーメントにも現れるが、その 1 乗の項は打ち消し合い、2 乗の項だけが残る。

どちらの積分についても、まず割り算をしておく：

$$\mathrm{f}(x)=c+\frac{c^2}{x-c},\qquad x\,\mathrm{f}(x)=\frac{cx^2}{x-c}=c\left(x+c+\frac{c^2}{x-c}\right).$$

$L=\ln\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)$ とおく。$b-c>a-c>0$ なので、これは正である。このとき

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(c+\frac{c^2}{x-c}\right)\mathrm{d}x=c+\frac{c^2L}{b-a}.$$

小問 (i) より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=-ab+\frac{2c}{b-a}\int_a^b\left(x+c+\frac{c^2}{x-c}\right)\mathrm{d}x\\&=-ab+\frac{2c}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}+c(b-a)+c^2L\right)\\&=-ab+c(a+b)+2c^2+\frac{2c^3L}{b-a}.\end{aligned}$$

ここで $c(a+b)=ab$ なので、最初の 2 項は打ち消し合う。$\mathrm{E}(Z)^2=c^2+\dfrac{2c^3L}{b-a}+\dfrac{c^4L^2}{(b-a)^2}$ を引くと、L の 1 次の項が打ち消し合い、

$$\mathrm{Var}(Z)=c^2-\frac{c^4L^2}{(b-a)^2}$$

を得る。Z は定数ではない。実際、小問 (i) より、その分布関数（distribution function）$\big(b-\mathrm{f}(y)\big)/(b-a)$ は $[a,b]$ 上で 0 から 1 まで狭義単調に増加する。よって $\mathrm{Var}(Z)>0$ であり、

$$L^2 < \frac{(b-a)^2}{c^2}$$

が得られる。L と $(b-a)/c$ はともに正なので、両辺の平方根をとってよい：

$$\ln\left(\frac{b-c}{a-c}\right) < \frac{b-a}{c}.$$

検算

- 小問 (i) で、最も簡単な自己逆の例 $\mathrm{f}(x)=a+b-x$ を試してみる。このとき Y は $[a,b]$ 上の一様分布に従い、公式から $\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \frac{2}{b-a}\int_a^b x(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$ が得られる。これは一様分布に従う確率変数（random variable）の 2 次モーメントとして正しい値である。
- $a=1$、$b=3$ のとき $c=\frac{3}{4}$、$L=\ln 9\approx 2.197$ であり、一方 $(b-a)/c=\frac{8}{3}\approx 2.667$ である。不等式は成り立ち、$\mathrm{Var}(Z)=\frac{9}{16}-\frac{81}{256}\cdot\frac{(\ln 9)^2}{4}\approx 0.180$ となる。f と f^2 をコンピュータで数値積分しても同じ分散が得られる。
- $b\to a$ のとき、不等式の両辺はともに 0 に近づき、$\mathrm{Var}(Z)\to 0$ となる。Z は $[a,b]$ に押し込められるのだから、そうなるべきである。

よくある間違い

- 減少関数は不等号の向きを逆にすることを忘れ、$\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X\le \mathrm{f}(y))$ と書いてしまう。
- 密度 $-\mathrm{f}'(y)/(b-a)$ のマイナス符号を落とす。密度が負になることはありえない。
- $\mathrm{Var}(Z)$ が**狭義に**正である理由を述べない。あるいは、両辺が正であることに触れずに平方根をとる。

STEP のその先へ

小問 (i) は密度の変数変換公式（transformation rule for densities）の特別な場合である：$Y=\mathrm{f}(X)$ で f が単調ならば、$g_Y(y)=g_X\big(\mathrm{f}^{-1}(y)\big)\left|(\mathrm{f}^{-1})'(y)\right|$ が成り立つ。$\mathrm{Var}(Z)>0$ から狭義の不等式を得る手法は、強力な技法の一例である：$\mathrm{E}(Z)^2\le \mathrm{E}(Z^2)$ はイェンセン（Jensen）の不等式（あるいはコーシー・シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式）が姿を変えたものであり、うまく確率変数を選べば多くの古典的な不等式が証明

できる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP III 2020、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布と独立性

STEP III 2020、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては独立（independent）な幾何分布（geometric distribution）に従う確率変数の組 (X, Y) の関数であり、$\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2}$ である。和と差については、この同時確率（joint probability）を (x, y) 格子上の直線に沿って足し合わせるのがよく、最大値と最小値については $\mathrm{P}(T \le t)$ のような累積確率（cumulative probability）を通して扱うのが最も簡単である。独立性については、一方の変数のある値が他方の値を完全に決めてしまう場合を探すとよい。

解答

A は最初に表が出るまで硬貨を投げるので、X が値 $k \ge 1$ をとるのは、最初の $k-1$ 回がすべて裏で、k 回目が表のときである。

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Y についても同様である。2 人は別々に硬貨を投げるので、X と Y は独立であり、

$$\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2} \qquad (x, y \ge 1).$$

繰り返し用いる事実が 2 つある。$\mathrm{P}(X > k) = q^k$（最初の k 回がすべて裏）であり、したがって $\mathrm{P}(X \le k) = 1 - q^k$ である。また $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$ である。

小問 (i)

和。S は値 $s \geq 2$ をとる。$S = s$ となるには、$1 \leq x \leq s-1$ として $X = x$ かつ $Y = s - x$ であればよい。これら $s-1$ 通りの結果はそれぞれ確率 p^2q^{s-2} をもつので、

$$\mathrm{P}(S = s) = (s-1)p^2q^{s-2}, \qquad s = 2, 3, 4, \ldots$$

最大値。$T \leq t$ となるのは $X \leq t$ かつ $Y \leq t$ のときに限るので、独立性より $\mathrm{P}(T \leq t) = (1-q^t)^2$ である。よって $t \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T = t) &= \mathrm{P}(T \leq t) - \mathrm{P}(T \leq t-1) = (1-q^t)^2 - (1-q^{t-1})^2 \\ &= \left[(1-q^t) - (1-q^{t-1})\right]\left[(1-q^t) + (1-q^{t-1})\right] \\ &= (q^{t-1} - q^t)(2 - q^{t-1} - q^t) \\ &= pq^{t-1}(2 - q^{t-1} - q^t),\end{aligned}$$

ここで $q^{t-1} - q^t = q^{t-1}(1-q) = pq^{t-1}$ を用いた。これが求める結果である。($t = 1$ のとき、この式は正しく $p(1-q) = p^2$ を与える。)

小問 (ii)

差。$U = 0$ となるには、ある $k \geq 1$ について $X = Y = k$ であればよい。

$$\mathrm{P}(U = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}.$$

$u \geq 1$ のときは、$Y = X + u$ または $X = Y + u$ である。これらは互いに排反であり、対称性から確率は等しいので、

$$\mathrm{P}(U = u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = k+u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} p^2q^{2k+u-2} = \frac{2p^2q^u}{1-q^2} = \frac{2pq^u}{1+q}.$$

最小値。$W > w$ となるのは $X > w$ かつ $Y > w$ のときに限るので、$\mathrm{P}(W > w) = q^{2w}$ であり、$w \geq 1$ に対して

$$\mathrm{P}(W = w) = \mathrm{P}(W > w-1) - \mathrm{P}(W > w) = q^{2w-2} - q^{2w} = (1-q^2)\,q^{2(w-1)}.$$

したがって W 自身も「成功」確率 $1-q^2$ の幾何分布に従う。A と B が 1 回ずつ投げる各回で、少なくとも 1 つ表が出る確率が $1-q^2$ だからである。

小問 (iii)

$S = 2$ ならば、$X, Y \geq 1$ より $X = Y = 1$ でなければならず、このとき $T = 1$ である。よって $S = 2$ と $T = 3$ が同時に起こることはない。

$$\mathrm{P}(S = 2 \text{ かつ} T = 3) = 0.$$

一方、$\mathrm{P}(S=2)=p^2>0$ であり、$0<q<1$ より $q^2+q^3<2$ となるので $\mathrm{P}(T=3)=pq^2(2-q^2-q^3)>0$ である。よって $\mathrm{P}(S=2)\times\mathrm{P}(T=3)>0$ であり、両辺は一致しない。

小問 (iv)

U と W は独立である。すべての $u\geq 0$ と $w\geq 1$ に対して $\mathrm{P}(U=u,W=w)=\mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)$ を示せばよい。U と W の両方がわかれば、小さい方の値が w、大きい方の値が $w+u$ であることがわかる。

> **考えてみよう** $U=u$ かつ $W=w$ となる組 (X,Y) はどれか？

$u=0$ ならば、そのような組は (w,w) だけである。$u\geq 1$ ならば、ちょうど 2 つ、$(w,w+u)$ と $(w+u,w)$ があり、それぞれの確率は p^2q^{2w+u-2} である。

$u=0$ のとき、$\mathrm{P}(U=0,W=w)=p^2q^{2w-2}$ であり、一方

$$\mathrm{P}(U=0)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{p}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=p^2q^{2w-2}.$$

$u\geq 1$ のとき、$\mathrm{P}(U=u,W=w)=2p^2q^{2w+u-2}$ であり、一方

$$\mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{2pq^u}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=2p^2q^{2w+u-2}.$$

いずれの場合も両者は一致するので、U と W は独立である。

他の組はどれも独立ではない。残りの組は (S,T)、(S,U)、(S,W)、(T,U)、(T,W) である。2 つの変数が独立でないことを示すには、$\mathrm{P}(A=a,B=b)\neq\mathrm{P}(A=a)\,\mathrm{P}(B=b)$ となる値の組を 1 つ挙げれば十分である。

> **考えてみよう** S または T のどの 1 つの値が、他のすべてを決めてしまうか？

事象 $S=2$ と事象 $T=1$ は同じ事象 $\{X=Y=1\}$ であり、その確率は $p^2>0$ である。この事象のもとでは $T=1$、$U=0$、$W=1$ である。$0<p,q<1$ であるから、以下に挙げる T、U、W の値はいずれも、小問 (i) と (ii) の式により正の確率をもつ。よって

- (S,T)：小問 (iii) より $\mathrm{P}(S=2,T=3)=0\neq\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(T=3)$；
- (S,U)：$\mathrm{P}(S=2,U=1)=0$ であるが、$\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (S,W)：$\mathrm{P}(S=2,W=2)=0$ であるが、$\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(W=2)>0$；
- (T,U)：$\mathrm{P}(T=1,U=1)=0$ であるが、$\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (T,W)：$\mathrm{P}(T=1,W=2)=0$ であるが、$\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(W=2)>0$。

したがって、S、T、U、W の中で独立な組は U と W だけである。

検算

- 各分布の確率の総和は 1 になる。例えば $\sum_{t\geq 1} \mathrm{P}(T=t)$ は次々に打ち消し合って（telescoping）$\lim(1-q^t)^2 = 1$ となり、また $\frac{p}{1+q} + \sum_{u\geq 1} \frac{2pq^u}{1+q} = \frac{p}{1+q}\left(1+\frac{2q}{p}\right) = \frac{p+2q}{1+q} = 1$ である。
- $p = q = \frac{1}{2}$ のとき、$\mathrm{P}(T=2) = \frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$ となり、これは 3 つの結果 $(1,2),(2,1),(2,2)$ を書き出して確率 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ を足したものと一致する。
- $p = q = \frac{1}{2}$ のとき、$\mathrm{P}(U=1, W=1) = \mathrm{P}\{(1,2),(2,1)\} = \frac{1}{4}$ であり、$\mathrm{P}(U=1)\,\mathrm{P}(W=1) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ となって、独立性が要求するとおりである。
- すべての式と U と W の独立性は、$p = 0.3$、0.55、0.8 について同時分布を足し合わせることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $u \geq 1$ のときの $\mathrm{P}(U=u)$ で因子 2 を忘れること、あるいは $X=Y$ が 1 回しか数えられない $u=0$ のときに誤ってそれを含めること。
- 場合を直接足し合わせて $\mathrm{P}(T=t)$ を求めようとし、$X=Y=t$ を二重に数えてしまうこと。累積確率を用いる方法ならこれを避けられる。
- 値の組を 1 つ確かめれば独立性が証明できると考えること。独立性には **すべての** u と w についての確認が必要であるが、従属性を示すには 1 つの反例で十分である。

STEP のその先へ

U と W の独立性は、無記憶性（memoryless property）の離散版である。最初の表が時刻 W に出たとき、もう一方のプレイヤーの残りの待ち時間は、それまでにどれだけ時間がかかったかに関係なく、新たな幾何分布に従う確率変数となる。独立な指数分布（exponential distribution）に従う確率変数についての連続版では、最小値と、最大値までの差が独立になる。これはポアソン過程（Poisson process）や待ち行列理論（queueing theory）の基礎となっている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がこれらの考え方を展開している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2020 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

